Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

МАТЕМАТИКА НА ПРАВОАГОЛНА ТАБЛА (ПРВ ДЕЛ)

Задачите со боење, пресметувања и пребројувања на конфигурации на правоаголни табли (квадратот е правоаголник) се дел од комбинаторниот фолклор на математичките натпревари. Ова посебно се однесува на националните и меѓународните олимпијади, како за основно, така и за средно образование. Токму затоа во ова наше дружење ќе разгледаме поголем број задчи кои се однесуваат на математиката на правоаголните табли, кои задачи се на ниво на ученици до 15,5 годишна возраст.

1. Единичните полиња на квадратна 3×3 табла се обоени во бела и црна боја. Докажи дека или има поле со точно две соседни црни полиња или има поле со точно две соседни бели полиња. (Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна.)

   Решение. Колоните одлево-надесно да ги означиме со 1, 2, 3, а редовите оддолу-нагоре да ги означиме со 1, 2, 3. Со (a,b) го означуваме полето кое се наоѓа во $a-$тиот ред и $b-$тата колона. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека полето (1,1) е црно, (во спротивно ское поле на таблата ќе го пребоиме во спротивната боја). Полето (1,1) има само две соседни полиња (1,2) и (2,1). Ако овие две полиња се еднобојни, тогаш задачата е решена. Затоа нека (1,2) е бело, а (2,1) е црно поле. Ако полето (1,3) е црно, тогаш полето (1,2) има две соседни црни полиња. Затоа нека полето (1,3) е бело. Тогаш ако полето (2,2) е бело, бараното поле е (1,2), а ако полето (2,2) е црно, тогаш бараното поле е (2,1).

2. Правоаголна табла може да се покрие со домина и со крстови (крст ја нарекуваме фигурата составена од пет квадратчиња така што на страните на едно квадратче се залепени четирите други квадратчиња). Докажи дека таблата може да се покрие и само со домина.

   Решение. Доволно е да докажеме дека правоаголникот има парна страна. Да допуштиме дека двете страни на правоаголниот се непарни и таблата да ја обоиме шаховски при што аголните полиња се бели. За секоја од двете фигури со кои таблата може да се покрие разликата меѓу белите и црните покриени полиња е делива со 3 (за доминото таа разлика е 0, а за крстот таа разлика е 3 или -3, во зависност дали централното квадратче покрива црно или бело поле). Но, на целата табла разликата на белите и црните полиња е 1, а 3 не е делител на 1, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека едната страна на таблата е со парна должина.

3. Дали е можно да се обојат полињата на табла 2024×2024 во три бои, така што секое поле да има соседни полиња обоени во другите две бои? (Соседни се полињата кои имаат заедничка страна. Не е задолжително соседните полиња да се разнобојни.)

Решение. Бидејќи $4|2024$ таблата можеме да ја поделиме на квадрати 4×4 и секој квадрат да го обоиме како на цртежот десно. Ваквото боење ги задоволува условите на задачата.

2	3	2	3
1	1	1	1
3	2	3	2
1	2	3	1

4. Секое поле на табла со димензии 2022×2022 е обоено во една од четири бои така, што секои две полиња со заедничко теме се разнобојни. Докажи дека четирите аголни полиња на таблата се обоени во четирите бои.

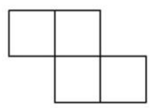
Решение. Околу секое од внатрешните 2021^2 темиња на квадратната мрежа има точно по едно поле од секоја боја. Ако од бојата A има x аголни полиња, тогаш секое од нив се брои од едно теме; ако има y рабни полиња кои не се аголни, тогаш секое од нив се брои од две темиња; и ако има z внатрешни полиња, тогаш секое од нив се брои од четири темиња. Затоа важи $x+2y+4z=2021^2$, од каде следува дека $x\neq0$. Последното значи дека бојата A се среќава меѓу аголните полиња. Сега тврдењето на задачата следува од произволноста на бојата A и фактот дека имаме четири бои и четири аголни полиња.

5. Во полињата на табла 2023×2023 се поставени 3000 жетони, така што во секое поле има најмногу еден жетон. Докажи дека може да се изберат 1012 реда и 1011 колони така што сите жетони на таблата се распоредени во избраните редови и колони.

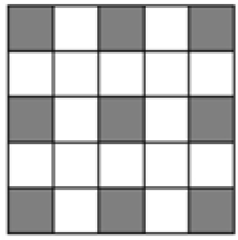
Решение. Да ги избереме 1012-те редови со најголем заеднички број жетони во нив. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се првите 1012 редови. Ако во преостанатите 1011 редови се содржат најмногу 1011 жетони, тогаш е јасно дека можеме да избереме 1011 колони во кои се содржат овие жетони. Во спротивно, ако преостанатите 1011 редови содржат повеќе од 1011 жетони, тогаш ќе има ред во кој има барем 2 жетони. Тоа значи, дека секој од првите 1012 редови има барем по 2 жетони. Но, тогаш на таблата треба да има најмалку $2\cdot1012+1012=3036$ жетони, што е противречност.

6. Определи ги сите природни броеви m и n за кои табла $m\times n$ може да се обои така што ќе бидат исполнети следниве услови:
а) во секој ред бројот на црните полиња е еднаков на бројот на белите полиња,
б) ако колона и ред се сечат во бело поле, тогаш таа колона и тој ред имаат еднаков број бели полиња,
в) ако колона и ред се сечат во црно поле, тогаш таа колона и тој ред имаат еднаков број црни полиња.
Решение. Бидејќи бројот на црните и белите полиња во секој ред се еднакви заклучуваме дека $n=2k$.
Да ја разгедаме првата колона. Ако во таа колона нема бели полиња, тогаш m мора да е еднаков на k бидејќи сите полиња се црни и мора да се толку колку што ги има во секој ред. Слично, ако во таа колона нема црни полиња, тогаш $m=k$.
Еден пример кој покажува дека парот $(m,n)=(k,2k)$ ги задоволува условите на задачата е ако сите полиња во првите k колони ги обоиме црно, а сите колони во вторите k колони ги обоиме бело.
Да претпоставиме дека во првата колона има барем едно црно и барем едно бело поле. Тогаш во тоа поле мора да има точно k црни и точно k бели полиња, па затоа $m=2k$.
Дека парот од видот $(m,n)=(2k,2k)$ ги задоволува условоите на задачата за секој природен број k можеме да видиме ако таблата ја обоиме шаховски, или ако таблата ја поделиме на четири квадрати $k\times k$, па сите полињаво горниот лев и долниот десен квадрат ги обоиме бело, а преостанатите полиња ги обоиме црно.

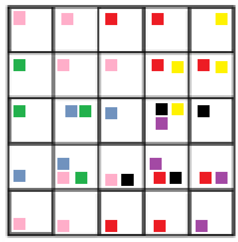
7. Табла 5×5 е поделена на 25 единечни квадратчиња. Сакаме да ги покриеме сите 25 единечни квадратчиња со тетрамина прикажани на цртежот десно. Секое тетрамино може да се ротира, превртува или да се преклопува со друго тетрамино. Определи го најмалиот број тетрамина за



покривање на целата 5×5 табла.



