Осврт на један задатак са Олимпијаде и његову аналогију

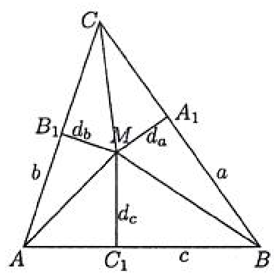
***Милорад Бељић*, Шабац**

Задатак 1. [ММО$-$1981] Из произвољне тачке M унутар датог троугла ABC спуштене су нормале MA_1, MB_1, MC_1 редом на странице BC, AC, AB. Наћи тачку M такву да збир

$$\frac{|BC|}{|MA_1|}+\frac{|CA|}{|MB_1|}+\frac{|AB|}{|MC_1|}$$

буде минималан.

Решење I. Означимо са a, b, c редом дужине страница BC, AC, AB троугла ABC, са d_a, d_b, d_c дужине нормала MA_1, MB_1, MC_1 редом, и нека је $F=\dfrac{a}{d_a}+\dfrac{b}{d_b}+\dfrac{c}{d_c}$.



Слика 1.

Лако добијамо да је $2P=ad_a+bd_b+cd_c$, где је P површина троугла ABC. Дакле,

$$\begin{aligned}2PF&=(ad_a+bd_b+cd_c)\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)\\&=a^2+b^2+c^2+\frac{abd_b}{d_a}+\frac{acd_c}{d_a}+\frac{abd_a}{d_b}+\frac{bcd_c}{d_b}+\frac{acd_a}{d_c}+\frac{bcd_b}{d_c}\\&=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{d_a}{d_b}+\frac{d_b}{d_a}\right)+bc\left(\frac{d_b}{d_c}+\frac{d_c}{d_b}\right)+ca\left(\frac{d_a}{d_c}+\frac{d_c}{d_a}\right).\end{aligned}$$

Из неједнакости $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2, x>0, y>0$, у којој знак једнакости важи ако и само ако је $x=y$, добијамо да је $2PF\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=4s^2$, при чему је s полуобим датог троугла. Како је $P=rs$, где је r полупречник уписане кружнице, имамо да је

$$F\geqslant\frac{4s^2}{2P}=\frac{4s^2}{2rs}=\frac{2s}{r}.$$

Збир F је минималан уколико је $d_a=d_b=d_c=r$, тј. када је M центар уписане кружнице. $\square$

Решење II. Уведимо ознаке: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle C_1AM = \alpha_1$, $\sphericalangle MAB_1 = \alpha_2$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle C_1BM = \beta_1$, $\sphericalangle MBA_1 = \beta_2$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle A_1CM = \gamma_1$ и $\sphericalangle MCB_1 = \gamma_2$. Тада је $\operatorname{ctg}\beta_2 = \dfrac{BA_1}{d_a}$ (посматрати правоугли троугао A_1MB) и $\operatorname{ctg}\gamma_1 = \dfrac{A_1C}{d_a}$ (посматрати правоугли троугао A_1MC). Из последње две једнакости добијамо $\dfrac{a}{d_a} = \operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\beta_2$. Ако овој једнакости додамо и следеће две аналогно добијене $\dfrac{b}{d_b} = \operatorname{ctg}\gamma_2 + \operatorname{ctg}\alpha_2$ и $\dfrac{c}{d_c} = \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_1$, добија се

$$\begin{aligned}
F = \frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} &= \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2 + \operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\gamma_2 \\
&= \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1} + \frac{\cos\gamma_2}{\sin\gamma_2} \\
&= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2} + \frac{\sin\beta}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2} + \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2} \\
&= \frac{2\sin\alpha}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{2\sin\beta}{\cos(\beta_1 - \beta_2) - \cos\beta} + \frac{2\sin\gamma}{\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos\gamma}
\end{aligned}$$

