Шефкет Арсланагиќ
Алија Муминагиќ

ПОВЕЌЕ РЕШЕНИЈА НА ЕДНА ГЕОМЕТРИСКА ЗАДАЧА

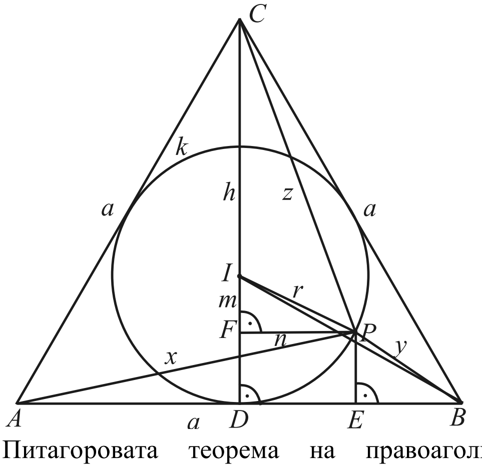
Во оваа статија ќе наведеме повеќе решенија на една геометриска задача за триаголник и во него впишана кружница.

Задача. Докажи дека за произволна точка P која припаѓа на впишаната кружница на рамностраниот триаголник ABC важи равенството

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{5a^2}{4}, \qquad (1)$$

каде a е должина на страната на триаголникот.

Решение 1. Да воведеме ознаки како на цртежот долу: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$; точката I е центар на впишаната кружница k во триаголникот ABC; h е висината на тој триаголник; $\overline{IC}=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$; точката D е подножје на висината h спуштена кон основата AB на триаголникот; $P\in k$; $\overline{ID}=\overline{IP}=r=\frac{1}{2}\overline{IC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$, каде r е радиус на k; $\overline{IF}=m\left(F\in ID\right)$; $\overline{FP}=n$; $\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$, $\overline{PC}=z$.



Применувајќи ја Питагоровата теорема на правоаголните триаголници $\Delta IFP, \Delta AEP, \Delta BEP$ и ΔCFP последователно, добиваме:

$$m^2+n^2=r^2, \qquad (2)$$

$$x^2=\overline{AE}^2+\overline{EP}^2=(\overline{AD}+\overline{DE})^2+\overline{EP}^2=(\frac{a}{2}+n)^2+(r-m)^2, \qquad (3)$$

$$y^2=\overline{BE}^2+\overline{EP}^2=(\overline{BD}-\overline{ED})^2+\overline{EP}^2=(\frac{a}{2}-n)^2+(r-m)^2, \qquad (4)$$

$$z^2=\overline{CF}^2+\overline{FP}^2=(\overline{CI}+\overline{IF})^2+\overline{FP}^2=(\frac{a\sqrt{3}}{3}+m)^2+n^2. \qquad (5)$$

Со собирање на равенствата (3), (4) и (5), и користејќи го (2) добиваме:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(\frac{a}{2}+n)^2+(r-m)^2+(\frac{a}{2}-n)^2+(r-m)^2+(\frac{a\sqrt{3}}{3}+m)^2+n^2\\&=\frac{5a^2}{6}+3(m^2+n^2)+2r^2-4rm+\frac{2}{3}am\sqrt{3}\\&=\frac{5a^2}{6}+5r^2-4\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot m+\frac{2}{3}am\sqrt{3}\\&=\frac{5a^2}{6}+5\cdot(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2=\frac{5a^2}{6}+\frac{5a^2}{12}=\frac{5a^2}{4}\end{aligned}$$

т.е. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{5a^2}{4}$**,** што требаше да се докаже.