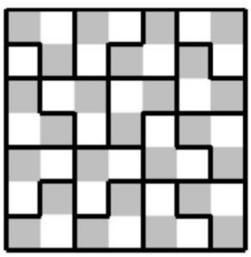
Решение. Да ја обоиме таблата 5×5 како што е прикажано на цртежот десно. Тогаш, без разлика како ќе го поставиме тетраминото тоа може да покрие најмногу една обоено црно квадратче. На таблата имаме 9 црни квадратчиња, што значи дека за покривање на таблата ни се потребни најмалку 9 тетрамина.

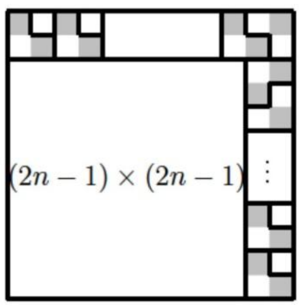


Покривањето на таблата со точно 9 тетрамина е прикажано на цртежот десно. Притоа тетрамината се назначени со различни боења на квадратчињата кои ги покриваат, а квадратчињата во кои имаме преклопување на две или повеќе тетрамина се означени со соодветните бои.

8. Квадратна табла со димензии $(2n+1)\times(2n+1)$ е шаховски обоена така што аголните полиња се црни. За кои n е можно сите црни полиња на таблата да се покријат со аголни тримина?

Решение. Да ги рагледаме црните полиња во првиот третиот итн. $(2n+1)-$виот ред, кои се вкупно $(n+1)^2$. Едно тримино покрива најмногу едно од овие полиња, што значи дека $3(n+1)^2\leq(2n+1)^2$, од каде добиваме $n\geq3$. За $n=3$ на долниот лев цртеж е прикажано бараното покривање. Сега, ако тврдењето важи за $k=n-1$, тогаш за од долниот десен цртеж следува дека тврдењето важи и за $k=n+1$, а од принципот на математичка индукција следува дека сите црни полиња на таблата може да се покријат со аголни тримина за $n\geq3$.





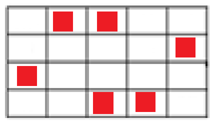
9. Од квадрат 2×2 со отстранување на едно квадратче се добиваат четири вида тримина. Прв вид – отстранување на долното десно

квадратче, втор вид – отстранување на горното лево, трет вид – отстранување на горното десно и четврт вид – отстранување на долното лево квадратче. Од 8 вакви тримина е формиран правоаголник со димензии 6×4. Докажи дека разликата на бројот на тримината од првиот вид и бројот на тримината од вториот вид е делива со 3.

Решние. Да разгледаме табла со 6 реда и 4 колони и во $i-$тиот ред да ги запишеме броевите $i, i+1, i+2, i+3$. Збирот на сите броеви е еднаков на 120. Нека претпоставиме дека сме употребиле a тримина од првиот вид и b тримина од вториот вид. Непосрено се проверува дека секое тримино од првиот вид покрива три броја со збир од видот $3k+2$, а тримино од вториот вид покрива три броја со збир од видот $3m+1$, а тримино од третиот или чтвртиот вид покрива три броја со збир од видот $3n$. Според тоа, $120=3s+2a+b=3(s+a)+b-a$, од каде што следува дека $3|b-a$, т.е. $3|a-b$.

10. Кој е најмалиот природен број n за кој е можно во табла 4×5 да се обојат n полиња, така што секое необоено поле да има заедничка страна со точно едно обоено поле?

Решение. Примерот на цртежот десно покажува дека за $n=6$ е можно саканото боење на таблата.



Да претпоставиме дека е можно да обоиме 5 полиња на саканиот начин. Во таблата прикажана на левиот цртеж треба да има барем едно обоено поле со секоја од петте букви, за да може полето со болдираната соодветна црвена буква да има заедничка страна со обоено поле. Така празните полиња не може да се обоени.

a	a	c	b	**b**
a	c	**c**	c	b
d		c		e
d	d		e	**e**

Во таблата прикажана на цртежот десно тие полиња се означени со буквата n. Заради симетрија и полињата во истата табла означени со буквата x не треба да се обоени.

		x		
	x	o	x	
	n	o	n	
		n		

Затоа едно од полињата означено со буквата o треба да е обоено. Ако се обоени и двете, тогаш се потребни барем уште 4 обоени полиња (за зоните означени со буквите a, b, d, e), што е противречност.

Нека е обоено само едно од полињата означено со буквата o (да кажеме горното). Бидејќи полињата x се необоени, немаме право да обоиме полиња лево и десно од нив (во спротивно x ќе има барем две обоени соседни полиња), па затоа мора да ги обоиме горните две аголни полиња (тие немаат обоени соседни полиња). Така ја добиваме таблата прикажана на цртежот десно, во која со o се означени обоените, а со x задолжително необоените полиња. Но, тогаш сите полиња во кои нема буква треба да се обоени, бидејќи во спротивно нема да биде задоволен условот на задачата за полињата над нив означени со буквата x. Така добиваме 7 обоени полиња, а притоа е нарушен условот на задачата за средното поле во долниот ред, што е противречност. Значи, најмалиот можен број е $n=6$.

o	x	x	x	o
x	x	o	x	x
x	x	x	x	x
		x		

11. Дали е можно полињата на квадратна табла 16×16 да ги обоиме со жолта, сина, кафеава и зелена боја, така што секој правоаголник $a\times b$ $(a,b\geq 2)$, составен од полињата на таблата, да има барем две разнобојни аголни полиња?

Решение. Да, на пример:

ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с
с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к
к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с
с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к
к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з
з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з
з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к
к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з	к
к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж	з
з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з	ж
ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж	з
з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с	ж
ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с	с
с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж	с
с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж	ж
ж	с	с	ж	з	ж	з	к	к	з	з	к	с	к	с	ж

Оваа конструкција може да се добие со боење на темињата на правилен шеснаесетаголник (секое негово теме се идентификува со колона на таблата). Почетното боење соодветствува со боењето дадено во првиот ред на таблата, а секое следен ред (боење) се добива со ротација на боењето во насока на движењето на стрелката на часовникот. Бидејќи за секоја боја растојанијата меѓу последователните истобојни темиња се 1, 3, 2 (или обратно), добиваме дека еднобојните темиња се на растојанија 1, 2, 3, 4, 5, 6, при што секое растојание се среќава само по еднаш на секој чекор. Така за никоја боја не се појавува пар темиња, истовремено обоен во таа боја при различните фази на завртувањето, со што се обезбедува саканото боење на таблата.

12. На табла 10×20 неколку полиња се обоени во сина боја. Горјан може да ја расече таблата на правоаголници така што во секој правоаголник има по 5 сини полиња. Андреј може да ја расече таблата на правоаголници така што во секој правоаголник да има по 5 сини полиња. Дали може Филип да ја расече таблата на правоаголници така што во секој правоаголник да има по 7 сини полиња?

Решение. Таблата вкупно има $10\cdot 20=200$ полиња. Од расекувањето на Горјан следува дека бројот на сините полиња е делив со 6, а од расекувањето на Андреј следува дека бројот на сините полиња е делив со 5. Ако Филип може да ја расече таблата на правоаголници така што во секој правоаголник има по 7 сини полиња, тогаш бројот на сините полиња треба да е делив и со 7. Според тоа, бројот на сините полиња треба да е делив со $\mathrm{NZS}(5,6,7)=5\cdot 6\cdot 7=210$, што не е можно бидејќи таблата има 200 полиња, а бројот на сините полиња е помал или еднаков на вкупниот број полиња.

