

Регионален натпревар 2002

I година

1. Паралелно со страните на триаголникот ABC повлечени се тангенти на неговата впишана кружница. Секоја од тангентите од триаголникот отсекува триаголник. Ако r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ а r_1, r_2, r_3 се радиуси на впишаните кружници во отсечените триаголници, тогаш $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Докажи!

Решение. Секој од малите триаголници е сличен со триаголникот ABC . Ако L е периметар на триаголникот ABC а L_1, L_2 и L_3 се периметри на малите триаголници со по едно теме A, B, C соодветно, тогаш

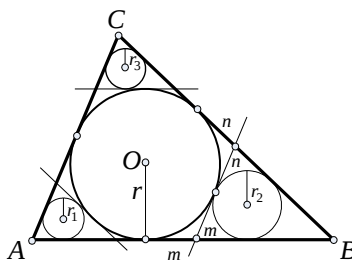
$$\frac{L_1}{L} = \frac{r_1}{r}, \quad \frac{L_2}{L} = \frac{r_2}{r} \quad \text{и} \quad \frac{L_3}{L} = \frac{r_3}{r}.$$

Нека допирните точки на страните AB, BC, CA со впишаната кружница се C_1, A_1, B_1 соодветно. Јасно е дека $L_1 = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}$, $L_2 = \overline{BA_1} + \overline{BC_1}$ и $L_3 = \overline{CA_1} + \overline{CB_1}$. Од добиените равенства, следува

$$L_1 + L_2 + L_3 = L.$$

Според тоа

$$\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = \frac{L_1}{L} + \frac{L_2}{L} + \frac{L_3}{L} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L} = \frac{L}{L} = 1, \text{ т.е. } r_1 + r_2 + r_3 = r.$$



2A. За позитивните реални броеви x и y исполнето е равенството

$$x^2 + y^2 = 6xy.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{x-y}$.

Решение. Ако на двете страни од равенството $x^2 + y^2 = 6xy$ додадеме $2xy$ добиваме

$$x^2 + 2xy + y^2 = 8xy \text{ т.е. } (x+y)^2 = 8xy.$$

Ако на двете страни на истото равенство додадеме $-2xy$ добиваме

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4xy, \text{ т.е. } (x-y)^2 = 4xy.$$

Според тоа

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{8xy}{4xy} = 2.$$

Конечно, $\frac{x+y}{x-y} = \pm\sqrt{2}$.

2Б. Упрости го изразот

$$\frac{(x^2 - \frac{1}{y^2})^x (y + \frac{1}{x})^{y-x}}{(y^2 - \frac{1}{x^2})^y (x - \frac{1}{y})^{x-y}}.$$

Решение. Ќе направиме трансформација и на броителот и на именителот на зададениот израз:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - \frac{1}{y^2})^x (y + \frac{1}{x})^{y-x}}{(y^2 - \frac{1}{x^2})^y (x - \frac{1}{y})^{x-y}} &= \frac{(\frac{x^2 y^2 - 1}{y^2})^x (\frac{xy+1}{x})^{y-x}}{(\frac{x^2 y^2 - 1}{x^2})^y (\frac{xy-1}{y})^{x-y}} = \frac{\frac{(x^2 y^2 - 1)^x}{y^{2x}} \cdot \frac{(xy+1)^{y-x}}{x^{y-x}}}{\frac{(x^2 y^2 - 1)^y}{x^{2y}} \cdot \frac{(xy-1)^{x-y}}{y^{x-y}}} \\ &= \frac{\frac{(xy-1)^x \cdot (xy+1)^x}{y^{2x}} \cdot \frac{(xy+1)^y \cdot (xy-1)^{-x}}{x^y \cdot x^{-x}}}{\frac{(xy-1)^y \cdot (xy+1)^y}{x^{2y}} \cdot \frac{(xy-1)^x \cdot (xy-1)^{-y}}{y^x \cdot y^{-y}}} = \frac{x^{x+y}}{y^{x+y}} = (\frac{x}{y})^{x+y} \end{aligned}$$

3. Збирот на 20 природни броеви е 2002. Најди ја најголемата вредност што може да ја прими нивниот НЗД.

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ се природни броеви за кои

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 2002.$$

Ако $d = \text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_{20})$, тогаш $a_i = dk_i$, $i = 1, 2, \dots, 20$ каде $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, 20$.

