Медитеранска математичка олимпијада

24.04.2019 година

Задача 1. Во $\triangle ABC$, $\overline{AC}=b$ и $\overline{AB}=c$, отсечката $AD, (D\in BC)$ е симетрала на внатрешниот агол $\measuredangle A=60^{\circ}$. Нека r_B, r_C и r се радиусите на впишаните кружници во триаголниците $ABD,$ ADC и ABC, соодветно. Докажи дека

$$\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=2(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).$$

Решение. За должината на симетралата AD важи $\overline{AD}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\measuredangle A}{2}=\frac{bc\sqrt{3}}{b+c}$ **(1 п)**. Нека $h=\overline{AM}$ е должината на висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$. Од теоремата за симетралата на агол во триаголникот следува $\overline{BD}=\frac{ac}{b+c}$ и $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$ **(1 п)**. Нека $s=\frac{a+b+c}{2}$ и $s_{ABD}=\frac{\overline{BD}+\overline{DA}+\overline{AB}}{2}$ е полупериметарот на $\triangle ABD$. Имаме

$$r_B=\frac{P_{\triangle ABD}}{s_{ABD}}=\frac{h\cdot\overline{BD}}{2s_{ABD}}=\frac{h\cdot\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{AB}}=\frac{\frac{hac}{b+c}}{\frac{ac}{b+c}+\frac{bc\sqrt{3}}{b+c}+c}=\frac{ah}{2s+b\sqrt{3}}.$$

Аналогно се добива $r_C=\frac{ah}{2s+c\sqrt{3}}$ **(3 п).** Сега, ако се искористи дека $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\measuredangle A$ добиваме

$$\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=\frac{2s+b\sqrt{3}}{ah}+\frac{2s+c\sqrt{3}}{ah}=\frac{4s}{2P_{\triangle ABC}}+\frac{(b+c)\sqrt{3}}{2P_{\triangle ABC}}=\frac{2}{r}+\frac{(b+c)\sqrt{3}}{bc\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{r}+\frac{2(b+c)}{bc}=2(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}),$$ **(2 п)**

што и требаше да се докаже.

Задача 2. Нека $m_1 < m_2 < ... < m_s$ е низа од $s \geq 2$ природни броеви такви што ниту еден од нив не може да се запише како збир на два или повеќе различни членови на низата. Докажи дека

$$rm_r + m_s \geq (r+1)(s-1)$$

за секој $r \in \{1, 2, ..., s-1\}$.

Решение. За k, l такви што $0 \leq k \leq r$ и $k+1 \leq l \leq s$ ги разгледуваме збировите

$$T(k,l) = m_l + \sum_{i=1}^{k} m_i \ .$$

Ќе докажеме дека овие $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ збирови се по парови различни. Нека претпоставиме дека $T(k,l) = T(u,v)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $k \leq u$, па затоа последното равенство е еквивалентно со равенството

$$m_l = m_v + \sum_{i=k+1}^{u} m_i \ .$$

Но, според условот на задачата m_l не може да се запише какомзбир на два или повеќе различни членови на низата, па затоа од последното равенство следува $l = v$ и $k = u$, што значи дека збировите $T(k,l)$, $0 \leq k \leq r$ и $k+1 \leq l \leq s$ се по парови различни **(4 п)**. Бидејќи имаме $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ различни збирови, т.е. $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ различни природни броеви најголемиот од нив $T(r,s)$ мора да биде поголем или еднаков на $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$, **(1 п)**. Според тоа, ако земеме предвид дека од $m_1 < m_2 < ... < m_s$ следува $m_r - m_i \geq r - i$, т.е. $m_r - r + i \geq m_i$ за секој $r \in \{1, 2, ..., s-1\}$ и за секој $i \leq r$ **(1 п)**, добиваме

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq T(s,r) = m_s + \sum_{i=1}^{r} m_i \leq m_s + \sum_{i=1}^{r} (m_r - r + i)$$

т.е.

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq m_s + rm_r - r^2 + \frac{r(r+1)}{2}$$
$$rs + s - r \leq m_s + rm_r$$

(1 п), што и требаше да се докаже.

