Републички натпревар 1988

I година

1. Нека A и B се два природни броја кои имаат исти цифри. Ако $A+B=10^{10}$, да се докаже дека A е делив со 10.

Решение. Бидејќи 10^{10} е најмалиот природен број со 11 цифри, следува дека A и B се десетцифрени броеви. Нека $A=\overline{a_{10}a_9...a_2a_1}$ и $B=\overline{b_{10}b_9...b_2b_1}$. Од $A+B=10^{10}$, следува дека постои некој $i\in\{1,2,3,...,10\}$, таков што:
$a_1+b_1=0$, $a_2+b_2=0,\ldots, a_{i-1}+b_{i-1}=0$, $a_i+b_i=10$, $a_{i+1}+b_{i+1}=9,\ldots, a_{10}+b_{10}=9$.
Бидејќи цифрите на A и B се еднакви, сумирајќи ги горните равенства, добиваме:

$$2(a_1+a_2+...+a_9+a_{10})=10+9(10-i),$$

при што искористивме дека $a_1+a_2+...+a_9+a_{10}=b_1+b_2+...+b_9+b_{10}$. Од тоа што $2(a_1+a_2+...+a_9+a_{10})$ е парен број следува дека и $10-i$ е парен, т.е. $i\neq 1$. Значи $a_1+b_1=0$, од каде што следува дека $a_1=b_1=0$. Според тоа A (а исто така и B) е делив со 10.

2. Даден е триаголник ABC и во него произволна точка M. Нека правите MA, MB, MC ги сечат страните BC, AC и AB соодветно, во точките P,Q,R. Докажи дека меѓу односите $\overline{AM}:\overline{MP}$, $\overline{BM}:\overline{MQ}$ и $\overline{CM}:\overline{MR}$ има барем еден не поголем од 2 и барем еден не помал од 2.

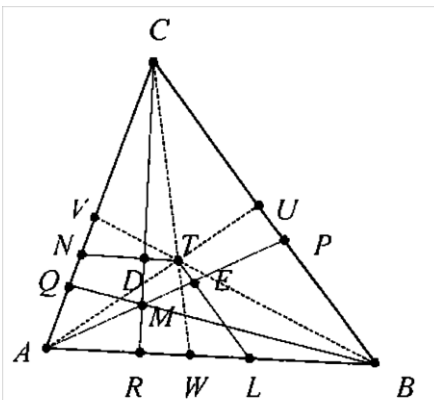
Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот $\triangle ABC$ и нека U,V,W се соодветно средините на страните BC, CA и AB. Ако $M\equiv T$, тогаш $P\equiv U$, $Q\equiv V$, $R\equiv W$, па $\overline{AM}:\overline{MP}=\overline{AT}:\overline{TU}=2:1=2$.

Нека $M\neq T$. Да ги разделиме страните CA и AB во однос $2:1$ со точките N и L соодветно (цртеж десно). Тогаш $TN\,||\,AB$ и $TL\,||\,BC$. Правата CR ја сече TN во точка D што се наоѓа меѓу C и M, од каде што следува дека

$$\overline{CM}:\overline{MR}\geq\overline{CD}:\overline{DR}=2:1=2.$$

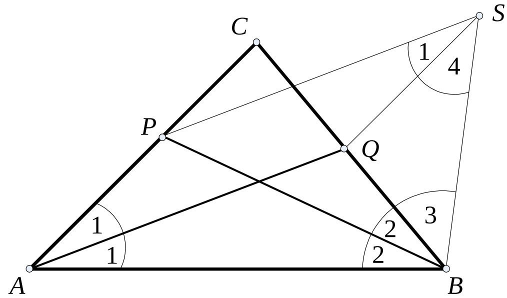
Аналогно, AP ја сече TL во точка E која е меѓу M и P, па според тоа

$$\overline{AM}:\overline{MP}\leq\overline{AE}:\overline{EP}=2:1=2.$$



3. Да се докаже дека ако должините на симетралите на два внатрешни агли на триаголник се еднакви, тогаш триаголникот е рамнокрак.