13. Во секое поле на табла со димензии $n\times n$ е запишан еден од броевите 0 и 1. Збирот на броевите во секој ред е 3. Збирот на броевите во секоја колона е 3. За секој правоаголник, составен од полињата на таблата, збирот на броевите запишани во полињата на темињата е помал или еднаков на 3. Определи ја најмалата можна вредност на n.

Решение. За секој ред да ги обележиме трите парови колони за кои во тој ред е запишан бројот 1. Од последниот услов следува дека даден пар колони не смее да биде обележан повеќе од еднаш. Вкупно за n редови тоа дава $3n$ парови колони и овој број не може да е поголем од бројот на паровите колони формиран од n колони, т.е. $3n\leq\frac{n(n-1)}{2}$, од каде следува $n\geq 7$. За $n=7$ постои табла со саканите својства и истата е прикажана на цртежот десно. Според тоа, најмалата можна вредност е $n=7$.

1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0

14. Во табла 3×3 се запишани реални броеви. Дозволено е броевите во произволен ред или произволна колона да се помножат со произволен реален број. Дали е можно по неколку такви множења од левата табла да се добие десната табла?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Решение. За секоја табла од видот

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

при извршувањето на дозволените операции вредноста на изразот $\frac{a_2b_3c_1}{b_1c_2a_3}$ не се менува (Докажи!). Вредноста на овој израз во левата табла е еднаква на $\frac{84}{96}$, а во десната табла е еднаква на $\frac{96}{84}$. Бидејќи $\frac{84}{96}\neq\frac{96}{84}$, заклучуваме дека од едната табла не може да се добие другата.

15. Во секое квадратче на шаховска 8×8 табла е ставен жетон. За два жетони ќе велиме дека се соседни, ако полињата во кои се наоѓаат имаат заедничка страна. Ги земаме сите жетони еден по друг во произволен редослед. Во моментот, кога земаме еден жетон, во квадратчето во кое се наоѓа го запишуваме бројот на неговите соседи, кои се уште се на таблата. Нека S е збирот на запишаните 64 броеви. Определи го S.

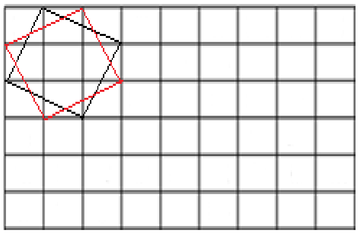
Решение. Да земеме дека секој жетон е поврзан со секој еден од соседните жетони со одделна врска. Во моментот, кога го земаме жетонот ние ги раскинуваме врските на тој жетони со неговите соседни жетони, а бројот кој го запишуваме во полето всушност е бројот на врските кои ги раскинуваме меѓу земениот жетон и во тој момент нему соседните жетони. Според тоа, збирот S кој треба да го определиме всушност е еднаков на бројот на врските меѓу жетоните поставени на таблата. Оттука следува дека не е важен редоследот на земање на жетоните и дека треба да ги преброиме врските меѓу жетоните.

Хоризонтално имаме 8 реда и во секој ред по 7 врски, а вертикално имаме 8 колони и во секоја колона по 7 врски. Затоа

$$S=8\cdot7+8\cdot7=112.$$

16. Правоаголник е поделен на 54 единечни квадратчиња. Страните на правоаголникот имаат должини поголеми од 3. Колку квадрати има со плоштина 5 и темиња меѓу темињата на единечните квадратчиња.

Решение. Бидејќи $54=2\cdot3^3$ и страните на правоаголникот имаат должини поголеми од 3, правоагоникот има димензии 6×9. Должината на страната на квадрат со плоштина 5 е $\sqrt{5}$, па како темињата на квадратите се меѓу темињата на малите квадратчиња, секој ваков квадрат лежи во квадрат 3×3 чии страни се паралелни на страните на правоаголникот (види цртеж).



Во правоаголникот има $4\cdot7=28$ квадрати со димензии 3×3 чии страни се паралелни на страните на правоаголникот, и во секој од нив има по два квадрати со плоштина 5 и темиња во темињата на малите квадрати (на горниот цртеж тоа се квадратите со црни и со црвени страни). Конечно, бараниот број квадрати е $2\cdot28=56$.

17. За фигурата F ќе велиме дека е сврзана, ако е составена од единечни квадратчиња, кои може да се обиколат со шаховскиот топ. Ако фигурата F се состои од 7 квадратчиња, докажи дека од шаховска табла 8×8 може да се исечат 4 фигури F.

Решение. Со математичка индукција ќе докажеме дека за секоја сврзана фигура F составена од n квадратчиња постои правоаголник со страни a и b, $a+b=n+1$, од кој може да се исече фигурата F. За $n=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој n и да разгледаме сврзана фигура F составена од $n+1$ квадратче. Ако од F отстраниме едно крајно квадратче, добиваме сврзана фигура F' составена од n квадратчиња. Според индуктивната претпоставка постои правоаголник со страни a и b, $a+b=n+1$, од кој може да се исече фигурата F'. Сега, со додавање на отстранетото квадратче може да се зголеми a или b најмногу за 1, т.е. F може да се исече од правоаголник $(a+1)\times b$ или $a\times(b+1)$, при што $a+b+1=(n+1)+1$, со индуктивниот доказ е завршен.

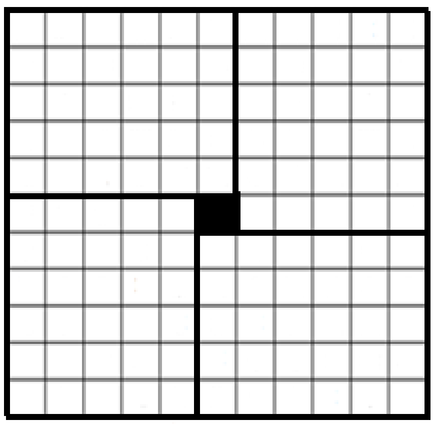
За $n=7$ фигурата F може да се смести во правоаголник 1×7, 2×6, 3×5 или 4×4. Во секој од овие случаи лесно се покажува дека од таблата 8×8 може да се исечат најмалку 4 правоаголници од соодветниот вид.

18. Од квадрат 23×23 е отстрането едно поле и остатокот е целосно покриен со квадрати 2×2 и 3×3. Кое поле е отстрането?

Решение. Да ги нумерираме редовите и колоните од 1 до 23 и да ги обоиме во сино парните редови и во жолто непарните. Разликата меѓу сините и жолтите полиња во квадратите 2×2 и 3×3 е 0 или ±3. Жолтите полиња во квадратот 23×23 се за 23 повеќе. Ако отстранетото поле е жолто, тогаш жолтите полиња ќе бидат за 22 повеќе, а овој број не е делив со 3. Значи, отстранетото поле треба да е сино (жолтите полиња ќе бидат за 24 повеќе од сините, а овој број е делив со 3).

Да ги обоиме редовите во бело, зелено, црвено, бело, зелено, црвено, ..., бело, зелено. Белите и зелените полиња се парен број, а црвените се непарен број. Квадрат 2×2 покрива по парен број полиња од два вида, а квадрат 3×3 покрива по еднаков број полиња од секој вид, па така не е можно отстранетото поле да е бело или зелено. Според тоа, отстранетото поле е црвено.

