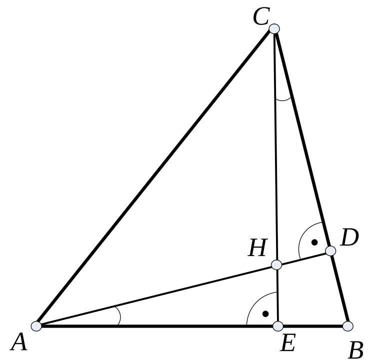
XXXV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. На која цифра завршува $1\cdot 2\cdot ...\cdot 99 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99$.

Решение. $1\cdot 2\cdot ...\cdot 99$ има една десетка во множењето и затоа зврщува на 0. Бројот $1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99$ е непарен бидејќи сите се непарни и има петка во производот, па затоа завршува на 5. Според тоа, дадениот производ $1\cdot 2\cdot ...\cdot 99 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 99$ завршува на 5.

2. Нека H е ортоцентар во остроаголен триаголник ABC и $\overline{AB} = \overline{CH}$. Одреди ја големината на аголот во темето C.



Решение. Аглите DAB и DCH се еднакви како агли со нормални краци, па правоаголните триаголници ABD и CHD се складни. Значи $\overline{AD} = \overline{CD}$, па правоаголниот триаголник ADC е рамнокрак , од каде аголот кај темето C е 45°.

3. Никола има 11 кутии со бонбони, при што во секоја кутија има 17 бонбони. Никола знае дека бонбоните во само една кутија се тешки 12 грама, додека во останатите кутии бонбоните се тешки 13 грама. Како со помош на само едно мерење на избаждарена вага ќе утврди која е кутијата со бонбони со маса 12 грама ?

Решение. Никола кутиите со бонбони ќе ги нумерира со броевите од 1 до 11. Од првата кутија ќе земе 1 бонбона, од втората кутија 2 бонбони, од третата кутија 3 бонбони, ... , од десетата кутија 10 бонбони и од единаесетата кутија нема да земе ниту една бонбона. Вкупниот број на земени бонбони е $1+2+3+4+5+6+7+8+9=55$ и ако сите се по 13 грама нивната тежина треба да биде $55\cdot 13 = 715$ грама. Ако оваа маса е измерена тогаш бонбоните од единаесетата кутија се по 12 грама. Ако е измерена друга маса помала од 715 грама, разликата на двете маси ќе го даде редниот број на кутијата со бонбони од 12 грама. На пример, ако вагата покаже 710 грама, тогаш петтата кутија е кутија со бонбони со маса 12 грама.

4. Природните броеви од 1 до 8 се ставаат во табела со 2 редици и 4 колони, така што збирот на броевите во секоја колона и во секоја редица треба да биде еднаков:

8	2	3	5
1	7	6	4

збирот во секоја колона е 9, а збирот во секоја редица е 18.

а) Дали може првите 10 природни броеви да се поставаат во табела со 2 редици и 5 колони, така што збирот на броевите во секоја колона да е ист и збирот на броевите во секоја редица да биде еднаков?

б) Дали може првите 12 природни броеви да се поставаат во табела со 2 редици и 6 колони, така што збирот на броевите во секоја колона да е ист и збирот на броевите во секоја редица да биде еднаков?

Решение. а) Збирот на првите 10 броеви е $1+2+3+\ldots+10=55$. Ако збирот во редиците е еднаков, на пример *k*, тогаш би добиле дека збирот на сите броеви во таблицата е парен број, *2k*. Затоа не е можно збирот на броевите во двете редици да е ист. Па бараниот распоред не постои.

б) Збирот на сите броеви во табелата е $1+2+3+\ldots+12=78$. Значи при можниот распоред, збирот во секоја колона ќе биде 13, а збирот во секоја редица ќе биде 39. Определи еден начин на пополнување на табелата.

5. Кожна фудбалска топка е шиена од делови од кожа во форма на правилни петаголници и правилни шестаголници. На топката има вкупно 32 парчиња кожа. Секое парче кожа во форма на петтаголник споено е по страните само со парчиња кожа во форма на шестаголник. Секое парче кожа во форма на шестаголник споено е по страните со 3 петаголници и со 3 шестаголници. Колку делови кожа има во форма на петаголник, а колку во форма на шестаголник?