Решение. Нека AP е симетралата на аголот кај темето A, а BQ симетралата на аголот кај темето B (види цртеж). Според условот на задачата $\overline{AP} = \overline{BQ}$. Треба да се докаже дека $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC$. Да претпоставиме дека важи спротивното, т.е. дека $\measuredangle CAB \neq \measuredangle ABC$. Без губење на општост, можеме да претпоставиме дека $\measuredangle CAB < \measuredangle ABC$. Тогаш $\measuredangle 1 < \measuredangle 2$ (види цртеж). Триаголниците ABQ и BAP имаат по две еднакви страни, т.е. $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\overline{BQ} = \overline{AP}$, па од $\measuredangle 1 < \measuredangle 2$ следува дека $\overline{AQ} > \overline{BP}$. Нека S е точка, таква што $APSQ$ е паралелограм (види цртеж). Тогаш од $\overline{BP} < \overline{AQ} = \overline{PS}$, следува дека $\measuredangle 3 > \measuredangle 4$ (види цртеж), па затоа



$$\measuredangle QBS = \measuredangle 2 + \measuredangle 3 > \measuredangle 1 + \measuredangle 4 = \measuredangle BSQ.$$

Оттука се добива дека $\overline{AP} = \overline{QS} > \overline{BQ}$, што е спротивно со условот $\overline{AP} = \overline{BQ}$.

4. Да се докаже дека природен број z не може да се запише на два различни начини во вид $z = x! + y!$, каде што x и y се природни броеви кои го задоволуваат условот $x \leq y$.

Решение. Нека x_1, y_1, x_2, y_2 се природни броеви за кои $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ и $z = x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$ и нека $x_1 < x_2$. Ако $y_1 < x_2$, тогаш би имале

$$z = x_1! + y_1! < x_2! + x_2! \leq x_2! + y_2! = z,$$

т.е. $z < z$ што не е можно. Значи, $y_1 \geq x_2$. Тогаш $x_2 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$, па според тоа $x_2! + y_2! - y_1!$ е делив со $x_2!$. Бидејќи $x_2! + y_2! - y_1! = x_1!$, следува дека $x_1!$ е делив со $x_2!$, што значи дека $x_1 \geq x_2$, што противречи на претпоставката $x_1 < x_2$. Симетрично, претпоставката $x_2 < x_1$ води до противречност. Значи, $x_1 = x_2$, а од $x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$ следува дека и $y_1 = y_2$.

II година

1. Да се реши равенката $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Решение. Воведувајќи смени $y = \sqrt[3]{2-x}$ и $z = \sqrt{x-1}$, го добиваме системот равенки $y^3 + x = 2$, $z^2 + 1 = x$, $y + z = 1$. Од првата и втората равенка добиваме

$y^3+z^2=1$. Заменуваме $z=1-y$ и добиваме $y(y^2+y-2)=0$. Решенија на $y^3+y^2-2y=0$ се $y_1=0$ и $y_{2/3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$, т.е. $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-2$. Од $x=2-y^3$, се добиваат бараните решенија $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=10$.

2. Докажи дека постојат само конечно многу подредени тројки $(x-y, y-z, z-x)$ комплексни броеви кои ги задоволуваат равенствата

