III РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Дадено е пресликувањето од множеството A={0, 1, 2, 3} во множеството B={1, 4, 7, 10} со својот график f={(x,y),x∈A, y∈B и y=3·x+1}. Дали ова пресликување е бијекција ? Образложи го одговорот.

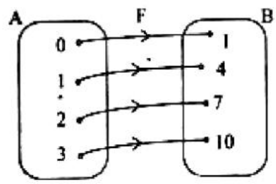
2. Ако во некој четирицифрен број се изостави цифрата 3 што означува единици и на добиениот трицифрен број му се додаде 124 ќе се добие 758.
Кој е тој четирицифрен број ?

7 **3.** Во еден магацин се донесени 75 тони компири, а од друг се изнесени 40 тони, по што во првиот магацин имало 135 тони компири повеќе отколку во вториот. Колку тони компири имало повеќе во првиот магацин на почетокот ?

4. Точките M и N се средини на две соседни страни од квадратот чија плоштина е 16 cm^2. Определи ја плоштината на триаголникот чиишто две темиња му се точките M и N, а третото теме е во темето на квадратот образувано од страните на кои не лежат точките M и N.

V одделение

1. Пресликувањето е прикажано на цртежот. Од цртежот се гледа дека пресликувањето е *инјекција*, бидејќи различни елементи од множеството A имаат различни слики во B. Пресликувањето е *сурјекција*, бидејќи секој елемент од множеството B е слика на некој елемент од множеството A. Според тоа пресликувањето е ***биекција***.



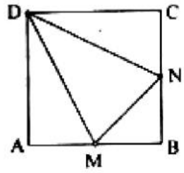
2. Нека бараниот број е $\overline{xyz3}$; x, y, z∈{1, 2, 3, ..., 9}. $\overline{xyz}$+124=758, следува z=4, бидејќи 4+z=8, а y=3 и x=6, т.е. бараниот број е 6343.

3. Со носењето и изнесувањето на компири, во двата магацина настанала промена за 115 kg компири, така што во првиот магацин имало повеќе 135-115=20 kg компири.

4. Од P=16 cm^2=a^2, следува дека страната на квадратот е a=4 cm. Плоштината на бараниот триаголник е:

$P_{\Delta MND}=P_{ABCD}-P_{\Delta AMD}-P_{\Delta DNC}-P_{\Delta MBN}$

$P_{\Delta MND}=16-\frac{1}{2}\cdot4\cdot2-\frac{1}{2}\cdot4\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=6$ cm^2.



VI одделение

1. Дали може правата што минува низ точките A(-3, 6), B(1, -2) и C(0, 0) да биде график на функцијата $y=ax$? Образложи го одговорот.

2. Некој двоцифрен број е делив со 2. Ако тој број се подели со 2, добиениот количник е делив со 2. Ако кон истиот број се додаде 3, збирот е делив со 3. Ако, пак, од истиот број се одземе 5, разликата е делива со 5. Одреди го тој двоцифрен број.

3. Еден објект можат да го изградат 20 работници за 45 дена. На објектот работеле 15 работници 20 дена, а потоа дошле уште 10 работници. За колку дена ќе биде изграден објектот?

4. Во еден триаголник едната страна е $\frac{1}{2}$ од $\frac{2}{3}$ на периметарот, втората страна е $\frac{2}{3}$ од $\frac{4}{7}$ на периметарот, а третата страна е 24 cm. Одреди го периметарот на тој триаголник.

VI одделение

1. Одговорот е да.
Правата линија минува низ координатниот почеток, т.е. низ точката C(0, 0), а односот на ординатата и апцисата на точките A и B е ист, т.е. a=-2.

2. Нека бараниот двоцифрен број е $\overline{xy}$, $x\in\{1, 2, 3, ..., 9\}$, $y\in\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Бидејќи $2|\overline{xy}$, следува дека $2|y$. Нека $\overline{xy}:2=k$, од условот на задачата $2|k$. Од $3|(\overline{xy}+3)$ следува дека $3|(x+y+3)$. Од $5|((\overline{xy}-5)$ следува дека $5|(y-5)$. Од $5|(y-5)$ следува дека y=0 или y=5.
$y\neq5$, следи y=0.