Задача 3. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви x, y, z такви што збирот на цифрите на декадниот запис на бројот $4x^4+y^4-z^2+4xyz$ е помал или еднаков на 2.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}4x^4+y^4-z^2+4xyz &= 4x^4+4x^2y^2+y^4-(z^2-4xyz+4x^2y^2)\\ &= (2x^2+y^2)^2-(2xy-z)^2 \qquad \textbf{(2 п)}\\ &= (2x^2+y^2-2xy+z)(2x^2+y^2+2xy-z).\end{aligned}$$

За множителите $A=2x^2+y^2-2xy+z$ и $B=2x^2+y^2+2xy-z$ важи $A+B=4x^2+2y^2$ **(1 п)**. Според тоа, ако за x, y и z можеме да избереме вредности такви што ќе важи $A=4x^2=4\cdot 5^{2n+2}$ и $B=2y^2=2\cdot 2^{2n}$, тогаш ќе имаме $AB=2\cdot 10^{2n+2}$, па збирот на цифрите на производот ќе биде еднаков на 2 **(2 п)**. Последното може да се направи бидејќи од $4x^2=A=2x^2+y^2-2xy+z$ добиваме $z=2x^2-y^2+2xy$ и за вака најдениот z важи

$$B=2x^2+y^2+2xy-z=2x^2+y^2+2xy-(2x^2-y^2+2xy)=2y^2 \quad \textbf{(1 п)}.$$

Сега за секој природен број n да земеме

$$x_n=5^{n+1},\ \ y_n=2^n \ \text{ и } \ z_n=2x_n^2+2x_ny_n-y_n^2=2\cdot 5^{2n+2}+10^{n+1}-4^n.$$

Тогаш: $2x_n^2+y_n^2-2x_ny_n+z_n=4x_n^2=4\cdot 5^{2n+2}$ и $2x_n^2+y_n^2+2x_ny_n-z_n=2y_n^2=2\cdot 4^n$, па затоа за секој природен број n важи $4x_n^4+y_n^4-z_n^2+4x_ny_nz_n=2\cdot 10^{2n+2}$, т.е. за секој природен број n збирот на цифрите на цифрите на $4x_n^4+y_n^4-z_n^2+4x_ny_nz_n$ е еднаков на 2 **(1 п)**.

Задача 4. Нека P е внатрешна точка на рамностран триаголник со висина 1. Ако x, y, z се растојанијата од P до страните на триаголникот, тогаш

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz.$$

Докажи!

Решение. Познато е дека во рамностран триаголник збирот на растојанијата од секоја внатрешна точка P на триаголникот до страните на триаголникот е еднаков на висината на триаголникот. Според тоа, треба да докажеме дека ако x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$, тогаш важи

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz. \quad \textbf{(1 п)}$$

Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$xy+yz+zx=(xy+yz+zx)(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} \cdot 3\sqrt[3]{xyz}=9xyz, \qquad (*)$$

па затоа

$$xy+yz+zx-3xyz \geq 6xyz. \quad \textbf{(1,5 п)}$$

Сега од последното неравенство следува

$$\begin{aligned} &xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y) \geq 6xyz, \\ &xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-6xyz \geq 0. \end{aligned} \quad \textbf{(1,5 п)}$$

Понатаму, ако земеме предвид дека $(x+y+z)^2=(x+y+z)^3=1$, тогаш од последното неравенство следува неравенството

$$(x+y+z)^2+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-6xyz \geq (x+y+z)^3 \quad \textbf{(1 п)}$$

кое последователно е еквивалентно со неравенството

$$x^2+y^2+z^2+2xy(1-z)+2yz(1-x)+2zx(1-y)+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geq (x+y+z)^3$$

$$x^2+y^2+z^2+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x) \geq (x+y+z)^3$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz. \quad \textbf{(1 п)}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во (*), т.е. ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$ и во овој случај точката P е тежиштето (ортоцентарот, центарот на опишаната и вписаната кружица) на триаголникот. **(1 п)**

XXII MMC 2019

Problem 1

In the triangle *ABC*, in which $\angle A = 60^{o}$, $D \in (BC)$ is such that AD is the internal bisector of angle $\angle A$. Let it be r_B, r_C and r, respectively, the inradiuses of the triangles *ABD*, *ADC* and *ABC*. Show that

$$\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

where b and c are the lengths of the sides *AC* and *AB* of the triangle *ABC*.

<u>Solution</u>

It is well known that $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{bc\sqrt{3}}{b+c}$. Let $h=AM$ be the lenght of the altitude from A in the triangle ABC. From the theorem of the internal bisector we get $BD=\frac{ac}{b+c}, CD=\frac{ab}{b+c}$.

Let $p_{ABD}=\frac{BD+DA+AB}{2}$ the half perimeter of triangle ABD. If we denote [ABD] the surface of the triangle ABD, from $r_B=\frac{[ABD]}{p_{ABD}}=\frac{h\cdot BD}{2\cdot p_{ABD}}=\frac{h\cdot BD}{BD+AD+AB}=\frac{\frac{h\cdot ac}{b+c}}{\frac{ac}{b+c}+\frac{bc\sqrt{3}}{b+c}+c}=\frac{ah}{2p+\sqrt{3}\cdot b}$.

Analogously we get $r_C=\frac{ah}{2p+\sqrt{3}\cdot c}$, where $p=\frac{a+b+c}{2}$.