$$x(x-1)+2yz=y(y-1)+2xz=z(z-1)+2xy.$$

Решение. Нека $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$. Тогаш

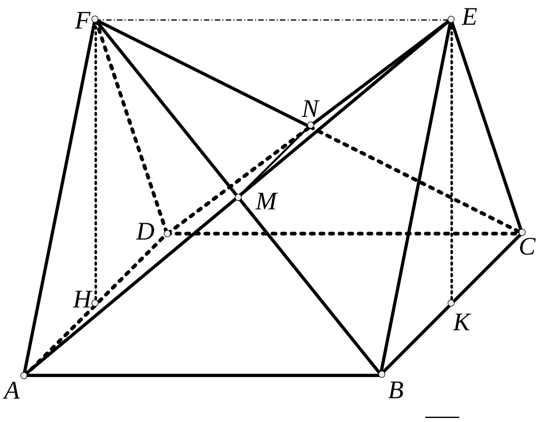
$$x=a+y,\ z=y-b,\ c=-(a+b),$$

па равенствата од задачата се трансформираат во: $a^2-a=-2ab=b^2+b$. Ако $a\neq 0$, тогаш $b=\frac{1-a}{2}$, па со решавање на равенката $a^2-a=(\frac{1-a}{2})^2+\frac{1-a}{2}$, се добива $a=1$ или $a=-1$, од каде што ги добиваме тројките $(1,0,-1)$ и $(-1,1,0)$. Ако $a=0$, тогаш од $b^2+b=0$, се добива $b=0$ или $b=-1$, со што ги добиваме тројките $(0,0,0)$ и $(0,-1,1)$.

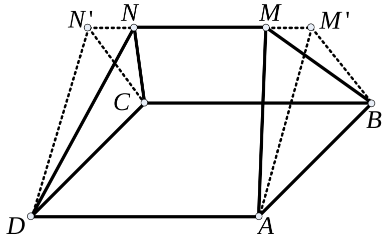
3. Две пирамиди имаат заедничка основа-квадрат со страна a. Пирамидите се на иста страна од рамнината на квадратот. Висините на двете пирамиди минуваат низ средините на две спротивни страни на квадратот и се еднакви на b. Да се најде волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.

Решение. Нека $ABCDF$ и $ABCDE$ се дадените пирамиди (види цртеж). Заедничкиот дел се добива кога од правата призма $ABCDN'M'$ (види ги цртежите) се извадат двете пирамиди $CDN'N$ и $ABM'M$.

Од правоаголникот $ABEF$ (види цртеж) следува дека M е средна точка на AE. Слично, N



е средна точка на CF. Според тоа $\overline{AB}=a$, и висината на $\triangle ABM'$, спуштена од M' е $\frac{b}{2}$. Од друга страна, бидејќи MN е средна линија во триаголникот ADE, следува дека $\overline{MN}=\frac{a}{2}$. Според тоа: $\overline{MM'}=\overline{NN'}=\frac{a}{4}$, и:



$$\begin{aligned} V_{ABCDMN} &= V_{ABCDM'N'} - 2V_{CDNN'} \\ &= \frac{1}{2}\cdot a\cdot \frac{b}{2}\cdot a - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{4} \\ &= \frac{a^2b}{4} - \frac{a^2b}{24} = \frac{5}{24}a^2b. \end{aligned}$$

4. Да се најдат најголемата и најмалата вредност на функцијата

$$f(x) = x^2 - 2x - 1,$$

за оние реални броеви x кои го задоволуваат условот $x^4 + 36 \le 13x^2$.

Решение. Најпрво ги наоѓаме сите x за кои важи неравенството

$$x^4 - 13x^2 + 36 \le 0.$$

Решенија на биквадратната равенка $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ се: $-3, -2, 2, 3$. Неравенството е точно за $x \in [-3, -2]$ и $x \in [2, 3]$.

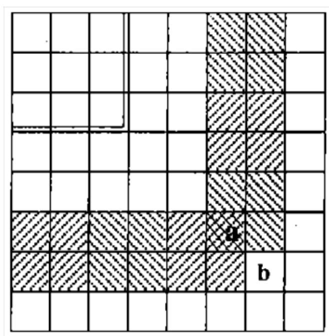
Параболата $f(x) = x^2 - 2x - 1$ има минимум во точката $x = 1$. Значи, таа опаѓа на интервалот $[-3, -2]$, па $14 = f(-3) \ge f(x) \ge f(-2) = 7$ за $x \in [-3, -2]$, а расте на интервалот $[2, 3]$, па $-1 = f(2) \le f(x) \le f(3) = 2$ за $x \in [2, 3]$.

Според тоа, најмала вредност на $f(x)$ за оние x за кои важи $x^4 + 36 \le 13x^2$, е -1, а најголема вредност е 14.