Значи

$$d(k_1 + k_2 + \dots + k_{20}) = 2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Бидејќи $s = k_1 + k_2 + \dots + k_{20}$ (збир на дваесет природни броеви) и d се природни броеви за кои $s \cdot d = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $s \geq 20$, најмала вредност која може да ја прими бројот $s = k_1 + k_2 + \dots + k_{20}$ е $2 \cdot 11 = 22$. Според тоа најголема вредност на d е 91.

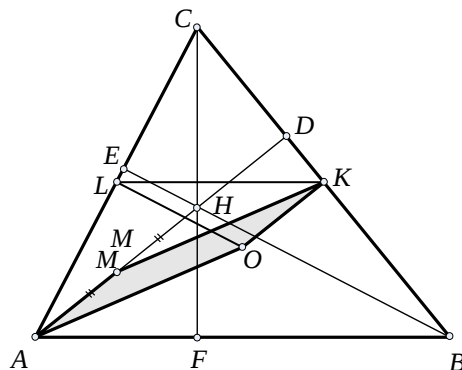
Низата броеви

$$a_1 = 91, a_2 = 91, a_3 = 91, \dots, a_{19} = 91, a_{20} = 273$$

ги има бараните својства.

4А. Точката H е ортоцентар, а точката O е центар на опишаната кружница во триаголникот ABC . Ако M е средина на отсечката AH , а K е средина на страната BC , докажи дека $\overline{AO} = \overline{KM}$.

Решение. Нека L е средина на страната AC . Бидејќи O е центар на опишаната кружница $OK \parallel AH$ и



$OL \parallel BH$, а бидејќи L и K се средини на страните AC и c соодветно, $c > b$.
Значи, $c - b > 0$. Бидејќи $\overline{KL} = \frac{1}{2} \overline{AB}$, коефициентот на сличност е $\frac{1}{2}$. Според тоа
 $\overline{OK} = \frac{1}{2} \overline{AH} = \overline{AM}$. Значи, четириаголникот $OKMA$ е паралелограм и $\overline{AO} = \overline{KM}$.

4Б. Даден е $\triangle ABC$ и $M \in AB$, $K \in BC$ се такви што $MK \parallel AC$. Ако L е произволна точка од страната AC на триаголникот, $P_{\triangle ABC} = P$, $P_{\triangle MBK} = S$, определувај ја P_{LMBK} .

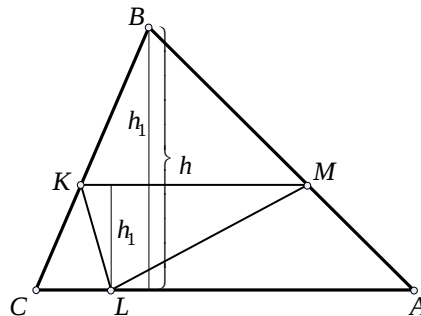
Решение. Плоштината на $\triangle KLM$ ја означуваме со Q , т.е. $P_{\triangle KLM} = Q$. Бидејќи триаголниците KLM и KMB имаат иста страна KM имаме

$$\frac{Q}{S} = \frac{\frac{1}{2} \overline{KM} \cdot h_2}{\frac{1}{2} \overline{KM} \cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h - h_1}{h_1} = \frac{h}{h_1} - 1 = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S}} - 1.$$

Оттука добиваме $Q = \sqrt{P \cdot S} - S$, т.е.

$$Q + S = \sqrt{P \cdot S}.$$

$$\text{Значи, } P_{LMBK} = \sqrt{P \cdot S}.$$



II година

1. Ако a, b, c се непарни броеви, тогаш равенката $ax^2 + bx + c = 0$ нема рационални решенија. Докажи!

Решение. Ако $a = 2k + 1, b = 2m + 1, c = 2n + 1$, тогаш дискриминантата на равенката е:

$$\begin{aligned} D &= (2m + 1)^2 - 4(2k + 1)(2n + 1) = 4m(m + 1) - 8(2kn + k + n) - 3 \\ &= 4m(m + 1) - 8(2kn + k + n + 1) + 5 \end{aligned}$$

Бројот $m(m + 1)$ е парен, па затоа бројот $4m(m + 1)$ е делив со 8. Значи, O . За корените на равенката да бидат рационални броеви D треба да биде полн квадрат. Од претходната дискусија D е непарен, па заради тоа

$$D = (2q + 1)^2 = 4q(q + 1) + 1 = 8r + 1.$$

Значи D не може да биде полн квадрат, т.е. равенката нема рационални корени.

