XXXVIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII одделение – деветтолетка

1. Во едно училиште има 300 ученици и сите се занимаваат со по еден зимски и еден летен спорт. Преку летото 60% од нив се занимаваат со фудбал, а останатите 40% пливаат. Во текот на зимата учениците или скијаат или играат хокеј, но не и двата спорта истовремено. Со скијање се занимаваат 56% од оние ученици кои во лето играат фудбал, а 30% од фудбалерите преку зима играат хокеј. Одреди колку ученици се занимаваат со пливање и хокеј.

Решение. Во лето 180 ученици играат фудбал, а 120 пливаат. Од фудбалерите 30% во зима играат хокеј, т.е. $\frac{30\cdot 180}{100}=54$ ученици. Значи, останатите $180-54=126$ ученици кои играат фудбал во зима скијаат. Ако со x го означиме бројот на сите ученици кои во зима скијаат, тогаш $\frac{56x}{100}=126$, па $x=225$. Според тоа 75 ученици во зима играат хокеј. Бидејќи 54 ученици играат фудбал и хокеј, останува 21 ученик кој се занимава со пливање и хокеј.

2. Ако помеѓу цифрите на било кој двоцифрен број со еднакви цифри, се вметнат две нули, добиениот број е 91 пат поголем од дадениот. Докажи!

Решение. Нека $\overline{aa}=10a+a=11a$ е дадениот двоцифрен број. Новодобиениот четирицифрен број е

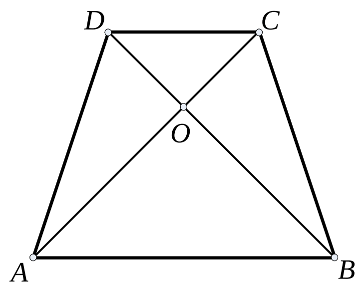
$$\overline{a00a}=1000a+100\cdot 0+10\cdot 0+a=1001a\,.$$

Јасно $\overline{a00a}:\overline{aa}=1001a:11a=91$, што требаше и да се докаже.

3. На секој од 25 листа хартија е запишан еден од броевите 1 или -1. Бројот -1 е запишан 13 пати. Дозволено е два листа да се отстранат и да се заменат со лист на кој е запишан производот на отстранетите броеви. Постапката се повторува 24 пати. Кој број е запишан на последниот лист хартија?

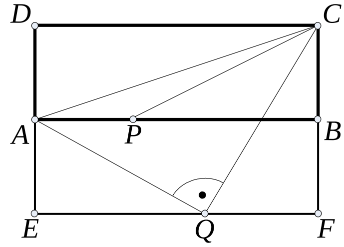
Решение. Ако се отстранат два листа на кои се запишани исти броеви, се додава лист со бројот 1. Ако се отстранат два листа со различни броеви се додава лист со бројот -1. Може да забележиме дека производот на сите броеви со изведување на постапката, со отфрлање на два броја и нивна замена со производот, не се менува. На почетокот имаме 13 негативни единици и 12 позитивни единици. Производот на сите броеви на почетокот е -1. Затоа и на крајот производот повторно ќе биде -1, односно мора да има непарен број од броевите -1, па последниот напишан број ќе биде -1.

4. Отсечките $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ се сечат во точката O. Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на периметарот на триаголникот ABD, а периметарот на триаголникот ACD е еднаков на периметарот на триаголникот BCD. Најди ја должината на отсечката $\overline{AO}$, ако $\overline{BO}=10$ см.



Решение. Бидејќи $L_{\triangle ABC}=L_{\triangle ABD}$ важи
$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{BD}$$
и бидејќи $L_{\triangle ACD}=L_{\triangle BCD}$, важи
$$\overline{AC}+\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{BD}.$$
Второто равенство го запишуваме како
$$\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{BD}-\overline{AD}$$
и го собираме со првото, па добиваме $2\overline{AC}=2\overline{BD}$, односно $\overline{AC}=\overline{BD}$. Значи $\overline{AD}=\overline{BC}$, па $\triangle ABD\cong\triangle ABC$, од каде $\measuredangle ABD=\measuredangle CAB$. Оттука, $\triangle AOB$ е рамнокрак, па $\overline{AO}=\overline{BO}=10$ см.