III година

1. Во секое поле на 103×103 таблица се впишани реални броеви кои што по апсолутна вредност не се поголеми од 1. Во произволен 2×2 квадрат од таа таблица збирот на броевите е еднаков на нула. Да се докаже дека збирот на сите броеви од таблицата не е поголем од 103.

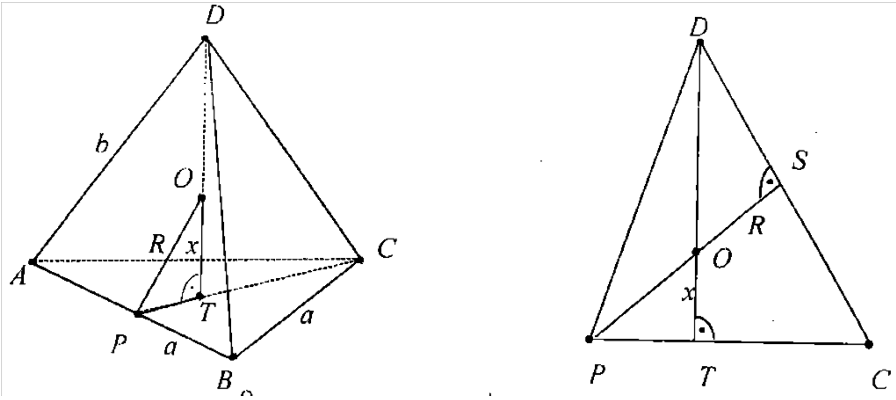
Решение. Да ја разделиме таблицата на 52 области: првата е полето од левиот горен агол, втората е 3×3 квадратот во левиот горен агол без полето во аголот. Третата е 5×5 квадратот без првите две области итн.. Во секоја од 51-та област почнувајќи од втората, збирот не е поголем од 2, бидејќи: ако во секоја област формираме 2×2 квадрати, едно поле од областа, да го означиме со a ќе се јави во два квадрати, а друго поле, да го означиме со b, нема да се јави во ниту еден квадрат. Бидејќи збирот на броевите во секој 2×2 квадрат е еднаков на 0, збирот на броевите од секоја област ќе биде $b - a \le 2$. Така збирот на броевите во таблицата не е поголем од $1 + 51 \cdot 2 = 103$.



2. Основата на дадена пирамида е рамностран триаголник со страна a, а бочните рабови имаат должина b. Конструирана е сфера што ги допира сите (продолжени) рабови на пирамидата. Да се најде нејзиниот радиус.

Решение. Нека T е тежиштето на основата ABC со страна a. Нека бараната сфера има радиус R и нека нејзиниот центар O се наоѓа на растојание x од T (види цртеж лево). Ако H е висината на тетраедарот, тогаш

$$H=\sqrt{b^2-(\tfrac{a}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{b^2-\tfrac{a^2}{3}}\,.$$



Од сличноста на $\triangle DTC\sim\triangle DSO$ (види цртеж десно), добиваме

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{b}=\frac{R}{H-x}\,,\text{ т.е. }\frac{a}{\sqrt{3}b}=\frac{R}{\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-x}\,,$$

од каде што добиваме $x=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-\frac{Rb\sqrt{3}}{a}$. Потоа, од правоаголниот триаголник PTO, добиваме,

$$R^2=x^2+(\tfrac{a}{2\sqrt{3}})^2=(\sqrt{b^2-\tfrac{a^2}{3}}-\tfrac{Rb\sqrt{3}}{a})^2+\tfrac{a^2}{12}\,.$$

Решавајќи ја ова квадратна равенка по R, добиваме

$$R=\frac{(2b\pm a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}\,.$$

Забелешка. Кога $R=\frac{(2b-a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, центарот O на сферата е во внатрешноста на пирамидата, а во другиот случај во надворешноста на пирамидата.

