Катерина Аневска
Скопје

ЕДНА ЗАДАЧА, ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА РЕШАВАЊЕ

Наоѓањето на решение на зададен проблем е предизвик со кој секојдневно се соочуваме. Притоа, често пати имаме можност дадена проблемска ситуација да ја разрешиме на повеќе начини, но секогаш резултатот да биде ист. Како во секојдневниот живот, така и во математиката имаме можност една иста задача да решиме на повеќе начини. Повеќето од вас тоа не го практикуваат, меѓутоа на мислење сме дека наоѓањето на повеќе начини за решавање на една задача е посебно важно за развојот на вашите математички способности, а со самото тоа и за развојот на вашите способности за разеешување проблемски ситуации. Токму затоа во овој напис ќе се задржиме на една задача за која ќе ви предложиме повеќе алтернативни патишта за нејзино решавање.

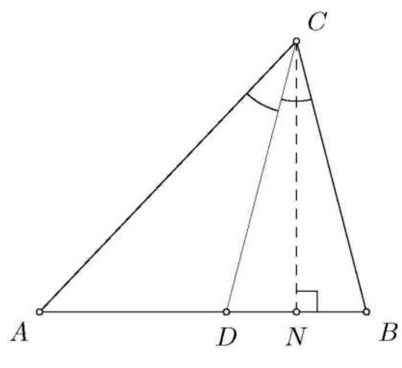
Задача. Во триаголникот ABC иметралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D. Определи ја должината на страната AC ако $\overline{CB}=\overline{CD}$, $\overline{AD}=4$ и $\overline{DB}=3$.

Решение. *Прв начин*. Од теоремата за симетралата на аголот следува дека $\overline{AC}:\overline{BC}=4:3$, па затоа можеме да земеме $\overline{AC}=4x$ и $\overline{BC}=3x$. Ако N е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C, тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AC}^2=\overline{AN}^2+\overline{CN}^2$$
$$\overline{BC}^2=\overline{BN}^2+\overline{CN}^2$$

па затоа

$$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AN}^2-\overline{BN}^2. \qquad (1)$$



Триаголникот BCD е рамнокрак и како CN е негова висина добиваме $\overline{DN}=\overline{BN}=\frac{3}{2}$. Понатаму,

$$\overline{AN}=\overline{AD}+\overline{DN}=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}.$$

Со замена во (1) добиваме

$$(4x)^2-(3x)^2=(\tfrac{11}{2})^2-(\tfrac{3}{2})^2, \text{ т.е. } x=2.$$

Конечно, $\overline{AC}=4\cdot 2=8$.

Втор начин. На потполно ист начин како при првиот начин наоѓаме $\overline{AC}=4x$ и $\overline{BC}=3x$. Сега, од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}+\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot(\overline{CD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{BD}),$$

од каде ја добиваме равенката

$$4\cdot(3x)^2+3\cdot(4x)^2=7\cdot((3x)^2+3\cdot 4),$$

чие решение е $x=2$. Конечно, $\overline{AC}=4\cdot 2=8$.

Трет начин. Нека $\measuredangle BAC=\alpha, \measuredangle ABC=\beta, \measuredangle ACB=\gamma$. Со примена на синусната теорема на $\triangle ABC$ добиваме $\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$, а со примена на $\triangle ACD$ добиваме $\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AD}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Но, $\overline{CB}=\overline{CD}$, па затоа од последните две равенства следува $\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}=\frac{\overline{AD}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Понатаму, ако се земе предвид дека $\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, од последното равенство добиваме $\overline{AB}=2\overline{AD}\cos\frac{\gamma}{2}$. Понатаму, ако земеме предвид дека $\overline{AD}=4$ и $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=7$, од последното равенство добиваме $7=2\cdot 4\cos\frac{\gamma}{2}$, т.е. $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{7}{8}$. Според тоа, $\cos\gamma=2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1=\frac{17}{32}$.