Споменатите две боења гарантираат дека отстранетото поле е во еден од редовите 6, 12 или 18. Аналогно, тоа е во една од колоните 6, 12 или 18. Останува да докажеме дека секое од овие девет полиња може да биде отстрането. Можеме да составиме правоаголник 5×6 од три квадрати 2×2 и два квадрати 3×3 под нив.



Да го обиколиме остранетото поле со четити правоаголници 5×6 при што формираме квадрат 11×11, цртеж десно. Остатокот од големиот квадрат можеме да го покриеме со правоагоници 5×6 и квадрати 6×6 (составени, на пример, од четири квадрати 3×3). Тие може да се поставуваат како одгоре, така и оддолу, како одлево, така и оддесно. Според тоа, отстранетото поле може да биде поставено на секое од посочените девет места, односно во пресекот на редовите и колоните чии редни броеви се деливи со 6.

19. Едно од полињата на квадратна табла 99×99 е црно, а преостанатите се бели. Нека P е бројот на правоаголниците, составени од полиња на таблата, кои го содржат црното поле. Да се определи кое е црното поле, при кое вредноста на P е најголема и да се определи таа вредност.

Решение. Секој правоаголник да го проектираме на две соседни страни на таблата. Еден правоаголник го содржи црното поле ако и само ако двете проекции ја содржат проекцијата на црното поле. Тоа значи дека треба да ја решиме следнава задача: Отсечка со должина 99 е поделена на една црна и 98 бели единечни отсечки. Определи го бројот на отсечките, составени од единечни отсечки, меѓу кои е црната отсечка.

Ако црната отсечка е во положба n (без ограничување $n\leq 50$), тогаш лесно се гледа дека:

- ако $d=1,2,...,n$, има d отсечки со дожина d,
- ако $d=n,...,100-n$, има n отсечки со должина d, и
- ако $d=100-n,...,99$, има $100-d$ со должина d.

Според тоа, најголем ќе биде бројот на отсечките кога $n=50$ и во овој случај имаме $1+2+3+...+49+50+49+...+2+1=50^2=2500$ отсечки. Конечно, најголемиот број на P е $2500^2=6250000$.

20. Секое поле на табла 9×9 е обоено со црвена или сина боја. За еден ред ќе велиме дека е претежно црвен ако има повеќе црвени отколку сини полиња, а за колона ќе велиме дека е претежно сина ако има повеќе сини отколку црвени полиња. Нека C е бројот на претежно црвените редови, а S е бројот на претежно сините колони.

а) Дали може да биде $C+S=18$?

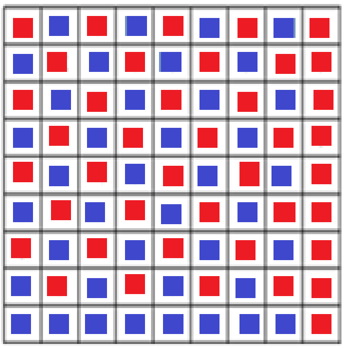
б) Дали може да биде $C+S=17$?

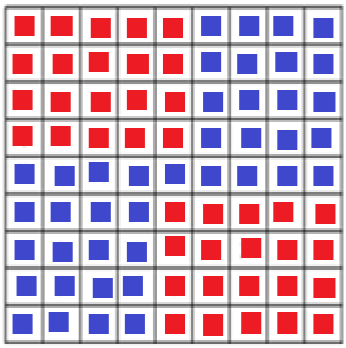
в) Дали може да биде $C+S=16$?

Решение. Таблата има 9 редови, па затоа бројот на претежно црвените редови не може да е поголем од 9, т.е. важи $C\leq 9$. Аналогно важи $S\leq 9$. Според тоа, $C+S\leq 18$.

Ако $C+S=18$, тогаш мора да важи $C=S=9$. Според тоа, секој ред е претежно црвен и секоја колона е претежно сина. Но, претежно црвените редови имаат најмалку по 5 црвени полиња, па затоа бројот на

црвените полиња мора да е поголем или еднаков на $9\cdot5=45$. Аналогно, бројот на сините полиња мора да е поголем или еднаков на $9\cdot5=45$. Значи, таблата содржи најмалку $45+45=90>9\cdot9=81$ полиња, што е противречност. Значи, не е можно да важи $C+S=18$.
Ако $C+S=17$, тогаш од $C\leq9$ и $S\leq9$ следува дека $C=9$ и $S=8$, или $C=8$ и $S=9$. Последното значи дека таблата мора да содржи најмалку $9\cdot5+8\cdot5=85>9\cdot9=81$ полиња, што е противречност.
Нека $C+S=16$. Тогаш или двата броја мора да се еднакви на 8 или едниот е 9, а другиот е 7. И во двата случаја не може да добиеме контрадикција како што тоа го направивме погоре, па затоа треба да се обидеме да конструираме пример во кој равенството е исполнето. На долните цртежи се дадени два примера на боење на таблата за кои важи $C+S=16$.





Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

МАТЕМАТИКА НА ПРАВОАГОЛНА ТАБЛА (ВТОР ДЕЛ)

Во првиот дел од оваа статија претежно разгледавме задачи со боење и покривање на табла со дадена димензија. Покрај тоа беа дадени и неколку задсачи поврзани со пресметувања во врска со броевите запишани во полињата на дадена табла. Во овој дел покрај што ќе презентираме неколку задачи поврзани со пресметувања на броевите запишани во полињата на дадена табла, ќе разгледаме и задачи со пресметување на бројот на боењата на табла при дадени услови.

21. Дадена е табла 2012×2012. Во секое поле од првата колона е запишан бројот 1, во секое поле од втората колона е запишан бројот 2 итн. во секое поле од 2012-тата колона е запишан бројот 2012. Потоа се избришани броевите на дијагоналата која ги поврзува горното лево и долното десно поле. Определи колку пати збирот на броевите над избришаната дијагонала е поголем од збирот на броевите под дијагоналата.

    Решение. За секое од разгледаните дијагонални полиња ќе ги пресметаме збирот на броевите запишани лево од него и збирот на броевите запишани над него. На пример, лево од полето во $k-$тиот ред и $k-$тата колона се броевите $1,2,...,k-1$ и нивниот збир е $\frac{k(k-1)}{2}$, а над него се запишани $k-1$ броеви, секој од кои е еднаков на k, па нивниот збир е еднаков на $k(k-1)$, т.е. е два пати поголем. Значи, збирот на броевите над дијагоналата е два пати поголем од збирот на броевите под дијагоналата.

22. Горјан ги пополнува полињата на табела 8×8 така што за секој i од 1 до 8 важи:
    - секој број во $i-$тиот ред е поголем или еднаков на i,
    - секој број во $i-$тата колона е поголем или еднаков на i.

    Определи го најмалиот можен збир на броевите кои ги запишал Горјан.