2. Нека a, b, c се комплексни броеви за кои што $|a| = |b| = |c| = 1$. Докажи дека $\left| \frac{ab + bc + ac}{a + b + c} \right| = 1$.

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2 = z\bar{z}$. За произволни комплексни броеви z и w е исполнето равенството $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$ и $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Користејќи ги овие својства добиваме

$$\begin{aligned} |ab+bc+ac|^2 &= (ab+bc+ac)\overline{(ab+bc+ac)} \\ &= (ab+bc+ac)(\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}) \\ &= 3 + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} \\ |a+b+c|^2 &= (a+b+c)\overline{(a+b+c)} \\ &= (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) \\ &= 3 + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} \end{aligned}$$

Според тоа, $|\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}| = 1$.

3А. Во правоаголникот $ABCD$ повлечена е нормала BK на дијагоналата AC ($K \in AC$). Точките M и N се средини на AK и CD соодветно. Докажи дека $BMNC$ е тетивен четириаголник.

Решение. Ако $P \in BC$, таква што $MP \parallel AB$, тогаш MP е висина на $\triangle BMC$. Ако $\{H\} = KB \cap MP$, тогаш H е ортоцентар на $\triangle BMC$ и $CH \perp MB$. Нека $\{Q\} = CH \cap MB$.

Бидејќи M е средина на AK и $MH \parallel AB$, MH е средна линија на $\triangle ABK$ па затоа

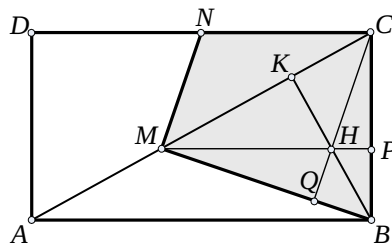
$$\overline{MH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{DC} = \overline{NC}.$$

Значи $MHCN$ е паралелограм, па според тоа $MN \parallel QC$. Конечно,

$$\angle NMB = \angle CQB = 90^\circ, \text{ т.е.}$$

$$\angle NMB = \angle NCB = 90^\circ,$$

од каде што следува дека $MBCN$ е тетивен (збирот на спротивните агли е 180°).



3Б. Ако $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, тогаш

$$(a+b+c)^3 = 27abc.$$

Докажи!

Решение. Од даденото равенство, непосредно добиваме

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{c} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = (-\sqrt[3]{c})^3 \Leftrightarrow$$

$$a + b + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{b^2a} = -c \Leftrightarrow$$

$$a + b + c = -3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} \Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)^3 = (3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c})^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)^3 = 27abc$$

4А. Три кружници со центри O_1, O_2 и O_3 и радиуси r_1, r_2 и r_3 соодветно, се допираат попарно меѓу себе од надворешна страна и сите три ја допираат правата p . Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$ (r_3 е радиус на најмалата кружница).

Решение. Со A_1, A_2, A_3 ги означуваме проекциите на точките O_1, O_2, O_3 на правата p . Нека O_3' е проекцијата на точката O_3 на правата O_1A_1 (кружницата со радиус O_3 има најмал радиус). Од питагоровата теорема за $\triangle O_3O_3'O_1$ имаме

$$\overline{O_3O_3'}^2 = 4r_1r_3 = \overline{A_1A_3}^2.$$

Со слична постапка се добива дека

$$\overline{A_2A_3}^2 = 4r_2r_3 \text{ и } \overline{A_1A_2}^2 = 4r_1r_2$$

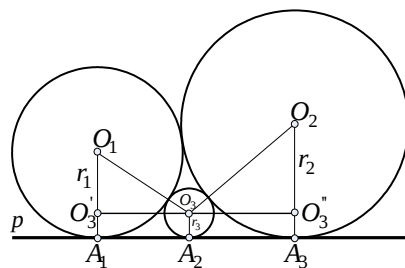
Значи $\overline{A_1A_3} = 2\sqrt{r_1r_3}$, $\overline{A_1A_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ и $\overline{A_2A_3} = 2\sqrt{r_2r_3}$. Бидејќи

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_3},$$

имаме

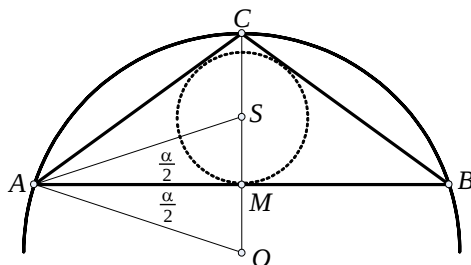
$$\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$$

што требаше да се докаже.