Понатаму, од синусната теорема применета на триаголниците ADC и BCD следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\sin\measuredangle ADC}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\measuredangle BDC}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}},$$

па затоа

$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{BD}=4:3.$$

Затоа можеме да земеме $\overline{AC}=4x$ и $\overline{BC}=3x$. Сега, од косинусната теорема применета на $\triangle ABC$ добиваме

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\gamma,$$

па затоа

$$7^2=(4x)^2+(3x)^2-2\cdot 4x\cdot 3x\cdot\frac{17}{32},$$

од каде добиваме $x^2=4$, т.е. $x=2$. Конечно, $\overline{AC}=4\cdot 2=8$.

Четврт начин. Нека E е точка на полуправата CD таква што $\overline{CE}=\overline{CA}$. Тогаш

$$\measuredangle AEC=\frac{1}{2}(180^\circ-\measuredangle ACE).$$

Бидејќи CD е симетрала на $\measuredangle ACD$, важи $\measuredangle ACE=\measuredangle DCB$, па затоа

$$\measuredangle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DCB) = \measuredangle BDC = \measuredangle ADE .$$

Значи, и триаголникот AED е рамнокрак и важи $\overline{AE} = \overline{AD} = 4$. Според тоа, сите три триаголници AED, AEC и DBC се рамнокраки и имаат исти агли, па затоа се по парови слични. Заради сличноста на триаголниците AEC и DBC важи

$$\overline{CD} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{AE} = 3 : 4 .$$

Затоа важи

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CE} - \overline{CD}}{\overline{CE}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} .$$

Заради сличноста на триаголниците EDA и AEC заклучуваме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}$. Конечно,

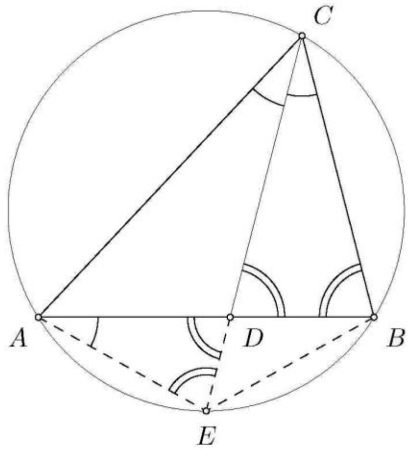
$$16 = \overline{AE}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AC}^2 \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}^2}{4} ,$$

па затоа $\overline{AC} = 8$.

Петти начин. Како во претходниот начин ја воведуваме точката E и докажуваме дека $\overline{AE} = 4$. Исто така важи

$$\measuredangle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DCB) = \measuredangle CBD ,$$

што значи дека четириаголникот $AEBC$ е тетивен. Сега над тетивите AE и BE аглите се еднакви, па затоа $\overline{BE} = \overline{AE} = 4$. Сега, од теоремата на Птоломеј следува



$$\overline{AC} \cdot \overline{BE} + \overline{BC} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{CE}$$

и како $\overline{BE} = \overline{AE} = 4$, $\overline{AB} = 7$ и $\overline{CE} = \overline{AC}$ од последното равенство добиваме $4 \cdot \overline{AC} + 4 \cdot \overline{BC} = 7 \cdot \overline{AC}$, т.е. $3\overline{AC} = 4\overline{BC}$.

Од степенот на точката D во однос на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ следува

$$\overline{CD} \cdot \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \overline{BD} = 3 \cdot 4 = 12 .$$

Но, $\overline{BC} = \overline{CD}$ и $\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{BC}$, па затоа $\overline{BC} \cdot (\overline{AC} - \overline{BC}) = 12$ и ако замениме $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AC}$, добиваме

$$\frac{3}{4}\overline{AC} \cdot (\overline{AC} - \frac{3}{4}\overline{AC}) = 12 \text{, т.е. } \overline{AC} = 8 .$$

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