Решение. Нека x е бројот на парчиња во форма на шестаголник. Според тоа, $32-x$ е бројот на парчиња кожа во форма на петаголник. Ако ги изброиме страните на петтоаголниците вкупно се $5(32-x)$. Бидејќи од друга страна и шестаголниците се граничат со 3 страни на петаголници, значи бројот на страни на петаголници е $3x$. Според тоа

$$3x=5(32-x) \Rightarrow 3x+5x=160 \Rightarrow x=20.$$

Значи, имало 20 шестаголници и 12 петтаголници.

VII одделение

1. Да се пресмета изразот од мешани броеви

$$895231755\frac{234}{357118}\cdot 895231754\frac{234}{357118}-895231756\frac{234}{357118}\cdot 895231753\frac{234}{357118}$$

Решение. Ако ставиме $a=895231755\frac{234}{357118}$, тогаш изразот што треба да се пресмета може да се запише на следниот начин:

$$a(a-1)-(a+1)(a-2)=a^2-a-(a^2-2a+a-2)=2,$$

па резултатот што се бара е 2.

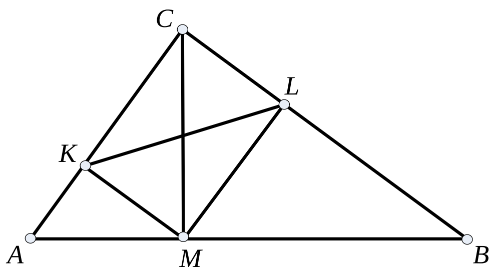
2. Колку единици има во записот на бројот $9+99+...+\underbrace{999...999}_{2010}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}9+99+...+\underbrace{999...999}_{2010}&=10-1+100-1+...+1\underbrace{000...000}_{2010}-1\\&=\underbrace{111...111}_{2010}0-2010\\&=\underbrace{111...111}_{2006}09100\end{aligned}$$

Значи во записот на бројот $9+99+...+\underbrace{999...999}_{2010}$ има 2007 единици.

3. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. M е точка на страната AB и K и L се подножјата на висините спуштени од M кон страните AC и BC, соодветно. Која точка треба да биде M за да растојанието $\overline{KL}$ да биде најмало.



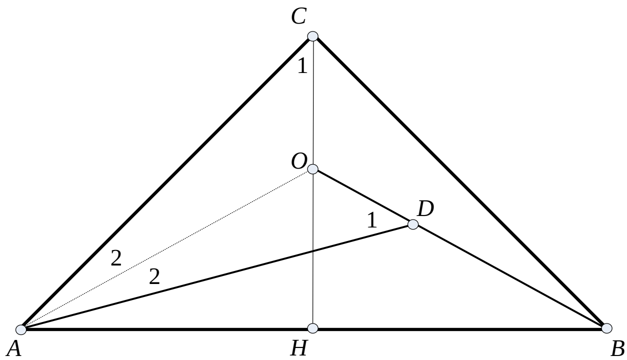
Решение. Да забележеме дека $MLCK$ е правоаголник. Па неговите дијагонали се еднакви. Па $\overline{CM}=\overline{KL}$. Отсечката CM е најмала кога е висина на триаголникот $\triangle ABC$. Зналчи, M треба да биде подножјето на висината спуштена од C.

4. Даден е лист во облик на правилен шестаголник со плоштина 2010 cm^2. Притоа Александар и Елена играат игра. Играта се состои во ставање на кружни парички со плоштина 1 cm^2 на листот на тој начин што паричките мора да бидат целосно во листот и не смеат да се преклопуваат. Прв почнува со ставање Александар. Победник во играта е оној кој што ќе стави последен паричка на листот. Докажи дека ако Александар игра добро, може да ја добие играта без разлика како ќе игра Елена.