4Б. Во $\triangle ABC$ центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB . Најди ги аглиите на триаголникот.

Решение. Нека S е центар на впишаната кружница, а O е центар на опишаната кружница. Триаголникот ABC е рамнокрак (правата OS е симетрала на AB). Според тоа $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$. Ако $\{M\} = SO \cap AB$ тогаш $\overline{SM} = \overline{OM}$ и $\triangle AMO \cong \triangle AMS$, па затоа $\angle MAO = \frac{\alpha}{2}$. Периферниот агол $\angle ABC$ над тетивата AC е еднаков на половина од централниот $\angle AOC$ над истата тетива. Според тоа



$$\alpha = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) \text{ т.е. } 4\alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Според тоа, аглиите на триаголникот се $\alpha = \beta = 36^\circ$ и $\gamma = 108^\circ$.

III година**1A. Докажи дека**

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Решение. Користејќи ги особините на логаритамската функција имаме

$$\begin{aligned} \log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N &= \\ &= \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} c} \\ &= \frac{\log_{abc}^2 N \cdot (\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c)}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} \\ &= \frac{\log_{abc}^2 N \cdot 1}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} \\ &= \frac{\log_{abc}^2 N}{\frac{\log_{abc} N}{\log_a N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_b N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_c N}} = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}. \end{aligned}$$

1B. Реша ја равенката $\log_2(4^x + 4) = x + \frac{1}{\log_{(2^{x+1}-3)} 2}.$

Решение. Користејќи ги особините на логаритамската функција

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a = \log_b b^a \quad \text{и} \quad \log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d,$$

дадената равенка ќе ја запишеме во облик:

$$\log_2(2^{2x} + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = \log_2[2^x(2^{x+1} - 3)].$$

Воведуваме замена $2^x = y$ и равенката го добива обликот

$$\log_2(y^2 + 4) = \log_2[y(2y - 3)] \Rightarrow y^2 + 4 = y(2y - 3).$$

Квадратната равенка $y^2 - 3y - 4 = 0$ има решенија $y_1 = -1$ и $y_2 = 4$. Равенката

$2^x = -1$ нема решенија, а равенката $2^x = 4$ има решение $x = 2$.

Со замена на $x = 2$ во почетната равенка добиваме дека $x = 2$ е решение на почетната равенка.

2A. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin 6x}{\sin 2x} + \dots + \frac{\sin 3nx}{\sin nx} - \frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \dots - \frac{\cos 3nx}{\cos nx}.$$

Решение. Користејќи ја адиционата теорема

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

и тригонометриската формула за двоен агол

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

добиваме

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin 6x}{\sin 2x} + \dots + \frac{\sin 3nx}{\sin nx} - \frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \dots - \frac{\cos 3nx}{\cos nx} \\
 &= \left(\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \right) + \left(\frac{\sin 6x}{\sin 2x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} \right) + \dots + \left(\frac{\sin 3nx}{\sin nx} - \frac{\cos 3nx}{\cos nx} \right) \\
 &= \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} + \frac{\sin 6x \cos 2x - \cos 6x \sin 2x}{\sin 2x \cos 2x} + \dots + \frac{\sin 3nx \cos nx - \cos 3nx \sin nx}{\sin nx \cos nx} \\
 &= \frac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} + \frac{\sin(6x-2x)}{\sin 2x \cos 2x} + \dots + \frac{\sin(3nx-nx)}{\sin nx \cos nx} \\
 &= \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin x \cos x} + \frac{\sin 4x}{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x} + \dots + \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin nx \cos nx} \\
 &= \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} + \frac{\sin 4x}{\frac{1}{2} \sin 4x} + \dots + \frac{\sin 2nx}{\frac{1}{2} \sin 2nx} = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_n = 2n
 \end{aligned}$$

2Б. Докажи го неравенството

$$|\sin x| + |\cos x| \geq 1.$$

Решение. Ако на основната тригонометриска релација додадеме од двете страни $2|\sin x| \cdot |\cos x|$ добиваме

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2|\sin x| \cdot |\cos x| \geq 1 + 2|\sin x| \cdot |\cos x|$$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 \geq 1 + 2|\sin x| \cdot |\cos x|$$

Бидејќи $|\sin x| + |\cos x| \geq 0$, од неравенството $(|\sin x| + |\cos x|)^2 \geq 1$, кое е исполнето за секој реален број x , добиваме $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

3А. За страните a, b, c на триаголникот ABC исполнето е равенството $b^2 + c^2 = 5a^2$. Докажи дека $t_b \perp t_c$.