Решение 2. Да воведеме ознаки како на долниот цртеж:

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a,\ \ \overline{IA}=\overline{IB}=\overline{IC}=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ \ \overline{IP}=r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\left(P\in k\right)\ \text{i}\ \measuredangle BIP=\varphi.$$

Ако ја примениме косинусната теорема на $\Delta AIP, \Delta BIP$ и ΔCIP, последователно, добиваме:

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2&=\overline{IP}^2+\overline{IA}^2-2\overline{IP}\cdot\overline{IA}\cos\measuredangle AIP,\\ \overline{PB}^2&=\overline{IP}^2+\overline{IB}^2-2\overline{IP}\cdot\overline{IB}\cos\measuredangle BIP,\\ \overline{PC}^2&=\overline{IP}^2+\overline{IC}^2-2\overline{IP}\cdot\overline{IC}\cos\measuredangle CIP,\end{aligned}$$

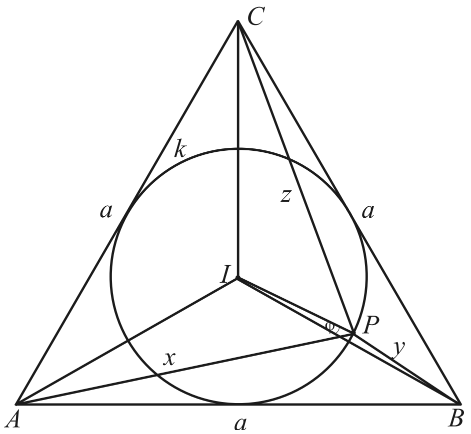
а отткука заради

$$\overline{IP}=r=\frac{a}{6}\sqrt{3},\ \overline{IA}=\overline{IB}=\overline{IC}=\frac{a}{3}\sqrt{3},\ \measuredangle AIP=120^0+\varphi,\ \measuredangle BIP=\varphi,\ \measuredangle CIP=120^0-\varphi$$

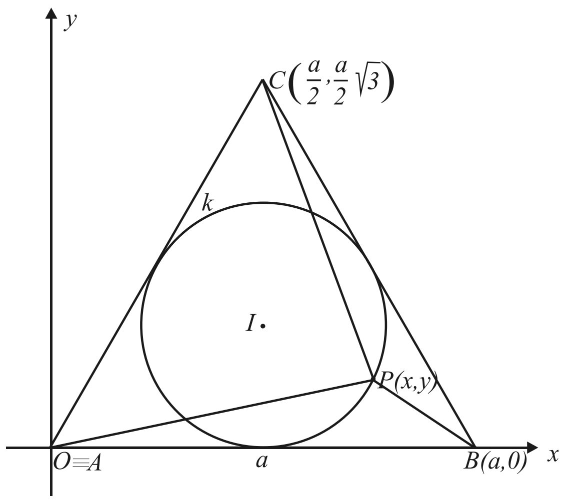
(бидејќи $\measuredangle AIB=\measuredangle BIC=\measuredangle AIC=120^0$) по собирањето на горните три равенства имаме:

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=3\cdot\frac{a^2}{12}+3\cdot\frac{a^2}{3}-3\cdot\frac{a^2}{3}[\cos(120^0+\varphi)+\cos\varphi+\cos(120^0-\varphi)]\\&=\frac{a^2}{4}+a^2-a^2(2\cos120^0\cos\varphi+\cos\varphi)\\&=\frac{5a^2}{4}-a^2(-\cos\varphi+\cos\varphi)=\frac{5a^2}{4}\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.



Решение 3. Да воведеме правоаголен координатен систем xOy со координатен почеток во врвот A на ΔABC. Тогаш $A\equiv O(0,0), B(a,0), C(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\sqrt{3})$ и $P(x,y)\in k$ (цртеж долу).