From this we have $\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=\frac{2p+b\sqrt{3}}{ah}+\frac{2p+c\sqrt{3}}{ah}=\frac{4p(b+c)\sqrt{3}}{2[ABC]}=\frac{2}{r}+\frac{(b+c)\sqrt{3}}{bc\sin\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ and we are done.■

Problem 2

Let $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$ be a sequence of $s \geq 2$ positive integers, none of which can be written as the sum of (two or more) distinct other numbers in the sequence. For every integer r with $1 \leq r < s$, prove that

$$r \cdot m_r + m_s \;\geq\; (r+1)(s-1).$$

Solution

For k, ℓ with $0 \leq k \leq r$ and $k+1 \leq \ell \leq s$, we introduce the auxiliary value

$$T(k,\ell) \;:=\; m_\ell + \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

We claim that these $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ auxiliary values are all pairwise distinct: Let us assume that $T(k,\ell) = T(u,v)$. Without loss of generality $k \leq u$, so that this equality turns into

$$m_\ell \;=\; m_v + \sum_{i=k+1}^{u} m_i.$$

But then m_ℓ can be written as a sum of distinct other numbers in the sequence, unless $\ell = v$ and $k = u$ holds. Hence the auxiliary values indeed are distinct. As altogether there are $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ auxiliary values, the largest value $T(r,s)$ must be at least $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$. This yields

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \;\leq\; T(r,s) \;=\; m_s + \sum_{i=1}^{r} m_i \;\leq\; m_s + \sum_{i=1}^{r} (m_r - r + i).$$

Here we used $m_i \leq m_r - r + i$, which follows as the sequence is increasing. The above inequality can be rewritten into

$$rs + s - r \;\leq\; r \cdot m_r + m_s,$$

which immediately implies the desired inequality from the problem statement.

Problem 3

Prove that there exist infinitely many positive integers x, y, z for which the sum of the digits in the decimal representation of $4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz$ is at most 2.

Solution

This is an easy problem with many solutions. We rewrite

$$\begin{aligned} 4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz &= (4x^4 + y^4 + 4x^2y^2) - (4x^2y^2 + z^2 - 4xyz) \\ &= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy - z)^2 \\ &= (2x^2 + y^2 - 2xy + z)(2x^2 + y^2 + 2xy - z) \end{aligned}$$

The two factors $A = 2x^2 + y^2 - 2xy + z$ and $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - z$ add up to $A + B = 4x^2 + 2y^2$. If we choose the values of x and y so that $A = 4x^2 = 4 \cdot 5^{2n+2}$ and $B = 2y^2 = 2 \cdot 2^{2n}$, then the product will become $AB = 2 \cdot 10^{2n+2}$ and the sum of the digits will equal 2.

Summarizing, we pick an integer $n \geq 1$ and set $x = 5^{n+1}$ and $y = 2^n$. The desired equation $A = 4x^2$ is equivalent to $2x^2 + y^2 - 2xy + z = 4x^2$, and hence

$$z = 2x^2 + 2xy - y^2 = 2 \cdot 5^{2n+2} + 10^{n+1} - 4^n.$$

Note that z indeed is a positive integer. As the described choice of x, y, z then yields

$$4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz = 2 \cdot 10^{2n+2},$$

the proof is complete.

Problem 4

Let P be an interior point to an equilateral triangle of altitude one. If x, y, z are the distances from P to the sides of the triangle, then prove that

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz.$$

Solution. It is well-known that in an equilateral triangle the sum of the distances from an interior point P to its sides equals the altitude of the triangle, as can be easily proven. On account of the preceding, we have to prove that if $x+y+z=1$ then it holds that

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz$$

To do it, we begin observing that when $x+y+z=1$, then

$$xy+yz+zx \geq 9xyz$$

Indeed, applying AM-GM inequality, we get

$$xy+yz+zx=(xy+yz+zx)(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} \cdot 3\sqrt[3]{xyz}=9xyz$$

or

$$xy+yz+zx-3xyz \geq 6xyz$$

On account of the constrain and the preceding inequality, we obtain

$$\begin{aligned} xy+yz+zx-3xyz &= xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y) \\ &= xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \\ &\geq 6xyz \end{aligned}$$

Adding 1 to both terms of the last inequality and reordering terms, yields

$$(x+y+z)^2+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-6xyz \geq 1$$

or equivalently,

$$x^2+y^2+z^2+2xy(1-z)+2yz(1-x)+2zx(1-y)+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geq 1,$$

and

$$x^2+y^2+z^2+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x) \geq 1=(x+y+z)^3$$

from which

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz$$

follows. Equality holds when $x=y=z=1/3$. That is, when P is the centroid of the triangle, and we are done.