Решение. За дадениот триаголник, според косинусна теорема имаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha,$$

т.е.

$$5a^2 = 5(b^2 + c^2) - 10bc \cdot \cos \alpha.$$

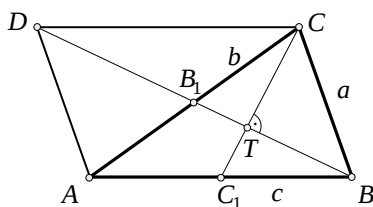
Од равенството од условите на задачата имаме

$$2a^2 = bc \cdot \cos \alpha. \quad (*)$$

Ако ја примениме косинусна теорема на триаголниците BB_1A и CC_1A ги добиваме равенствата

$$t_b^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - bc \cdot \cos \alpha \stackrel{(*)}{=} \frac{4c^2 + b^2 - 8a^2}{4} = \frac{3c^2 - 3a^2}{4}$$

$$t_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - bc \cdot \cos \alpha \stackrel{(*)}{=} \frac{4b^2 + c^2 - 8a^2}{4} = \frac{3b^2 - 3a^2}{4}$$



Со примена на овие две равенства за триаголникот CTB_1 , бидејќи $\overline{CT} = \frac{2}{3}t_c$ и $TB_1 = \frac{1}{3}t_b$, добиваме

$$\left(\frac{2}{3}t_c\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t_b\right)^2 = \frac{4}{9} \frac{3b^2 - 3a^2}{4} + \frac{1}{9} \frac{3c^2 - 3a^2}{4} = \frac{12b^2 - 3c^2 - 15a^2}{36} = \frac{9b^2}{36} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

т.е.

$$\left(\frac{2}{3}t_c\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t_b\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Значи, $\triangle CTB_1$ е правоаголен, т.е. $CT \perp BT$.

3. Во правоаголен триаголник $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), правата што минува низ средината на хипотенузата и центарот на впишаната кружница ја сече катетата AC во точка N под агол од 75° . Одреди ги острите агли во $\triangle ABC$.

Решение. Ако O е центар на впишаната кружница, тогаш

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 45^\circ \text{ и}$$

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 135^\circ.$$

Заради претходното

$$\angle AON = 180^\circ - (75^\circ + \frac{\alpha}{2}),$$

$$\angle AOM = 180^\circ - \angle AON = 75^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BOM = 135^\circ - \angle AOM = 60^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

За $\triangle AOM$, според синусна теорема

$$\frac{\overline{OM}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{AM}}{\sin(75^\circ + \frac{\alpha}{2})} \quad \text{т.е.} \quad \overline{AM} = \overline{OM} \frac{\sin(75^\circ + \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

За $\triangle BOM$ според синусна теорема

$$\frac{\overline{OM}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\overline{BM}}{\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})} \quad \text{т.е.} \quad \overline{BM} = \overline{OM} \frac{\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Точката M е средина на отсечката AB , па затоа $\overline{AM} = \overline{BM}$, т.е.

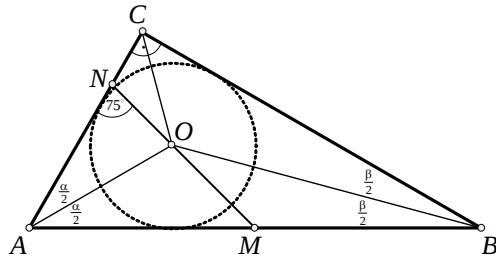
$$\overline{OM} \frac{\sin(75^\circ + \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \overline{OM} \frac{\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Ако во последново равенство замениме $\frac{\beta}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\sin(75^\circ + \frac{\alpha}{2}) \sin(45^\circ - \frac{\beta}{2}) = \sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Користејќи адициони теореми добиваме

$$\cos 120^\circ - \cos(30^\circ + \alpha) = \cos 60^\circ - \cos(60^\circ - \alpha) \Rightarrow$$



$$\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \cos 60^\circ - \cos 120^\circ = 1 \Rightarrow$$

$$-2 \sin 45^\circ \sin(15^\circ - \alpha) = 1 \Rightarrow 2 \sin 45^\circ \sin(\alpha - 15^\circ) = 1 \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha - 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha - 15^\circ = 45^\circ$$