5. Даден е правоаголник $ABCD$ таков да $|AB|=3|BC|$. На станата AB дадена е точка P таква да $|AP|=\frac{1}{3}|AB|$. Докажи дека
$$|\measuredangle CAB|+|\measuredangle CPB|=45^\circ$$



Решение. Правоаголникот $ABCD$ го дополнуваме со на него складен правоаголник, како на сликата. Нека на $\overline{EF}$ избереме точка Q таква да $|EQ|=\frac{2}{3}|EF|$. Нека $|BC|=x$. Ги разгледуваме правоаголните триаголници AEQ и QFC. Бидејќи $|AE|=|QF|=x$ и $|EQ|=|CF|=2x$ имаме дека тие се складни. Од складноста следува дека

$$|AQ|=|CQ| \qquad (1)$$

односно

$$\measuredangle EAQ=\measuredangle CQF \quad \text{и} \quad \measuredangle EAQ=\measuredangle QCF \qquad (2)$$

па, од (1) и (2) имаме дека триаголникот AQC е рамнокрак правоаголен. Сега, бидејќи $|PB|=2x$ и $|BC|=x$, следува дека правоаголните триаголници PBC и AEQ се складни. Од складноста имаме $\measuredangle CPB=\measuredangle EQA$. Притоа $\measuredangle QAB=\measuredangle EQA$.

Конечно,

$$\measuredangle CAB+\measuredangle CPB=\measuredangle CAB+\measuredangle EQA=\measuredangle CAB+\text{в}QAB=\measuredangle QAC.$$

Бидејќи триаголникот QAC е рамнокрак правоаголен следува дека $\measuredangle QAC=45^\circ$.

VIII одделение – деветтолетка

1. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека:

$$(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4$$

Решение. Со непосредно пресметување добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})&=abc+\tfrac{ab}{c}+\tfrac{ac}{b}+\tfrac{bc}{a}+\tfrac{b}{ac}+\tfrac{c}{ab}+\tfrac{a}{bc}+\tfrac{1}{abc}\\&=1+\tfrac{abc}{c^2}+\tfrac{abc}{b^2}+\tfrac{abc}{a^2}+\tfrac{b^2}{abc}+\tfrac{c^2}{abc}+\tfrac{a^2}{abc}+1\\&=2+\tfrac{1}{c^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{1}{a^2}+b^2+c^2+a^2\\&=a^2+2+\tfrac{1}{a^2}+b^2+2+\tfrac{1}{b^2}+c^2+2+\tfrac{1}{c^2}-4\\&=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4.\end{aligned}$$

2. Ако природниот број x не е делив со 5, тогаш бројот x^4-1 е делив со 5. Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}x^4-1&=(x-1)(x+1)(x^2-4+5)=(x-1)(x+1)((x-2)(x+2)+5)\\&=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+5(x-1)(x+1).\end{aligned}$$

Ако x не е делив со 5 тогаш:

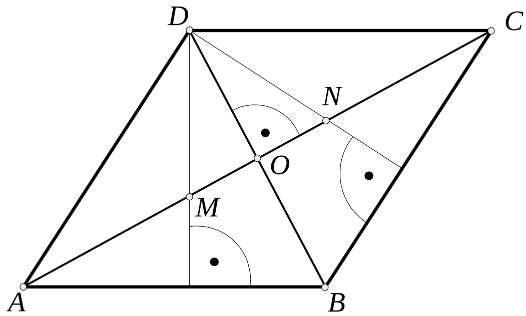
- ако $x=5k+1$, следува дека $x-1$ е делив со 5,

- ако $x=5k+2$ следува дека $x-2$ е делив со 5,
- ако $x=5k+3$ следува дека $x+2$ е делив со 5 и
- ако $x=5k+4$ следува дека $x+1$ е делив со 5,

па оттука следува дека x^4-1 е делив со 5.