    Решение. Во осмиот ред и осмата колона се запишани вкупно 15 броја и сите мора да се еднакви на 8. Сега во седмиот ред и седмата колона остануваат 13 броја кои мора да се поголеми или еднакви на 7, па во шестиот ред и шестата колона остануваат 11 броеви кои мора да се поголеми или еднакви на 6 итн. Конечно, најмалиот можен збир на броевите кои ги запишал Горјан е

$$15\cdot 8+13\cdot 7+11\cdot 6+9\cdot 5+7\cdot 4+5\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 1=372.$$

23. Во полињата на 3×3 табла се запишани позитивни броеви. Производот на броевите во секој ред и во секоја колона е еднаков на 1, а производот на броевите во секој 2×2 квадрат е еднаков на 2. Кој број е запишан во централниот квадрат? Дади пример на таква табла.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Решение. Нека таблата има вид како што е на цртежот десно. Тогаш бидејќи производот на броевите во првите две колони е 1, а производот на броевите во левот долен квадрат е 2, добиваме дека $ab=\frac{1}{2}$. Аналогно се добива дека $cf=hi=dg=\frac{1}{2}$. Производот на овие четири пара е еднаков на $\frac{1}{16}$. Но, од условот на задачата следува дека производот на сите броеви запишани на таблата е еднаков на 1. Според тоа,

$$e=\frac{1}{abcdfghi}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16.$$

Пример на табла од саканиот вид е таблата во која

$$a=c=i=g=2 \text{ и } b=f=h=d=\frac{1}{4}.$$

24. Во секое поле на правоаголна табла е запишан број. За таблата ќе велиме дека е интересна, ако збирот на броевите во секој ред е еднаков и ако збирот на броевите во секоја колона е еднаков. Дали постои
а) интересна табла 3×5 во која се запишани броевите од 1 до 15,
б) интересна табла 4×5 во која се запишани броевите од 1 до 20.

1	15	4	9	11
10	7	6	12	5
13	2	14	3	8

Решение. а) Збирот на броевите од 1 до 15 е еднаков на $15\cdot 8=120$, па затоа ако постои интересна 3×5 табла, тогаш во секој ред збирот на броевите треба да е еднаков на $120:3=40$, а во секоја колона на $120:5=24$. Пример на ваква интересна табла е прикажан на цртежот десно.
б) Збирот на броевите од 1 до 20 е еднаков на $10\cdot 21=210$.Но, 210 не е делив со 4, па затоа броевите од 1 до 20 не може да се распоредат во

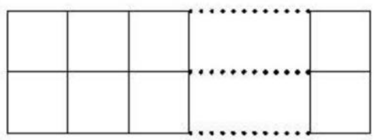
четири реда со еднакви збирови. Значи, не постои интересна табла 4×5 во која се запишани броевите од 1 до 20.

25. Нека $n\in\mathbb{N}$. На колку начини од квадратна табла со димензии $2n\times2n$ може да се отстранат две полиња така што преостанатиот дел од таблата може да се покрие со домина 2×1?

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски. Ако е можно таблата да се покрие со домина, тогаш отстранетите полиња се разнобојни. Обратно, нека отстранетите полиња се разнобојни. Не е тешко да се конструира затворена верига од соседни по страна полиња, која ја покрива целата табла. Оваа верига отстранетите полиња ја делат на две отворени вериги, секоја од кои започнува со бело и завршува со црно поле, па затоа секоја од овие вериги може да се покрие со домина. Тоа значи дека таблата од која се отстранети разнобојни полиња може да се покрие со домина.

Таблата има $4n^2$ полиња, од кои $2n^2$ се бели и $2n^2$ се црни. Според тоа, изборот на две разнобојни полиња може да се направи на $2n^2\cdot2n^2=4n^4$ начини.

26. Дадена е табла 2×2023. Секое поле од таблата треба да се обои во сина, зелена или црвена боја така, што секои две соседни полиња се разнобојни. На колку начини може да се обои таблата? (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)



Решение. Да почнеме да ја боиме таблата од првата колона од лево. Полето во првиот ред можеме да го обоиме на 3 начини, по што полето во вториот ред можеме да го обоиме на 2 начина. Според тоа, првата колона можеме да ја обоиме на $3\cdot2=6$ начина. Лесно се гледа дека за секое боење на првата колона втората колона можеме да ја обоиме на 3 начини. Понатаму, за секое боење на првата и втората колона третата колона можеме да ја обоиме на 3 начини итн. Конечно, таблата на опишаниот начин можеме да ја обоиме на

$$6\cdot3^{2022}=2\cdot3^{2023}.$$

27. На колку начини може да се обои секое поле на 3×3 табла во сина, црвена или зелена боја, така што соседните по страна полиња се

разнобојни?

Решение. Има три можности за централното поле. Нека тоа е сино. Тогаш сини полиња може да има само во аглите. Ако други сини полиња нема, тогаш за преостанатите полиња има 2 можни (шаховски) боења. Ако има уште 1 сино поле (од 4 можни), тогаш за преостанатите полиња полиња има 2 можни (шаховски) боења. Ако има уште 2 сини полиња (6 можни парови), тогаш за преостанатите полиња има $2^2=4$ можни боења. Ако има уште 3 сини полиња (4 можни тројки), тогаш за преостанатите полиња има $2^3=8$ можни боења. Ако има уште 4 сини полиња (сите аголни полиња), тогаш за преостанатите полиња има $2^4=16$ можни боења.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека има

$$3(2+4\cdot 2+6\cdot 2+4\cdot 8+16)=246$$

можни боења на саканиот начин.

28. На колку начини може да се обојат сите полиња на табла 3×3 со жолта, сина, зелена или црвена боја, така што соседните по страна полиња се разнобојни?

Решение. За централното поле на таблата има 4 можности. Нека тоа е сино. Тогаш други сини полиња може да се само аголните полиња. Ако има уште 1 сино поле (од 4 можности), тогаш за преостанатите 7 полиња има $3\times 2^6=192$ можности за боење. Ако има уште 2 сини полиња (6 можни парови), тогаш преостанатите 6 полиња се поделени во 2 групи за кои има $3^2\cdot 2^4=144$ можни боења. Ако има уште 3 сини полиња (4 можни тројки), тогаш преостанатите 5 полиња се поделени во 3 групи за кои има $3^3\cdot 2^2=108$ можни боења. Ако има уште 4 сини полиња (сите аголни полиња), тогаш за преостанатите полиња има $3^4=81$ можни боења. Ако други сини полиња нема, да видиме колку и каде се жолтите полиња. Ако жолти полиња нема, тогаш за осумте полиња има 2 можни (шаховски) боења во црвена и зелена боја. Ако има 1 жолто поле (од 8 можности), за преостанатите 7 полиња има 2 можни (шаховски) боења во црвена и зелена боја. Ако има 2 жолти полиња (од $\frac{8\cdot 5}{2}=20$ можни парови), преостанатите 6 полиња се поделени во 2 групи, за кои има $2^2=4$ можни боења. Ако има 3 жолти полиња (16 можни тројки), преостанатите 5 полиња се поделени во

три групи, за кои има $2^3=8$ можни боења. Ако има 4 жолти полиња (2 можни четворки), за преостанатите полиња има $2^4=16$ можни боења.
Конечно, од претходните разгледувања следува дека има
$4(4\cdot192+6\cdot144+4\cdot108+81+8\cdot2+20\cdot4+16\cdot8+2\cdot16)=4\cdot2401=9604$
можни боења на саканиот начин.