Решение. Александар ја става првата паричка така што центарот на паричката ќе се совпадне со центарот на шестаголникот. Елена мора да стави паричка во слободниот простор, а Александар ја става неговата паричка на положбата која е централно симетрична на положбата од паричката на Елена во однос на центарот на шестаголникот. Така, ако има место на листот каде Елена ќе постави паричка, ќе има место и за наредната паричка која ќе ја стави Александар. По најмногу 2010 чекори играта мора да заврши и Александар е оној кој ќе стави паричка на листот последен, т.е. Александар ќе биде победник.

5. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот $\measuredangle ACB = 100^\circ$, дадена е точка D, таква што $\measuredangle BAD = 20^\circ$ и $\measuredangle ABD = 30^\circ$. Најди го $\measuredangle BCD$!

Решение. Нека со O го означиме пресекот на правата BD со висината CH. На таков начин го добиваме рамнокракиот $\triangle ABO$, со агли при основата од 30°. Од тоа заклучуваме дека $\measuredangle OAD = 10^\circ$, а бидејќи



$$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ \Rightarrow \measuredangle OAC = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ.$$

Аголот $\measuredangle ODA = 50^\circ$, како надворешен агол за $\triangle ABD$, а исто така и $\measuredangle ACO = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$. Следува дека $\triangle AOC \cong \triangle AOD$ (АСА), од каде што

$\overline{AC}=\overline{AD}$, односно $\triangle ACD$ е рамнокрак, со основа CD и агли при основата од 80° (бидејќи аголот при врвот е 20°).Тогаш за бараниот агол добиваме: $\measuredangle BCD=\measuredangle ACB-\measuredangle ACD=100^\circ-80^\circ=20^\circ$.

VIII одделение

1. Според бајката „Илјада и една ноќ“ девојката Шехерезада секоја ноќ на царот му раскажувала по 3 или по 5 приказни. Одреди го најмалиот и најголемиот број на ноќи во кои Шехерезада може да му раскаже точно 1001 приказна!

Решение. Ако x е бројот на ноќите во кои Шехерезада раскажувала по 3 приказни, а y е бројот на ноќите во кои раскажувала по 5 приказни, тогаш $3x+5y=1001$. Едно целобројно решение е $x_0=332, y_0=1$, па општото решение е $x=332-5t$ и $y=1+3t, t\in\mathbb{Z}$. Бидејќи

$$x\geq 0\Rightarrow 332-5t\geq 0\Rightarrow t\leq 66,4,$$

а од тоа што

$$y\geq 0\Rightarrow 1+3t\geq 0\Rightarrow t\geq -\tfrac{1}{3}, \text{ т.е. } -\tfrac{1}{3}\leq t\leq 66,4,$$

добиваме

$$t=0\Rightarrow x=332, y=1 \text{ и } t=66\Rightarrow x=2, y=199,$$

значи најмалиот број ноќи е $201=2+199$, а најголемиот е $333=1+332$.

2. Докажи дека важи неравенството

$$2^{2010}+3^{2010}<4^{2010}$$

Решение. Од $2<3$, се добива дека $2^{2010}<3^{2010}$. Од следува

$$2^{2010}+3^{2010}<3^{2010}3^{2010}=2\cdot 3^{2010}.$$

Доволно ќе биде да покажеме дека $2\cdot 3^{2010}<4^{2010}$. Заради $2=\frac{54}{27}<\frac{64}{27}=(\frac{4}{3})^3$ се добива дека

$$2\cdot 1<(\tfrac{4}{3})^3\cdot 1<(\tfrac{4}{3})^3\cdot(\tfrac{4}{3})^{2007}=(\tfrac{4}{3})^{2010}=\frac{4^{2010}}{3^{2010}}$$

што е исто со $2\cdot 3^{2010}<4^{2010}$

3. Дадена е квадратна 10×10 табела во која се запишани 100 природни броеви. Секој запишан број претставува аритметичка средина на сите свои соседни броеви. Докажете дека сите броеви во табелата се еднакви меѓу себе.