Лесно се добива дека $I(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{6})$ и $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Сега, равенката на кружницата k гласи:

$$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a\sqrt{3}}{6})^2=(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2$$

т.е.

$$12x^2-12ax+12y^2-4ay\sqrt{3}+3a^2=0\,. \qquad (*)$$

Бидејќи важи

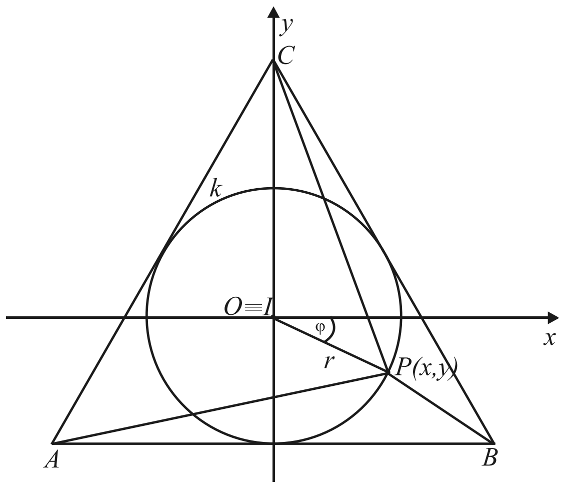
$$\overline{PA}^2=x^2+y^2,\ \overline{PB}^2=(x-a)^2+y^2,\ \overline{PC}^2=(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a\sqrt{3}}{2})^2\ ,$$

следува

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=x^2+y^2+x^2-2ax+a^2+y^2+x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2-ay\sqrt{3}+\frac{3a^2}{4}\\&=3x^2+3y^2-3ax-ay\sqrt{3}+2a^2\\&=\frac{(12x^2-12ax+12y^2-4ay\sqrt{3}+3a^2)+5a^2}{4}\overset{(*)}{=}\frac{5a^2}{4}\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

Решение 4. Во ова решение повторно ќе користиме аналитичка геометрија и тригонометрија. Да воведеме правоаголен коррдинатен систем xOy со координатен почеток во точката I - центар на впишаната кружница k во ΔABC (цртеж долу).



Имаме: $I\equiv O(0,0)$, $A(-\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{6}), B(\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{6})$, $C(0,\frac{a\sqrt{3}}{3})$. Радиусот на k е $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, па произволна точка $P\in k$ има координати $P\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)$, каде $\varphi=\measuredangle PIx$.

Бидејќи

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2&=(r\cos\varphi+\frac{a}{2})^2+(r\sin\varphi+\frac{a\sqrt{3}}{6})^2\\&=r^2\cos^2\varphi+ar\cos\varphi+\frac{a^2}{4}+r^2\sin^2\varphi+\frac{ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\frac{a^2}{12}\\&=r^2+ar\cos\varphi+\frac{ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\frac{a^2}{3}\end{aligned}$$

$$\overline{PB}^2=(r\cos\varphi-\frac{a}{2})^2+(r\sin\varphi+\frac{a\sqrt{3}}{6})^2=r^2-ar\cos\varphi+\frac{ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\frac{a^2}{3}$$

и

$$\overline{PC}^2=\left(r\cos\varphi\right)^2+(r\sin\varphi-\frac{a\sqrt{3}}{3})^2=r^2-\frac{2ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\frac{a^2}{3},$$

со собирање на горните равенства добиваме:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3r^2+a^2=3(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2+a^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5a^2}{4},$$

што требаше да се докаже.

Решение 5. Овој доказ е многу краток и елегантен, ако се знае една теорема од геометријата позната како **Теорема на Лајбниц**. Таа гласи:

Ако M е произволна точка од рамнината на ΔABC, а точката T е тежиште на тој триаголник, тогаш важи

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MT}^2+\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2. \tag{6}$$

Во нашата задача е $P\equiv M,\ I\equiv T$, ра је $\overline{MT}=\overline{PI}=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\overline{AT}=\overline{AI}=R$, $\overline{BT}=\overline{BI}=R$, $\overline{CT}=\overline{CI}=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, каде R е радиусот на опишаната кружница околу ΔABC. Сега, од (6) добиваме:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2+3(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5a^2}{4},$$

што требаше да се докаже.