3. Внатрешните агли на ромбот $ABCD$ се однесуваат како 1:2. Докажи дека висините на ромбот конструирани од темето на еден од тапите агли, ја делат поголемата дијагонала на три еднакви дела.

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите на ромбот. Аглите во ромбот се 60° и 120°. Тогаш ромбот се состои од два рамнострани триаголника $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$. Користејќи ги својствата на дијагоналите на ромбот и рамностраниот



триаголник, лесно се покажува дека точките M, N се тежишта на соодветните триаголници. Во секој триаголник, тежииштето ја дели тежишната линија во однос 2:1, од каде $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{AM},\ \overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{CN}$. Конечно, од $\overline{AM}=\overline{CN}$ следува

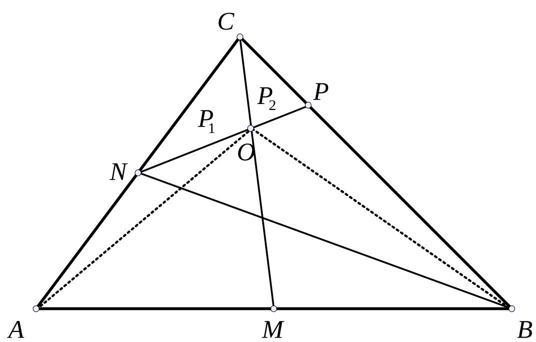
$$\overline{MN}=\overline{OM}+\overline{ON}=\tfrac{1}{2}(\overline{AM}+\overline{CN})=\overline{AM}=\overline{CN}.$$

4. Точките M и N се средини на страните AB и AC, соодветно, на триаголникот ABC. Точката P лежи на страната BC и важи $\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Правите CM и NP се сечат во точката O. Изрази ја плоштината на ΔOPC преку плоштината на ΔABC.

Решение. Нека $P_{\triangle ABC}=P$, $P_{\triangle OPC}=P_1$ и $P_{\triangle NOC}=P_2$. Од $\overline{CP}=\frac{1}{3}\overline{CB}$ следува

$$P_{\triangle CNP}=\tfrac{1}{3}P_{\triangle BNC}.$$

Но, BN е тежишна линија за $\triangle ABC$, па затоа



$$P_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}P.$$

Оттука добиваме дека

$$P_1+P_2=P_{\triangle CNP}=\frac{1}{6}P.$$

Понатаму, M е средина на AB па важи

$$P_{\triangle AMO}=P_{\triangle MOB} \text{ и } P_{\triangle AMC}=P_{\triangle MBC}.$$

Од тоа што O лежи на тежишната линија CM следува дека

$$P_{\triangle AOC}=P_{\triangle AMC}-P_{\triangle AMO}=P_{\triangle MBC}-P_{\triangle MBO}=P_{\triangle OBC}.$$

Бидејќи N е средина на AC следува дека $P_{\triangle AOC}=2P_{\triangle NOC}=2P_2$. Слично, $P_{\triangle OBC}=3P_1$. Значи, $3P_1=2P_2$. Оттука и од $P_1+P_2=\frac{1}{6}P$ добиваме дека $P_1+\frac{3}{2}P_1=\frac{1}{6}P$, т.е. $P_1=\frac{1}{15}P$.

5. Определи го најголемиот од броевите кои се добиваат со бришење на 100 цифри од бројот $12345678910111213...99100$, чии што цифри се природните броеви од 1 до 100 наредени од лево кон десно.