Решение. Нека u е најмалиот од сите броеви во табелата. Тој е аритметичка средина на 3 , 5 или 8 броеви од табелата во зависност од тоа каде се наоѓа во табелата. Ќе го разгледаме најопштиот случај кога u е аритметичка средина на 8 соседни броеви. Другите два случаи се аналогни. Нека соседните броеви се: *a, b, c, d, e, f, g, h*.
Тогаш

$$a+b+c+d+e+f+g+h=8u,$$

од каде

$$(a-u)+(b-u)+(c-u)+(d-u)+(e-u)+(f-u)+(g-u)+(h-u)=0$$

Но, по претпоставка *u* е најмалиот број од табелата, па затоа ниту еден број од заградите не може да биде негативен. Од овде сите броеви во

u	*a*								
c	*b*								
					a	*b*	*c*		
a	*b*				*h*	*u*	*d*		
u	*c*				*g*	*f*	*e*		
e	*d*								

заградите мора да се еднакви на 0, што е можно само ако тие се еднакви меѓу себе. Со повторување на ова размислување за останатиот дел од табелата се добива дека сите броеви во табелата се еднакви.

4. Во триаголникот ABC впишана е кружница што страната AB ја допира во точката P. Ако $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\overline{AP}\cdot\overline{PB}$ докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

Решение. Според условот на задачата имаме:

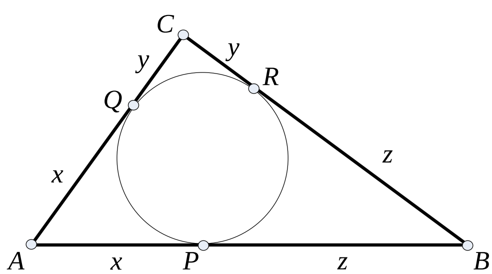
$$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\overline{AP}\cdot\overline{PB},$$

т.е.

$$(x+y)(y+z)=2xz.$$

Нека

$$2s=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC},$$



т.е.

$$2x+2y+2z=2s$$

од каде

$$x+y+z=s.$$

Од

$$x+(y+z)=s\text{, т.е } x+a=s \text{ следува } x=s-a,$$
$$y+(x+z)=s\text{, т.е } x+c=s \text{ следува } x=s-c,$$
$$z+(x+y)=s\text{, т.е } x+b=s \text{ следува } x=s-b.$$

Со замена во

$$(x+y)(y+z)=2xz$$

добиваме дека

$$ab=2(s-a)(s-b).$$

Ако ставиме $s=\frac{a+b+c}{2}$ имаме дека

$$ab=2(\tfrac{a+b+c}{2}-a)(\tfrac{a+b+c}{2}-b)=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2},$$

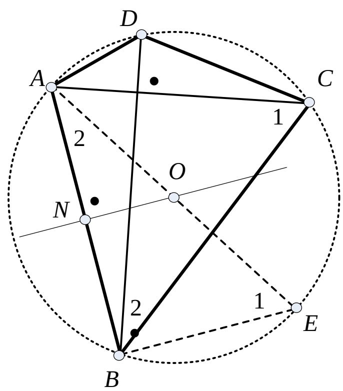
од каде се добива дека

$$c^2=a^2+b^2,$$

т.е. триаголникот ABC е правоаголен.

5. Во кружница со центар во точката O, впишан е четириаголник $ABCD$ со взаемно нормални дијагонали. Докажи дека точката O е оддалечена од страната AB колку половина од должината на страната CD.

Решение. Нека $\{M\}=AC\cap BD$ и по услов $AC\perp BD$. Нека $\{E\}=AO\cap k$. Тогаш од Талесова теорема $\measuredangle ABE=90^\circ$. Имаме и дека $\measuredangle AEB=\measuredangle ACB$ како два периферни агли над тетивата AB во кружницата k. Значи триаголниците $\triangle ABE$ и $\triangle BMC$ имаат два пара еднакви агли, т.е.



$$\measuredangle ABE=\measuredangle BMC=90^\circ$$
$$\measuredangle EAB=\measuredangle ACB=\measuredangle MCB$$
$$\measuredangle EAB=\measuredangle CBM=\measuredangle CBD$$

Ова се агли над тетивите BE и CD, па следува дека $\overline{BE}=\overline{CD}$.

Нека $\overline{ON}$ е растојанието од точката O до страната AB. При тоа, $ON \| BE$ и $\overline{OA} = \overline{OE} = r$ па ON е средна линија во $\triangle ABE$. Тоа значи дека $\overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ што и требаше да се докаже.