Решение 6. За овој доказ потребно е да се знае една теорема од геометријата која е последица од генерализираната теорема на Љабниц (наместо ΔABC се зема многуаголникот $A_1A_2...A_n$ во Теоремата на Лајбниц, види [1], стр. 108-114) и која гласи:

Ако R е радиусот на опижаната кружница и r е радиусот на впишаната кружница во правилниот многуаголник $A_1A_2...A_n$, а M е произволна точка на впишаната кружница k во тој многуаголник, тогаш

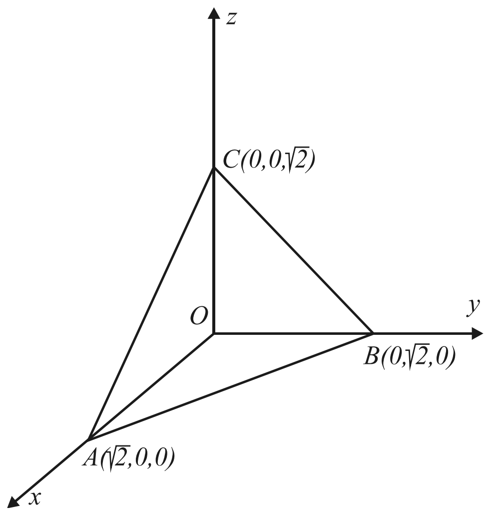
$$\overline{MA_1}^2+\overline{MA_2}^2+...+\overline{MA_n}^2=n(R^2+r^2). \tag{7}$$

Во нашата задача $M\equiv P$, $n=3,\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ им $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, па како $A_1=A, A_2=B,$ $A_3=C$ добиваме:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3[(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2]=3(\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{12})=3\cdot\frac{5a^2}{12}=\frac{5a^2}{4}.$$

Решение 7. Во овој доказ, заради полесно пресметување, ќе претпоставиме дека $a=2$, па треба да докажеме дека важи равенството:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 5. \qquad (1')$$



Да воведеме просторен координатен систем $Oxyz$ како на горниот цртеж, така што $O(0,0,0), A(\sqrt{2},0,0), B(0,\sqrt{2},0)$ и $C(0,0,\sqrt{2})$. Не е тешко да се докаже дека триаголникот со темиња A, B и C лежи во рамнината чија равенка е $x+y+z=\sqrt{2}$. (Равенка на рамнина низ три дадени точки). Јасно е дека во таа рамнина лежи и впишаната кружница k во ΔABC. Точките со координати $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ и $(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ припаѓаат на таа кружница k како и на сферата со центар во $O(0,0,0)$ и равенка $x^2+y^2+z^2=1$. Така, кружницата k е пресек на сферата $x^2+y^2+z^2=1$ и рамнината $x+y+z=\sqrt{2}$. Точката $P(x,y,z)$ припаѓа на таа рамнина и на сферата, па за нејзините координати x,y,z се исполнети двете равенки и затоа:

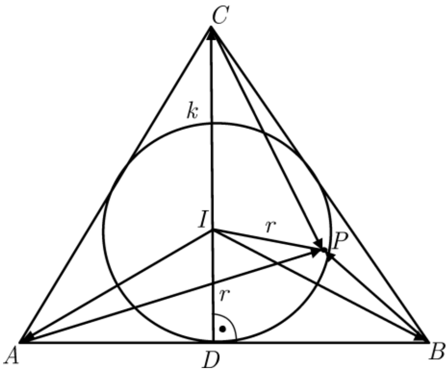
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= [(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2]+[x^2+(y-\sqrt{2})^2+z^2]+[x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2]\\ &= 3(x^2+y^2+z^2)-2\sqrt{2}(x+y+z)+6\\ &= 3\cdot 1-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+6=3-4+6=5\end{aligned}$$

а ова е (1').

Решение 8. И во овој случај, заради полесно пресметување ќеземеме $a=2$, и ќе докажеме дека важи равенството:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 5. \qquad (1'')$$

За овој доказ ќе користиме вектори.



Од горниот цртеж имаме:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IC}\ ,$$

а оттука

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IP} - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA}\ ,$$

т.е.