Од $3|(x+0+3)$ следува дека $x\in\{3, 6, 9\}$. Бараниот број е 60. Броевите 30 и 90 не се решенија бидејќи количниците: 30:2=15 и 90:2=45 не се деливи со 2.

3. I - начин: Ако работи еден работник тогаш објектот ќе биде завршен за $20\cdot45=900$ дена. 15 работници за 20 дена имаат $15\cdot20=300$ работни дена. Останатите 600 работни денови треба да ги исполнат 15+10=25 работници. Тие ќе работат 600:25=24 дена.

II - начин: Со примена на пропорција:

$$\begin{array}{ll} \downarrow 20 \text{ работници} & \uparrow 45 \text{ дена} \\ 15 \text{ работници} & x \text{ дена} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \downarrow 15 \text{ работници} & \uparrow (60\text{-}20) \text{ дена} \\ 25 \text{ работници} & y \text{ дена} \end{array}$$

$x=\frac{20\cdot45}{15}=60$ дена $\qquad y=\frac{40\cdot15}{25}=24$ дена.

Според тоа објектот ќе биде изграден за 20+24=44 дена.

4. Нека c=24 cm, а страната $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(a+b+c)=\frac{1}{3}(a+b+24)$ т.е. $a=\frac{1}{2}b+12$. Страната $b=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}(a+b+24)$. Со замена за a, имаме: $b=\frac{8}{21}\cdot\left(\frac{1}{2}b+12+b+24\right)$ т.е. b=32 cm и a=28 cm.

VII одделение

1. Докажи дека ако средната цифра на еден трицифрен број е еднаква на збирот на другите две, тогаш тој број е делив со 11.

2. За која вредност на x изразот $(3x-4)\cdot(7x+8)-1{,}5x\cdot(24x+4)-5\cdot(1-2x)$ е негативен?

3. Да се конструира рамнокрак правоаголен триаголник ако е даден збирот од катетата и хипотенузата.

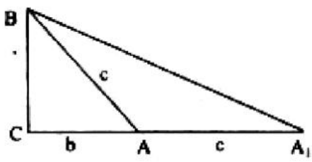
4. Низ центарот O на впишаната кружница во триаголник ABC е повлечена права p паралелна со страната BC, која ги сече страните AC и AB соодветно во точките M и N. Докажи дека $\overline{MN} = \overline{BN} + \overline{CM}$.

VII одделение

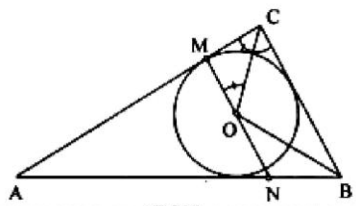
1. Нека бараниот број е $\overline{xyz}=100x+10y+z$. Бидејќи $y=x+z$ имаме: $100x+10(x+z)+z=11(10x+z)$, т.е. бројот е делив со 11.

2. Дадениот полином ќе го сведеме во нормален вид, т.е. $21x^2+24x-28x-32-36x^2-6x-5+10=-(15x^2+43)<0$ за секој реален број x.

3. **Анализа:** Нека задачата е решена, т.е. ΔABC е бараниот. Ако на продолженото на страната CA ја нанесеме хипотенузата, добиваме правоаголен триаголник A_1BC кој е определен со $\overline{CA_1} = b+c$ и аголот во темето A_1 еднаков на $\frac{45^\circ}{2}$, бидејќи триаголникот AA_1B е рамнокрак со агол во темето A еднаков на 135°. Темето A е во пресекот на симетралата на BA_1 и страната CA_1. Од анализата произлегуваат конструкцијата, доказот и дискусијата на задачата.



4. Од дадените услови следува дека CO е симетрала на аголот ABC, т.е. $\angle OCB=\angle OCM$ (1), а $\angle OCB=\angle COM$ (2), како наизменични агли на трансверзала. Од (1) и (2) следува дека $\angle OCM=\angle COM$, т.е. ΔCOM е рамнокрак со основа CO, следи $\overline{OM} = \overline{CM}$. На ист начин се покажува дека и ΔBON е рамнокрак т.е. $\overline{ON} = \overline{BN}$, што значи дека: $\overline{MN} = \overline{OM} + \overline{ON}$; $\overline{MN} = \overline{CM} + \overline{BN}$.