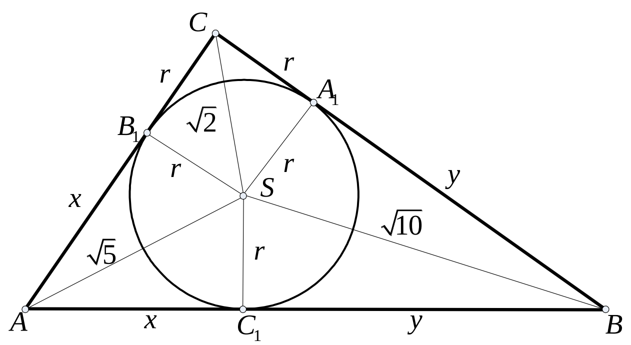
Решение. Постојат 0 едноцифрени броеви. Од 10 до 99 има 90 двоцифрени броеви. Значи дадениот број има $9+2\cdot 90+3=192$ цифри. После бришењето на 100 цифри треба да добиеме 92- цифрен број. За било кои два броеви со ист број на цифри, бројот со поголема прва цифра е поголем. Јасно е дека бројот што го бараме треба да почнува со што е можно повеќе 9-ки. Затоа, најпрво ги бришеме првит 8 цифри. Потоа ја бришеме низата од цифри 101112...181, која се состои од $9\cdot 2+1=19$ цифри. Слично, ги бришеме низите $202122...282$, $303132...383$, $404142...484$. Значи, избришани се $8+19\cdot 4=84$ цифри, а бројот кој што се добива е $999950515253...99100$. Потребно е да избришеме уште 16 цифри. Ако ја избришеме низата $505152...57$, која се состои од 16 цифри го добиваме бројот $9999958596061...99100$. Меѓутоа, најголемиот број го добиваме со бришење на низата $505152...565$, која се состои од 15 цифри, со тоа што следната цифра што ја бришеме не е 7 туку 5 од 58. Значи, бараниот број е $9999978596061...99100$.

VIII одделение – осмолетка

1. Нека a и b се заемно прости природни броеви. Докажи дека равенката $ax+by=ab$ нема решение во множеството на природни броеви.

Решение. Да претпоставиме дека равенката $ax+by=ab$ има решение во множеството на природни бреови. Равенката можеме да ја запишеме како $a(b-x)=by$. Бидејќи a и b се заемно прости, a е делител на y, односно $y=ka$. Аналогно, b е делител на x, па $x=mb$. Ако замениме во равенката на почетокот, добиваме $amb+bka=ab$, од каде $m+k=1$, што не може да биде точно за m и k природни броеви.

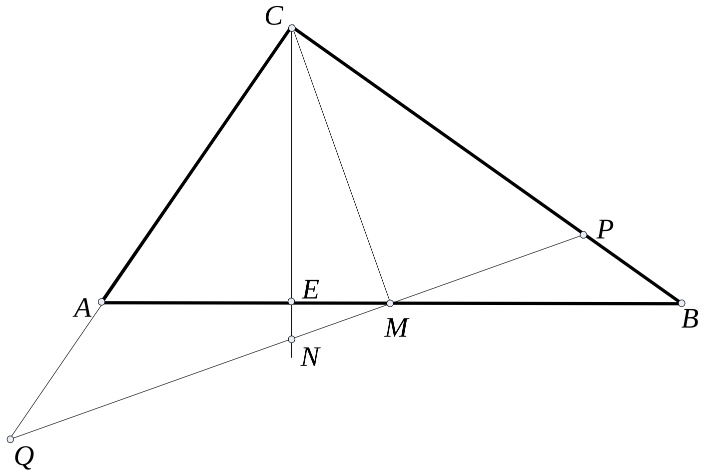
2. Во правоаголен триаголник ABC, $\gamma=90^\circ$, центарот на вписаната кружница е оддалечен од темињата A, B, C за $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{2}$ соодветно. Пресметај го радиусот на опишаната кружница на тој триаголник.



Решение. Нека C е центарот на впишана кружница, p е радиусот на впишана кружница, P е радиусот на опишана кружница, а A_1, B_1 C_1 се допирните точки на кружницата и триаголникот. Хипотенузата на правоаголен триаголник е дијаметар на опишана кружница, значи бараниот радиус е половина од хипотенузата. Исто така $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}$, $\overline{BA_1}=\overline{BC_1}$, $\overline{CA_1}=\overline{CB_1}$. При тоа од тоа што триаголникот е правоаголен, следува дека CB_1SA_1 е квадрат, т.е. $\overline{CA_1}=\overline{CB_1}=r$.Нека ги воведеме следниве ознаки $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=x$, $\overline{BC_1}=\overline{BA_1}=y$. Од правоаголните триаголници AB_1S, BC_1S, CA_1S, имаме $x^2+r^2=5$, $y^2+r^2=10$, $2r^2=2$. Од третата равенка следи дека $r=1$, од каде што $x=2, y=3$. Хипотенузата е $c=x+y=5$, а бараниот радиус е $R=\frac{5}{2}$.