Значи, аглите на триаголникот се $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

4Б. Рамнина ги сече бочните рабови на правилна четиристрана пирамида во точките A, B, C и D кои се на растојание a, b, c и d од врвот на пирамидата

Докажи дека $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

Решение. Воведуваме ознаки

$$\overline{AM} = a, \overline{BH} = b, \overline{CM} = c,$$

$$\overline{DH} = d \text{ и } \overline{HK} = l,$$

каде што K е пресек на дијагоналите во четириаголникот $ABCD$.

Нека α е аголот што го зафаќа висината HP со бочните рабови на пирамидата. Тогаш

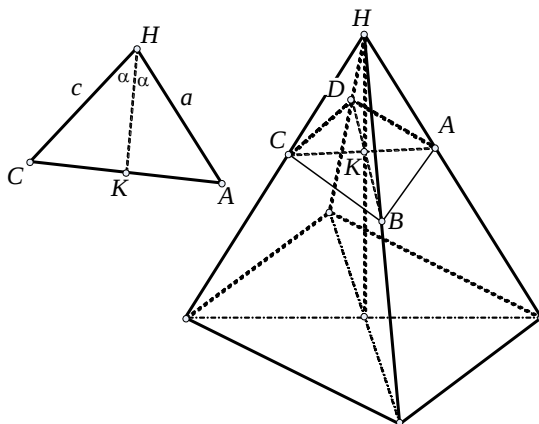
$$P_{\Delta AHC} = P_{\Delta AHK} + P_{\Delta HKC}$$

т.е.

$$\frac{ac}{2} \sin 2\alpha = \frac{al}{2} \sin \alpha + \frac{cl}{2} \sin \alpha$$

$$\text{т.е. } \frac{2 \cos \alpha}{l} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}.$$

Аналогно $\frac{2 \cos \alpha}{l} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$, од каде се добива бараното равенство.



IV година

1А. Броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ образуваат аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} a_k^2 = \frac{n}{2n-1} (a_1^2 - a_{2n}^2).$$

Решение. Ќе ја користиме формулата за општиот член на аритметичката прогресија и формулата за збирот S_k на првите k членови на аритметичка прогресија, при што добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k^2 &= (a_1^2 - a_2^2) + (a_3^2 - a_4^2) + \dots + (a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2) = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) = -d \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -d \sum_{k=1}^n (2a_{2k-1} + d) = -d(nd + 2 \sum_{k=1}^n (a_1 + (2k-2)d)) \\
&= -nd(2a_1 + (2n-1)d)
\end{aligned}$$

Од друга страна

$$\frac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2) = \frac{n}{2n-1}(a_1 - a_{2n})(a_1 + a_{2n}) = -nd(2a_1 + (2n-1)d).$$

1Б. Дадена е аритметичка прогресија $a_1, a_2, \dots, a_n$. Докажи дека

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Решение. За $i = 1, 2, \dots, n$ точно е равенството

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_i a_{n-i}} &= \frac{a_i + a_{n-i}}{a_i a_{n-i} (a_i + a_{n-i})} = \frac{a_i}{a_i a_{n-i} (a_i + a_{n-i})} + \frac{a_{n-i}}{a_i a_{n-i} (a_i + a_{n-i})} \\
&= \frac{1}{a_{n-i} (a_i + a_{n-i})} + \frac{1}{a_i (a_i + a_{n-i})} = \frac{1}{a_i + a_{n-i}} \left(\frac{1}{a_{n-i}} + \frac{1}{a_i} \right)
\end{aligned}$$

Според тоа

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} \right) + \frac{1}{a_2 + a_{n-1}} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + \dots + \frac{1}{a_n + a_1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) = (*)$$

Бидејќи $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_n + a_1$, добиваме

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} \right) + \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + \dots + \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) \\
&= \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) \\
&= \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_1} \right).
\end{aligned}$$

2. Точките $A(-c, 0)$ и $B(c, 0)$ се темиња на $\triangle ABC$. Аглите $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ го исполнуваат равенството $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -k^2$. Најди го геометриското место на тежиштата на $\triangle ABC$.