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{IP}|^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IA} + |\overrightarrow{IA}|^2\ .$$

Ставајќи $|\overrightarrow{AP}| = \overline{PA}$ и $|\overrightarrow{IA}| = \overline{IA}$:

$$\overline{PA}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IA}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IA}\ ,$$

и аналогно:

$$\overline{PB}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IB}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IB}\ ,$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IC}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IC}\ .$$

По собирањето на последниве три равенства добиаме:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3\overline{IP}^2 + \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})\ . \qquad (8)$$

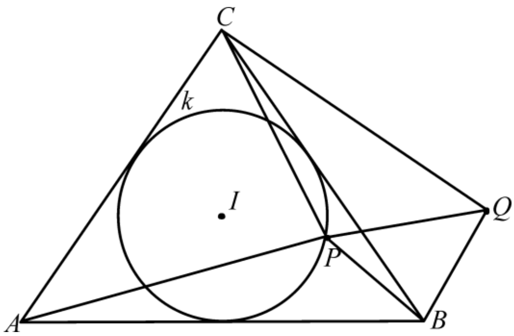
Бидејќи (црт. 6) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (заради $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ID} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$, итн. водејќи сметка дека $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$), $\overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ и $\overline{IP} = r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, имаме од (8):

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3 \cdot (\frac{1}{3}\sqrt{3})^2 + 3 \cdot (\frac{2}{3}\sqrt{3})^2 = 3 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{12}{9} = 1 + 4 = 5\ .$$

Со ова равенството ($1''$) е докажано.

Последица 1. Плоштината на триаголникот со должини на страни $\overline{PA}, \overline{PB}$ и $\overline{PC}$ е $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Доказ. Избираме точка Q надвор од ΔABC така што $\overline{BQ}=\overline{BP}$ и $\overline{CQ}=\overline{AP}$. Тогаш ΔBQC и ΔBPA се складни (правило ССС) па важи $\measuredangle ABP=\measuredangle CBQ$, и оттука $\measuredangle PBQ=\measuredangle CBQ+\measuredangle CBP=\measuredangle ABP+\measuredangle CBP=60^0$ што значи дека ΔPBQ е рамностран. Сега $\overline{PQ}=\overline{PB}$ па ΔPQC има страни еднакви на $\overline{PA}, \overline{PB}$ и $\overline{PC}$.



Ако конструираме слично уште уште две точки, на пример R и S, надвор од триаголникот кај страните AC и AB, добиваме шестаголник чија плоштина е еднаква на збирот од две плоштини на ΔABC или на три плоштини (на ΔPQC и уште два кои ги добиваме ако ги вклучиме точките R и S чии должини на страните се исто така еднакви на $\overline{PA}, \overline{PB}$ и $\overline{PC}$) плус три плоштини на рамностраните триаголници со страни $\overline{PA}, \overline{PB}$ и $\overline{PC}$, соодветно. Според тоа имаме:

$$3P_{\Delta PQC}=2P_{\Delta ABC}-(P_{\Delta}(\overline{PA})+P_{\Delta}(\overline{PB})+P_{\Delta}(\overline{PC})),$$

и одовде заради:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{2^2}{4}\sqrt{3}=\sqrt{3},$$

$$P_{\Delta}(\overline{PA})=\frac{\overline{PA}^2}{4}\sqrt{3};\quad P_{\Delta}(\overline{PB})=\frac{\overline{PB}^2}{4}\sqrt{3};\quad P_{\Delta}(\overline{PC})=\frac{\overline{PC}^2}{4}\sqrt{3},$$

добиваме:

$$3P_{\Delta PQC}=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2).$$

Заради $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=5$ имаме:

$$3P_{\Delta PQC}=2\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{ т.е.}$$

$$3P_{\Delta PQC}=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

што требаше да се докаже.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Arslanagić, Š., *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.
[2] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
[3] Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