29. Во секое поле на табла со 2011 редови и 2012 колони е запишан еден од броевите 0, 1 и 2. Познато е дека збирот на броевите во секој ред и во секоја колона е делив со 3. Колку најмногу единици може да има запишано на таблата?

Решение. Нека на таблата се запишани n нули и d двојки. За да збирот на броевите во секој ред биде делив со 3, во него треба да има барем една двојка или две нули. Според тоа, $d+\frac{n}{2}\geq 2011$. Аналогно, во секоја колона има или барем две двојки или една нула, па затоа $n+\frac{d}{2}\geq 2012$. Ги собираме двете неравенства и добиваме

$$\frac{3}{2}(n+d)\geq 4023\text{, т.е. } n+d\geq 2682.$$

Значи, на таблата се запишани најмногу $2011\cdot2012-2682=4043450$ единици. Пример за добиената оценка конструираме на следниов начин: на таблата запишуваме 1342 нули и тоа по две во ред, почнувајќи од горниот лев агол (во 671 ред и 1342 колони) и 1340 двојки по две во колона, почнувајќи од долниот десен агол (во 1340 реда и 670 колони) а во другите полиња ставаме единици (вид цртеж)

0	0	1	1	…	1	1	1	…	…	1
1	1	0	0	…	1	1	1	…	…	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	1	1	1	…	0	0	1	…	…	1
1	…	…	…	…	…	1	2	1	…	1
1	…	…	…	…	…	1	2	1	…	1
1	…	…	…	…	…	1	1	2	…	1
1	…	…	…	…	…	1	1	2	…	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	…	…	…	…	…	1	1	1	…	2
1	…	…	…	…	…	1	1	1	…	2

30. Дали е можно да ги обоиме полињата на квадратна табла со димензии

19×19 во жолта, сина, кафеава и зелена боја така што секој правоаголник $a\times b\,(a,b\geq2)$ составен од полиња на таблата, да има барем две разнобојни аголни полиња?

Решение. Не. Да претпоставиме дека такво боење е можно. Нека во даден ред имаме j жолти, s сини, k кафеави и z зелени полиња. Бројот на еднобојни парови во тој ред е

$$\begin{aligned}\frac{j(j-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{z(z-1)}{2}&=\frac{j^2+s^2+k^2+z^2-19}{2}\\&\geq\frac{\frac{(j+s+k+z)^2}{4}-19}{2}\\&=\frac{19(19-4)}{8}\end{aligned}$$

и како овој број е природен, тој е поголем или еднаков на 36. Ако во еден ред има 4 полиња од една боја и по 5 полиња од другите три бои, тогаш овој број е точно $\frac{4\cdot(4-1)}{2}+3\cdot\frac{5(5-1)}{2}=36$. Непосредно може да се увериме дека тоа е единствениот случај во кој истобојните парови во еден ред се точно 36. Според тоа, во сите редови имаме најмалку $19\cdot36$ еднобојни парови позиции.

Од друга страна, ако саканото боење е можно, тогаш секој пар позиции може да се среќава најмногу во еден ред во секоја боја. Така еднобојните парови позиции од дадена боја се најмногу $\frac{19(19-1)}{2}=19\cdot9$. Вкупно за четирите бои имаме најмногу $4\cdot19\cdot9=19\cdot36$ еднобојни парови позиции. Но, претходно видовме дека еднобојните парови позиции се најмалку $19\cdot36$, па затоа имаме точно $19\cdot36$ еднобојни парови позиции. Според тоа, во секој ред мора да има 4 полиња обоени во една боја и по 5 полиња обоени во секоја од другите три бои. Нека r е бројот на редовите во кои има 4 кафеави полиња. Тогаш вкупниот број парови кафеави полиња во еден ист ред ќе биде еднаков на $r\cdot\frac{4(4-1)}{2}+(19-r)\cdot\frac{5(5-1)}{2}=2(95-2r)$ и тоа е парен број, па затоа не може да е еднаков на $19\cdot9$, што е противречност.

31. Правоаголник 20×21 е поделен на единечни квадрати, а потоа се расекува на квадрати чии темиња се во темињата на единечните квадрати. Определи го најмалиот можен број од добиените квадрати кои се со непарна страна.

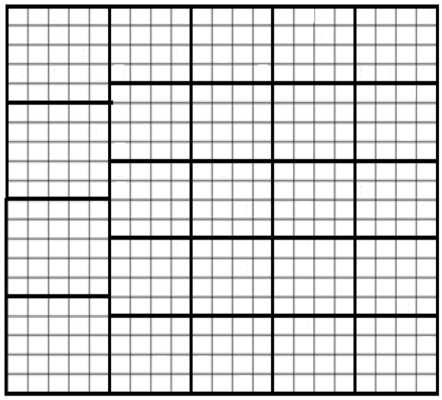
Решение. Плоштината на правоаголникот е парен број, квадрат чија страна е парен број има парна плоштина, а квадрат чија страна е непарен број има непарна плоштина. Затоа бројот на квадратите кои имаат непарна страна мора да е парен. Ако имаме два квадрати со непарни страни $a=2k+1$ и $b=2m+1$, тогаш нивната вкупна плоштина ќе биде

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 2k^2+4k+1+4m^2+4m+1 \\ &= 4(k^2+k+m^2+m)+2 \\ &= 4A+2. \end{aligned}$$

Оттука следува дека вкупната плоштина на квадратите кои имаат парни страни треба да е еднаква на

$$\begin{aligned} S &= 20\cdot 21-4A-2 \\ &= 4(104-A)+2, \end{aligned}$$

што не е можно бидејќи плоштината на секој од нив е делива со 4, а при делење на S со 4 се добива остаток 2. На цртежот десно е даден пример на поделба со 4 квадрати со непарни страни.



32. Од лист со квадратчиња 1×1 е исечен правоаголник со димензии 20×10. Правоаголникот е превиткуван по линиите на квадратната мрежа до добивање на 1×1 квадрат и овој квадрат е расечен по отсечка, која ги поврзува средините на две негови соседни страни. Колку делови може да се добијат на овој начин?

Решение. Ако листот се рашири, тогаш секое квадратче од мрежата ќе биде расечено по отсечка која поврзува средини на две негови соседни страни. По расекувањето на едно квадратче се определуваат расекувањата на преостанатите квадратчиња.

Лесно се гледа, дека за правоаголник $2n\times 2m$ се добиваат

$$(n+1)(m+1)+1,\ n(m+1)+1,\ (n+1)m+1 \text{ или } nm+1$$

делови. Во случајов $n=10, m=5$, па затоа имаме соодветно се добиваат 67, 56, 61 и 51 делови.

33. Квадрат 31×31 е поделен на квадрати 3×3 и 5×5, како и на $n\geq 0$ квадрати со помали димензии. Определи ја најмалата можна вредност

на n и видовите квадрати со помали димензии.