Решение. Ако $T(x, y)$ е тежиште на триаголникот ABC и $C(x_1, y_1)$, тогаш

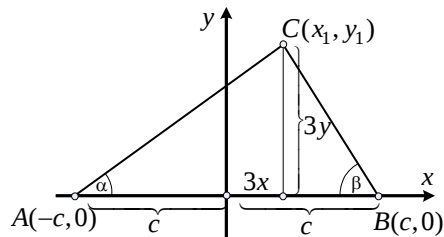
$$x = \frac{-c + c + x_1}{3} = \frac{x_1}{3} \quad \text{т.е.} \quad x_1 = 3x$$

и

$$y = \frac{0 + 0 + y_1}{3} = \frac{y_1}{3} \quad \text{т.е.} \quad y_1 = 3y.$$

Значи, $C(3x, 3y)$.

Проекцијата на точката C врз x -оската ќе ја означиме со $C'(3x, 0)$.

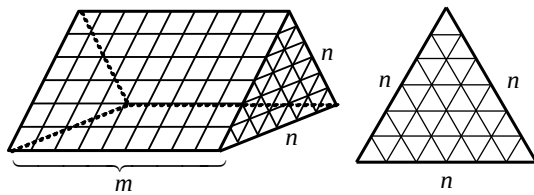


Ако точката C припаѓа на првиот или третиот квадрант, од правоаголниот триаголник $BC'C$ имаме $\operatorname{tg} \beta = \frac{3y}{c-3x}$, а од правоаголниот триаголник $AC'C$ имаме $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3y}{c+3x}$. Според тоа, од равенството $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -k^2$ добиваме

$$\frac{3y}{c+3x} \cdot \frac{3y}{c-3x} = -k^2 \text{ т.е. } \frac{x^2}{(\frac{c}{3})^2} - \frac{y^2}{(\frac{ck}{3})^2} = 1.$$

Аналогно се разгледува и случајот кога точката C припаѓа на втор или четврт квадрант.

3. Правилна тристрана призма со основен раб n и бочен раб m (m и n се природни броеви) прво е обоена а потоа разделена на слични призми со основен раб и бочен раб со должини 1 (како на цртежот). Пресметај колку призми ќе останат на кои сите сидови им се необоени.



Решение. Во триаголникот со страна n има n^2 мали триаголници. Навистина, тргнувајќи од основата кон врвот има

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

триаголници свртени со врвот кон внатрешноста и

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

триаголници свртени со врвот на надвор. Според тоа, призмата е разделена на

$$p_{vk} = m \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = m \cdot n^2$$

мали призми.

Од сите мали призми, барем еден обоен сид ќе имаат оние што се наоѓаат на двете основи и на на бочните страни на призмата т.е.

$$\begin{aligned} p_{ob} &= 2n^2 + (m-2) \cdot n + (m-2)(n-1) + (m-2)(n-2) \\ &= 2n^2 + (m-2)(3n-3) \end{aligned}$$

Според тоа, бројот p на необоените призми е

$$p = p_{vk} - p_{ob} = (m-2)(n^2 - 3n + 3).$$

4А. Пресметај го коефициентот пред $x^n y^n$ ако изразот

$$(1+x)^n (1+y)^n (x+y)^n$$

се развие според Биномната формула.

Решение. Според биномната формула

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad (1+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k \quad \text{и} \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Собираоци во производот $(1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n$ во кои се јавува $x^n y^n$ се

$$\binom{n}{k} x^k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \binom{n}{k} y^{n-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n.$$

Заради тоа, бараниот коефициент е $\binom{n}{0}^3 + \binom{n}{1}^3 + \dots + \binom{n}{n}^3$.

4Б. Разложи го на прости множители полиномот

$$P(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на обликот на полиномот

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^3 - 5x^2 - (x^3 + 2x^2 - 5x) - (x^2 + 2x - 5) \\ &= x^2(x^2 + 2x - 5) - x(x^2 + 2x - 5) - (x^2 + 2x - 5) \\ &= (x^2 - x - 1)(x^2 + 2x - 5) \end{aligned}$$

Нули на полиномот се

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Според тоа ,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$