3. Во правоаголен триаголник ABC низ средината M на хипотенузата AB повлечена е права нормална на CM која ги сече правите AC и BC во точките P и Q соодветно. Ако N е средината на отсечката PQ, докажи дека правите CN и AB се заемно нормални.

Решение. Нека со E го означиме пресекот на AB и CN. Јасно дека $\overline{AM}=\overline{CM}$ од што добиваме $\measuredangle MAC=\measuredangle ACM$. Бидејќи CM е нормална на PQ уште имаме $\measuredangle MPC=90^\circ-\measuredangle PCM=90^\circ-\measuredangle MAC=\measuredangle ABC$. Од ова се добива дека $\measuredangle PQC=\measuredangle BAC$. Бидејќи N е средина на PQ, $\measuredangle NCB=\measuredangle BAC$. Од овде се добива дека CN е нормална на AB.



4. Докажи дека помеѓу 11 природни броеви секогаш има шест чиј збир е делив со 6.

Решение. Помеѓу секои пет природни броеви, постојат три чиј збир е делив со три (од принципот на Дирихле, помеѓу произволни пет броеви секогаш има три кои даваат ист остаток при делење со три или има три броеви кои даваат различни остатоци при делење со 3). Тие формираат група броеви 1.

Броевите од групата 1 ги тргаме настрана од 11-те броја, а постапката се повторува со останатите осум броеви. Од нив произволно бираме пет. Меѓу нив постојат три чиј збир е делив со три и тие ја формираат групата броеви 2. Нив ги отстрануваме. Од последните пет броеви формираме трета група од три броја чиј збир е делив со 3.

Од трите групи од по три броја чии збирови се деливи со три, бираме две групи кои имаат збир со иста парност. Тие ја формираат бараната група од шест броја. Збирот на овие шест броја е делив со 2, а исто така и со 3, значи е делив со 6.

5. Околу тркалезна маса седнале неколку луѓе нумерирани во насока на стрелките на часовникот. Првиот од нив има 1-евро повеќе од вториот,

вториот има 1-евро повеќе од третиот итн, $n-1$ има 1-евро повеќе од $n-$от. Првиот дава на вториот 1-евро, вториот дава на третиот 1-евра итн., $n-1$ от дава на $n-$от $n-1$ евро и $n-$от дава $n-$евра на првиот. Играта продолжува од почеток (првиот дава 1-евро на вториот итн.) се додека е возможно. На крајот од играта се покажало дека еден од играчите имал четирипати повеќе евра од еден од неговите соседи. Колку луѓе седеле на масата и колку пари на почетокот од играта имал „најбедниот“ од нив?

Решение. Нека во играта учествувале $n-$луѓе, а „најбедниот” од нив, т.е $n-$от на почетокот од играта нека имал $x-$евра. Од условот на задачата по првиот „круг” на играта учесниците имале (по редот на нумерирање):

$$x+2n-2, x+n-3, ..., x+1, x, x-1 \text{ евра.}$$

Следува дека играта може да продолжи $x-$„кругови” после кој учесниците ќе имаат соодветно : $x+(x+1)(n-1), n-2, n-3, ..., 2, 1, 0$ евра. Од тоа што броевите $0, 1, 2, ..., n-2$ се последователни природни броеви само првиот може да има четири пати повеќе од својот сосед. Но, негови соседи се вториот и $n-$от. Од тоа што последниот има 0 евра на крајот од играта ја добиваме равенката:

$$x+(x+1)(n-1)=4(n-2) \Leftrightarrow x=\frac{3n-7}{n}=3-\frac{7}{n}$$

За $n=1$ се добива $x<0$ што е невозможно, па $n=7$ и $x=2$.