Решение. Да ги нумерираме редовите на квадратот и да запишеме -2 во полињата од 3, 6, 9, ..., 30 ред и 1 во преостанатите полиња. Збирот на сите запишани броеви е 31, збирот на броевите запишани во квадратите 3×3 и 5×5 е делив со 5, збирот на броевите во квадратите 2×2 е 4 или -2, а во квадратите 1×1 е бројот 1 или бројот -2. Според тоа, збирот на броевите кои ги покриваат квадратите од видот 3×3 и 5×5 е делив со 5, т.е. е од видот $5A$, па затоа збирот на броевите кои ги покриваат преостанатите квадрати е еднаков $31-5A$. Последното значи дека $n\geq1$ и лесно се гледа дека покривање може да има само кога имаме $n=1$ квадрат со димензии 1×1. Навистина, ако го поставиме квадратот 1×1 во центарот на квадратот 31×31, тогаш преостанатиот дел од правоаголникот го делиме на 4 правоаголници со димензии 15×16, а потоа секој од нив го делиме на два правоаголника 15×3 и два правоаголника 15×5, кои потоа лесно ги делиме на квадрати 3×3 и 5×5.

34. Квадратна табла 9×9 е шаховски обоена, при што аголните полиња се црни. На колку различни начини може да се постават 4 топа кои ќе ги напаѓаат сите бели полиња?

    Решение. Редовите и колоните на таблата да ги нумерираме со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. На таблата има $(81-1):2=40$ бели полиња. Еден топ може да напаќа најмногу 10 бели полиња, при што напаѓа точно 10 бели полиња само ако се наоѓа во парен ред и колона. Затоа за топовите треба да избереме различни парни колони од редовите 2, 4, 6 и 8, што може да се направи на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начини.

35. Квадратна табла $(2n+1)\times(2n+1)$ е шаховски обоена. Редовите и колоните се означено со броевите од 1 до $2n+1$ и полето (1,1) е црно. На колку начини може да се постават n топови кои ќе ги напаѓаат сите бели полиња?

    Решение. Имаме $((2n+1)^2-1):2=2n^2+2n$ бели полиња. Еден топ не може да напаѓа повеќе од $2n+2$ бели полиња, при што топот напаѓа точно $2n+2$ бели полиња ако и само ако се наоѓа во парен ред и парна колона. Значи, треба да избереме различни парни колон за тповите од редовите 2, 4, 6, ..., $2n$, за што има $n!$ начини.

36. Квадратна табла 8×8 е шаховски обоена. На колку различни начини може да се постават 4 топа кои ќе ги напаѓаат сите бели полиња?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека полето (1,1) е бело. На таблата има $64:2=32$ бели полиња. Еден топ може да напаѓа најмногу 8 бели полиња, при што топ напаѓа точно 8 бели полиња ако и само ако се наоѓа во црно поле. Бидејќи имаме 4 топа, секој топ напаѓа најмногу по 8 бели полиња и имаме 32 полиња, заклучуваме дека сите бели полиња ќе бидат нападнати ако и само ако секое бело поле е нападнато точно од еден топ. Сега, ако има топ Т1 на парен ред (и непарна колона) и топ Т2 на непарен ред, тогаш белото поле од редот на Т2 и колоната на Т1 ќе биде нападнато и од двата топа, што не е можно. Според тоа, броевите на редовите на сите четири топа имаат еднаква парност. Ако се парни, тогаш за секој топ треба да се изберат различни непарни колони, што е можно на $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ начини. Ако се непарни, аналогно има $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ начини. Според тоа, вкупниот број распореди е еднаков на $2\cdot 24=48$.

37. Квадратна табла 8×8 е поделена на 64 единечни квадратчиња со страна 1. Секое квадратче може да биде обоено црно или бело. Определи го бројот на боењата на таблата така што секој 2×2 квадрат има 2 бели и 2 црни квадратчиња.

Решение. Има 2^8 начини да се обои првата колона на таблата. Ако има две еднобојни квадратчиња едно до друго, тогаш еднозначно можеме да ја обоиме втората колона на таблата и аналогно да ги обоиме преостанатите колони. Значи, за такво боење на првата колона имаме еднозначно боење на таблата. Ако нема две еднобојни квадратчиња едно до друго, тогаш се менуваат бело со црно квадратче, за што има две можни боења на првата колона. Понатаму, во секоја колона исто така треба да се менуваат бело и црно квадратче, па затоа за такво боење на првата колона имаме 2^7 боења на таблата. Конечно, вкупно имаме

$$(2^8-2)\cdot 1+2\cdot 2^7=2\cdot 2^8-2=2^9-2=512$$

боења со саканото својство.

38. Квадрат со страна n е поделен на квадратчиња со страна 1. Определи го бројот на квадратите чии темиња се во темињата на делбените квадратчиња. Одговорот да се запише како полином од n.

Решение. Секој од бараните квадрати K може да се смести во единствен квадрат M, чии страни се паралелни со страните на најголемиот квадрат и минуваат низ темињата на K. Ако M има страна 1 (постојат n^2 такви квадрати), тогаш во него има 1 можен K, што дава $1\cdot n^2$ барани квадрати. Ако M има страна 2 (постојат $(n-1)^2$ такви квадрати), тогаш во него има 2 можни K, што дава $2(n-1)^2$ барани квадрати. Ако M има страна 3 (постојат $(n-2)^2$ такви квадрати), тогаш во него има 3 можни K, што дава $3(n-2)^2$ барани квадрати, итн. ако M има страна n (постои 1^2 таков квадрат), тогаш во него има n можни K. Според тоа, бараниот број квадрати е еднаков на

$$S(n)=1\cdot n^2+2\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-2)^2+...+n\cdot 1^2.$$

Збирот $S(n)$ всушност е еднаков на бројот на начините на кои во една зграда со $n+2$ ката може да се населат Горјан, Пабло, Андреј и Филип така што Горјан ќе живее на понизок кат од Пабло, но на повисок кат од Андреј и Филип. Навистина,

- ако Горјан е на 2-ри кат (пониско не може), тогаш Пабло има n избори на кат, а за Андреј и Филип имаат 1^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 3-ти кат, тогаш Пабло има $n-1$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 2^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 4-ти кат, тогаш Пабло има $n-2$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 3^2 избори на кат, итн.
- ако Горјан е на $(n+1)-$ви кат, тогаш Пабло има 1 избор на кат, а за Андреј и Филип има n^2 избори на кат,

Понатаму, Горјан, Пабло, Андреј и Филип може да живеат на три ката или на четири ката. Ако живеат на три ката, тогаш имаме $\binom{n+2}{3}$ можности, а ако живеат на 4 ката, тогаш изборот на катовите може да се направи на $\binom{n+2}{4}$ начини и за секој избор на кат имаме два можни распореди определени со тоа дали Андреј е на погорниот кат или Филип е на погорниот кат. Според тоа,

$$S(n)=\binom{n+2}{3}+2\binom{n+2}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3\cdot 2}+2\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4\cdot 3\cdot 2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{12}(2+n-1)=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

39. Квадрат со страна n е поделен на единечни квадратчиња. Да се определи збирот на плоштините на сите квадрати чии темиња се во темињата на делбените квадрачиња, а страните им се паралелни на страните на големиот квадрат. Одговорот да се запише како полином од n.