Збир F је минималан ако је сваки сабирак минималан, тј. ако су именици максимални, тј. $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1, \cos(\beta_1 - \beta_2) = 1$, $\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = 1$, односно $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Задатак 2. Из произвољне тачке M унутар датог тетраедра $ABCD$ спуштене су нормале MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 на стране BCD, ACD, ABD, ABC редом. Ако су P_A, P_B, P_C, P_D површине страна BCD, ACD, ABD, ABC редом, од свих тачака M наћи такву тачку да збир

$$\frac{P_A}{|MA_1|} + \frac{P_B}{|MB_1|} + \frac{P_C}{|MC_1|} + \frac{P_D}{|MD_1|}$$

буде минималан.

Решење. Нека су d_A d_B, d_C, d_D редом дужине дужи MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 и нека је

$$F = \frac{P_A}{d_A} + \frac{P_B}{d_B} + \frac{P_C}{d_C} + \frac{P_D}{d_D}.$$

Како је $3V = d_AP_A + d_BP_B + d_CP_C + d_DP_D$, при чему је V запремина тетраедра $ABCD$, имамо да је

$$\begin{aligned}
3VF &= (d_AP_A + d_BP_B + d_CP_C + d_DP_D)\left(\frac{P_A}{d_A} + \frac{P_B}{d_B} + \frac{P_C}{d_C} + \frac{P_D}{d_D}\right) \\
&= P_A^2 + P_B^2 + P_C^2 + P_D^2 + P_AP_B\left(\frac{d_A}{d_B} + \frac{d_B}{d_A}\right) + P_BP_C\left(\frac{d_B}{d_C} + \frac{d_C}{d_B}\right) \\
&\quad + P_CP_D\left(\frac{d_C}{d_D} + \frac{d_D}{d_C}\right) + P_DP_A\left(\frac{d_D}{d_A} + \frac{d_A}{d_D}\right).
\end{aligned}$$

Аналогно као у решењу првог задатка, закључујемо да је $3VF \geqslant (P_A+P_B+P_C+P_D)^2$, тј. да је

$$F \geqslant \frac{(P_A+P_B+P_C+P_D)^2}{r(P_A+P_B+P_C+P_D)} = \frac{P_A+P_B+P_C+P_D}{r},$$

при чему је r полупречник уписане сфере у тетраедар. Збир F има најмању вредност уколико је $a=b=c=d=r$, тј. ако је M центар уписане сфере. $\square$

Задаци

1. Нека су d_a, d_b, d_c редом растојања центра описане кружнице од страница BC, CA, AB троугла ABC. Ако су r и R полупречници уписане и описане кружнице, доказати неједнакости:

(а) $3r \leqslant d_a+d_b+d_c \leqslant 3\frac{R}{2}$, (б) $d_a^2+d_b^2+d_c^2 \leqslant 3\frac{R^2}{4}$,

(в) $d_a^n+d_b^n+d_c^n \geqslant 3\left(\frac{R}{2}\right)^n$, за сваки природан број n већи од 2.

2. (а) Доказати да за сваки правоугли троугао важи једнакост $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h_c^2}$, где су a и b дужине катета, а h_c дужина хипотенузине висине.

(б) У тетраедру $ABCD$ сва три угла код темена D су прави углови. Ако су a, b, c дужине ивица тетраедра које садрже теме D и H_D висина тетраедра из темена D на страну ABC, доказати једнакост $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{H_D^2}$.

3. (а) Ако су h_a, h_b, h_c висине троугла ABC, а r полупречник уписане кружнице у овај троугао, доказати једнакост $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

(б) Ако су H_A, H_B, H_C, H_D висине тетраедра редом из темена A, B, C, D на одговарајуће наспрамне стране, а r полупречник уписане сфере у овај тетредар, доказати једнакост $\frac{1}{H_A}+\frac{1}{H_B}+\frac{1}{H_C}+\frac{1}{H_D}=\frac{1}{r}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2006/07 година