VIII одделение

1. За која вредност на променливата x изразот x^4-6x^2+12 има најмала вредност ?

2. Еден камион од местото А до местото В се движел со брзина 60 km на час. На враќање од В во А, камионот бил натоварен и се движел со брзина 40 km на час. Колкава е средната брзина на движењето на камионот на тој пат ?

3. Во правоаголен триаголник со катети 6 cm и 12 cm, повлечена е симетрала на правиот агол. Определи ја должината на симетралата од темето до пресечната точка со хипотенузата.

4. Даден е триаголникот ABC, во кој BD е симетрала на аголот B. Одреди ги должините на отсечките AD и DC ако страните на триаголникот се: $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 7,5$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm .

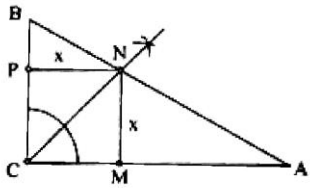
VIII одделение

1. Триномот ќе го запишеме во форма $x^4-6x^2+12=(x^2-3)^2+3$. Тој има најмала вредност, ако изразот $x^2-3=0$, т.е. $|x|=\sqrt{3}$.

2. Нека $t_1=\frac{s}{60}$ е време за кое камионот поминал од местото А до местото В, $t_2=\frac{s}{40}$ е време за кое камионот поминал од В до А, а s е растојание од местото А до местото В.

$$V_{cp}=\frac{2s}{t_1+t_2}=\frac{2s}{\frac{s}{60}+\frac{s}{40}}=\frac{2s}{\frac{2s+3s}{120}}=\frac{2\cdot 120}{5}=48\ km/h.$$

3. Нека N е пресечната точка на симетралата на аголот и хипотенузата. Ако од N повлечеме нормали кон крацитe на правоаголниот триаголник ќе го добиеме квадратот CMNP со страна x. Отсечките NM и NP се висини на ΔCNB и ΔCNA.



$P_{\Delta BCN}+P_{\Delta CAN}=P_{\Delta ABC}$, т.е. $\frac{6x}{2}+\frac{12x}{2}=\frac{6\cdot 12}{2}$,

т.е. x=4 cm, а $\overline{CN}=4\sqrt{2}$ cm.

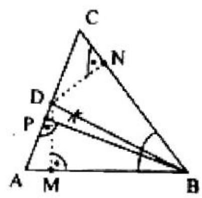
(како дијагонала на квадратот CMNP).

4. I - решение: Задачата ќе ја решиме со примена на теоремата: " Во секој триаголник симетрала на кој било внатрешен агол ја дели спротивната страна во однос еднаков на односот, од другите две страни " т.е.

$$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}$$
$$\overline{AD}:\overline{DC}=5:7{,}5=2:3 \text{ и}$$
$$\overline{AD}+\overline{DC}=10.$$

Оттука следува дека $\overline{AD}$=4 cm, а $\overline{DC}$=6 cm.

II - решение:



Задачата ќе ја решиме преку плоштините на триаголниците. За таа цел повлекуваме нормали од точката D до AB и BC.

Отсечката $\overline{DM}=\overline{DN}$ (врз основа на својството на симетрала на агол). Од темето B повлекуваме нормала на AC.

$P_{\Delta ABD}+P_{\Delta DBC}=P_{\Delta ABC}$ т.е.

$\frac{1}{2}\overline{DM}\cdot\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{DN}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BP}$. Бидејќи $\overline{DM}=\overline{DN}$ и по извршената замена следува:

$$\overline{DM}\cdot(5+5{,}7)=10\cdot\overline{BP}$$
$$\overline{DM}:\overline{BP}=10:12{,}5=4:5 \quad (1)$$

Од сличноста на правоаголните триаголници ABP и AMD (кои имаат еден заеднички агол) имаме:

$$\overline{DM}:\overline{BP}=\overline{AD}:\overline{AB} \quad (2)$$

Од (1) и (2) имаме: $\overline{AD}:5=4:5$, т.е. $\overline{AD}$=4 cm, а $\overline{DC}$=6 cm.