Решение. Имаме, n^2 квадрати со плоштина 1^2, $(n-1)^2$ квадрати со плоштина 2^2, $(n-2)^2$ квадрати со плоштина 3^2, итн. 1^2 квадрати со плоштина n^2. Според тоа, бараниот збир е

$$A(n)=1^2\cdot n^2+2^2\cdot(n-1)^2+3^2\cdot(n-2)^2+...+n^2\cdot 1^2.$$

Збирот $A(n)$ всушност е еднаков на бројот на начините на кои во една зграда со $n+2$ ката може да се населат Горјан, Пабло, Андреј, Филип и Матеј така што Горјан ќе живее на понизок кат од Пабло и Матеј, но на повисок кат од Андреј и Филип. Навистина,

- ако Горјан е на 2-ри кат (пониско не може), тогаш за Пабло и Матеј има n^2 избори на кат, а за Андреј и Филип има 1^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 3-ти кат, тогаш за Пабло и Матеј има $(n-1)^2$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 2^2 избори на кат,
- ако Горјан е на 4-ти кат, тогаш за Пабло и Матеј има $(n-2)^2$ избори на кат, а за Андреј и Филип има 3^2 избори на кат, итн.
- ако Горјан е на $(n+1)-$ви кат, тогаш за Пабло и Матеј има 1^2 избор на кат, а за Андреј и Филип има n^2 избори на кат,

Понатаму, Горјан, Пабло, Андреј, Филип и Матеј може да живеат на три ката или на четири ката или на пет ката. Ако живеат на три ката, тогаш имаме $\binom{n+2}{3}$ можности, при што Горјан живее на средниот кат, Пабло и Матеј на катот на него, а Андреј и Филип на катот под него. Ако живеат на 4 ката, тогаш изборот на катовите може да се направи на $\binom{n+2}{4}$ начини и за секој избор на катовите имаме 4 можни распореди определени со тоа дали Пабло и Матеј живеат на различни катови (2 распореди) или Андреј и Филип живеат на различни катови (2 распореди). Ако живеат на 5 ката, тогаш изборот на катовите може да се направи на $\binom{n+2}{5}$ начини и за секој начин имаме по 4 можни распореди (2 за Пабло и Матеј, 2 за Андреј и Филип). Според тоа,

$$\begin{aligned}A(n) &= \binom{n+2}{3} + 4\binom{n+2}{4} + 4\binom{n+2}{5}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3\cdot 2} + 4\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4\cdot 3\cdot 2} + 4\cdot\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{30}(5+5(n-1)+(n-2)(n-1))\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30}.\end{aligned}$$

40. Квадрат со страна n е поделен на единечни квадратчиња. Збирот на плоштините на сите квадрати чии темиња се во темињата на делбените квадрачиња, а страните им се паралелни на страните на големиот квадрат е $A(n)$. Колку од броевите $A(1), A(2), ..., A(99)$ се парни.

Решение. Според претходната задача имаме

$$A(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)}{30}.$$

Ако n е парен број или ако дава остаток 3 при делење со 4, тогаш броителот на $A(n)$ е делив со 4, па затоа $A(n)$ е парен број. Ако n при делење со 4 дава остаток 1, тогаш броителот на $A(n)$ не е делив со 4, па затоа $A(n)$ е непарен број. Понатаму, меѓу броевите 1, 2, 3, ..., 99 има 25 кои даваат остаток 1 при делење со 4, што значи дека $99-25=74$ од броевите $A(1), A(2), ..., A(99)$ се парни.

41. Во секое поле на табла 5×5 е запишан бројот 0. Во еден чекор е дозволено да се избере произволно поле на таблата и да се зголемат за 1 сите броеви запишани во тоа поле и во сите нему соседни полиња (две полиња се соседни ако имаат заедничка страна). По конечно многу чекори во сите полиња на таблата е запишан бројот n. Определи ги сите можни вредности за n.

Решение. Сите 25 полиња на таблата да ги поделиме во подмножества A, B, C, D, E, F како што е прикажано на левиот цртеж долу. Нека a, b, c, d, e, f е вкупниот број потези кои се реализирани на полињата на соодветното подмножество. Јасно е дека секој потез на поле од множеството:

- A влијае точно на две полиња од множеството B,
- B влијае точно на едно поле од секое од множествата A, C, D,
- C влијае на точно две полиња од секое од множествата B, E,
- D влијае на точно две полиња од множеството B и едно поле од

множеството E,

- E влијае на точно две полиња од множеството C и по едно поле од множествата D и F,
- F влијае на четири полиња од множеството E.

A	B	D	B	A
B	C	E	C	B
D	E	F	E	D
B	C	E	C	B
A	B	D	B	A

3	4	3	3	4
4	1	1	1	4
3	1	5	2	2
3	1	2	1	3
4	4	2	3	5

Според тоа, важат следниве равенства кои го опишуваат вкупниот број промени на полињата во назначеното множество:

$A:\ a+n=4n,$ $\qquad D:\ d+b+e=4n,$

$B:\ b+2a+2c+2d=8n,$ $\qquad E:\ e+2c+d+4f=4n,$

$C:\ c+b+2e=4n,$ $\qquad F:\ f+e=n.$

Решавајќи го овој систем равенки по непознати a,b,c,d,e,f, добиваме

$$a=\tfrac{16}{11}n,\ \ b=\tfrac{28}{11}n,\ \ c=\tfrac{4}{11}n,\ \ d=\tfrac{10}{11}n,\ \ e=\tfrac{6}{11}n,\ \ f=\tfrac{5}{11}n.$$

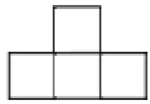
Но, $n\in\mathbb{N}$, па за да броевите a,b,c,d,e,f се природни потребно е $n=11k, k\in\mathbb{N}$. Овој услов е и доволен, што покажува распоредот на бројот на потезите на секое поле прикажан на горниот десен цртеж кога $k=1$ (за произволен број $k>1$ само бројот на потезите во десната табла се множи со k). Јасно, постојат и други можности да се постигне бројот $n=11k, k\in\mathbb{N}$.

Задачи за самостојна работа

1. Во полињата на табла 10×10 се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 100 и е пресметан збирот на броевите во секој ред. Се покажало дека збирот на броевите запишани во првиот ред е поголем од секој од преостанатите девет збира. Која е најмалата можна вредност на збирот на броевите запишани во првиот ред?

2. Во секое поле на табла со 4 реда и n колони е запишан по еден природен број. Збирот на броевите во секоја колона е еднаков на 20, а во секој ред броевите се различни. Определи ја најголемата можна вредност за n.

3. Во полињата на табла $n\times n$, $(n\geq 3)$ се запишани реални броеви, при што во секое $T-$ тетрамино (цртеж десно) независно од ориентацијата збирот на броевите е 4. Притоа не се сите броеви еднакви на 1. Определи го бројот n.



4. Во полињата на табла 2016×2016 се запишани броевите од 1 до 2016^2 во растечки редослед (секое поле содржи точно еден број), почнувајќи од горното лево поле и движејќи се по редовите одлево-надесно. Избрани се 2016 од овие броеви, така што од секој ред и секоја колона е избран точно по еден број. Определи ги сите можни вредности на збирот на избраните броеви.

5. Од квадрат 52×52 по линиите на делбените единечни квадратчиња се исечни 99 квадрати 3×3. Докажи дека може да се исече уште еден 3×3 квадрат.

6. На шаховска $n\times n$ табла се поставени $n-2$ жетони и t шаховски топови, така што никои два топа меѓусебно не се напаѓаат (ако меѓу два топа има жетон, тие два топа не се напаѓаат). Определи ја најголемата можна вредност на t.