3. Ако

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\phi)}{b}=\frac{\cos(x+2\phi)}{c}=\frac{\cos(x+3\phi)}{d}\,, \qquad (1)$$

да се докаже дека

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}\,. \qquad (2)$$

Решение.Тргнувајќи од првиот и третиот однос на продолжената пропорција (1), имаме

$$\frac{\cos x+\cos(x+2\phi)}{a+c}=\frac{\cos(x+\phi)}{b}$$

од каде

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos x+\cos(x+2\phi)}{\cos(x+\phi)},$$

односно, согласно тригонометрискиот идентитет

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\frac{a+c}{b}=2\cos\phi. \qquad (3)$$

На сличен начин, од второиот и четвртиот однос на пропрцијата (1) се добива

$$\frac{b+d}{c}=2\cos\phi. \qquad (4)$$

Од точноста на (3) и (4) следува точноста на равенството (2).

4. Да се докаже дека од произволни четири реални броја секогаш може да се одберат два два броја x и y такви што $0\le\frac{x-y}{1+xy}\le1$.

Решение. Нека произволните четири броја се a,b,c,d подредени по големина. Тогаш постојат агли $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ така што

$$\mathrm{tg}\alpha=a,\ \mathrm{tg}\beta=b,\ \mathrm{tg}\gamma=c,\ \mathrm{tg}\delta=d.$$

Аглите $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ можеме да ги одбереме така што:

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha\le\beta\le\gamma\le\delta<\frac{\pi}{2}<\alpha+\pi.$$

Значи, β,γ,δ ја разделуваат отсечката $[\alpha,\alpha+\pi]$мна четири дела, од кои што барем еден не е поголем од $\frac{\pi}{4}$. Нека тоа е на пример интервалот $[\alpha,\beta]$. Бидејќи $0\le\beta-\alpha\le\frac{\pi}{4}$ имаме дека и $0\le\mathrm{tg}(\beta-\alpha)\le1$, т.е.

$$0\le\frac{\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\le1.$$

Ако ставиме $x=\mathrm{tg}\beta$ и $y=\mathrm{tg}\beta$ имаме $0\le\frac{x-y}{1+xy}\le1$ што требаше да се докаже.

За $\alpha+\pi-\delta\le\frac{\pi}{4}$, дискусијата е иста бидејќи

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi-\delta)=\mathrm{tg}(\alpha-\delta).$$

IV година

1. Да се докаже дека за секој природен број n важи

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Решение. Нека $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}$. Тогаш $a_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{3n+4}$, па затоа

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}=\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}>0.$$

Значи, низата a_n е растечка. Освен тоа $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$, па значи $a_n>1$ за секој природен број.

2. Во текот на три месеци еден шахист играл најмалку една партија дневно, но притоа играл најмногу дванаесет партии неделно. Да се покаже дека можат да се најдат последователни денови во кои шахистот изиграл точно дваесет и една партија.

Решение. Да претпоставиме дека првиот ден шахистот одиграл a_1 партии, заклучно со вториот ден одиграл a_2 партии, заклучно со третиот ден одиграл a_3 партии, итн заклучно со 77 ден одиграл a_{77} партии. Да ја разгледаме низата броеви

$$a_1,a_2,...,a_{77},a_1+21,a_2+21,...,a_{77}+21.$$

Во ова низа имаме $2\cdot 77=154$ елементи, секој од нив е поголем од $11\cdot 12+21=153$ (бројот a_{77} не е поголем од $11\cdot 12=132$, бидејќи во 77 дена има точно 11 недели во секоја од кои шахистот играл најмногу по 12 партии). Според тоа, барем два од овие 154 броеви се еднакви меѓу себе. Но, помеѓу броевите $a_1,a_2,...,a_{77}$ нема еднакви броеви (шахистот играл најмалку една партија дневно), што значи дека и помеѓу броевите $a_1+21,a_2+21,...,a_{77}+21$ нема еднакви броеви. Според тоа, постојат броеви k и l за кои е исполнето $a_k=a_l+21$, односно $a_k-a_l=21$, т.е. од $(l+1)$-от до k-от ден шахистот изиграл точно 21 партија.

3. Иста како задача 3 од трета година

4. Иста како задача 4 од трета година