XI олимпијада

1. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $z = n^4 + a$ е сложен.

Решение. Нека $a = 4k^4$, каде што $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Тогаш

$$z = n^4 + a = n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2) - (2nk)^2$$
$$= (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk)$$

и притоа важи

$$n^2 + 2k^2 - 2nk = (n-k)^2 + k^2 \geq k^2 > 1;$$
$$n^2 + 2k^2 + 2nk = (n+k)^2 + k^2 > k^2 > 1.$$

Јасно, бројот z е сложен бидејќи може да се запише како производ на два природни броја поголеми од 1.

2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални константи, x е реална променлива и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2+x)}{2} + \frac{\cos(a_3+x)}{2^2} + ... + \frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Ако $f(x_1) = f(x_2) = 0$, тогаш $x_1 - x_2 = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Докажи!

Решение. Имаме

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos(a_i+x)}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos[(a_i+x_1)+(x-x_1)]}{2^{i-1}}$$
$$= \cos(x - x_1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos(a_i+x_1)}{2^{i-1}} - \sin(x - x_1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(a_i+x_1)}{2^{i-1}}$$
$$= \cos(x - x_1) f(x_1) - \sin(x - x_1) f(\tfrac{\pi}{2} + x_1).$$

Од условот на задачата имаме $f(x_1) = 0$ и

$$f(-a_1) = \cos 0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\cos(a_i - a_1)}{2^{i-1}} \geq 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^n} > 0.$$

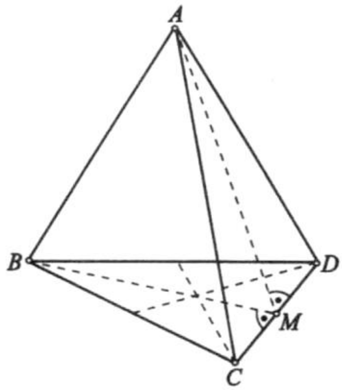
Значи, $f(x) \not\equiv 0$ и $f(\tfrac{\pi}{2} + x_1) \neq 0$.

Бидејќи $f(x_2) = 0$, добиваме $\sin(x_2 - x_1) = 0$, т.е. $x_2 - x_1 = m\pi$.

3. За $k = 1, 2, 3, 4, 5$ најди потребен и доволен услов кој го задоволува бројот $a > 0$ за да постои тетраедар чии k рабови имаат должина a, а останатите $6 - k$ рабови да имаат должина 1.

Решение. а) $k = 1$. Нека $\overline{AB} = a$,

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1.$$



Точката M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $\overline{AB}<\overline{AM}+\overline{BM}$, мора да е исполнето $a<\sqrt{3}$. Овој услов е и доволен. Навистина, ако $a<\sqrt{3}$, тогаш постои триаголник ABM со должини на страни $\overline{AB}=a$, $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а C и D се точки на n такви што $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{1}{2}$. Тогаш

$$\overline{AB}=a \text{ и } \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1.$$

б) $k=2$. Постојат две можности.

1) Рабовите со должина a почнуваат во исто теме. Нека $\overline{AC}=\overline{AD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$, а M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ и $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Од $\overline{AB}-\overline{BM}<\overline{AM}<\overline{AB}+\overline{BM}$, го добиваме неравенството

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}<1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

кое е еквивалентно на неравенството $\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Последното неравенство е и доволен услов. Во овој случај постои $\triangle ABM$ со страни $\overline{AB}=1$, $\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$, $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а точките C и D припаѓаат на n и $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{1}{2}$. Останува да се провери дека рабовите на тетраедарот ги исполнуваат условите $\overline{AC}=\overline{AD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$.

2) Рабовите со должина a се разминувачки. Нека

$$\overline{AB}=\overline{CD}=a, \quad \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$$

и точката M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Неравенството $\overline{AB}<\overline{MA}+\overline{MB}$ е еквивалентно со неравенството $a<\sqrt{2}$.

Последниот неравенство е и доволен услов. Навистина, ако $a<\sqrt{2}$ тогаш постои триаголник ABM со страни $\overline{AB}=a$, $\overline{MA}=\overline{MB}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а C и D се такви точки на n, што $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{a}{2}$. Останува да се провери дека

$$\overline{AB}=\overline{CD}=a \text{ и } \overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1.$$

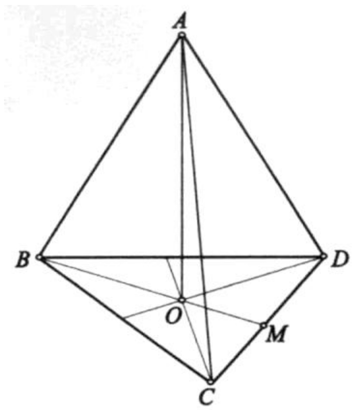
Значи, за $k=2$, потребен и доволен услов е $a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

в) $k=3$. Доволно е да се разгледаат следниве два случаи.

1) Рабовите со должина a излегуваат од исто теме. Ако

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a \text{ и } \overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1,$$

тогаш $\overline{AC}>\overline{CO}$ (бидејќи $\triangle AOC$ е правоаголен), каде O е средна точка на триаголникот BCD. Од $\overline{CO}=R=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $a>R$, следува $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ова неравенство е и доволен услов. Нека BCD е рамностран триаголник со страна 1, а n е нормалата на рамнината BCD во точката O. Точката A припаѓа на нормалата n така што $\overline{OA}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}$. Сега треба да се провери дали $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a$.



2) Рабовите со должина a се страни на рамностран триаголник. Нека $\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=1$. Како и во претходниот случај мора да е исполнето $\overline{AC}>\overline{CO}$, $\overline{CO}=R$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $R<1$, т.е. $\frac{a}{\sqrt{3}}<1$, $a<\sqrt{3}$.

Лесно се докажува дека овој услов е и доволен.

г) $k=4$. Во овој случај ќе разгледаме тетраедар сличен на дадениот со коефициент на сличност $k=\frac{1}{a}$. Новиот тетраедар има четири рабови со должина 1 и два раба со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа потребен и доволен услов е $\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}}$, т.е. $a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

д) $k=5$. Разгледуваме сличен тетраедар на дадениот со коефициент на сличност $\frac{1}{a}$. Тој има пет рабови со должина 1 и еден раб со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа, потребен и доволен услов $\frac{1}{a}<\sqrt{3}$, т.е. $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Нека отсечката AB е дијаметар на кружницата γ и $C\in\gamma$ е таква што $C\not\equiv A$ и $C\not\equiv B$. Точката D е ортогонална проекција на точката C врз отсечката AB. Трите кружници γ_1,γ_2 и γ_3 ја допираат AB така што γ_1 е вписана во триаголникот ABC, а γ_2 и γ_3 ја допираат отсечката CD и кружницата γ. Докажи дека γ_1,γ_2 и γ_3 имаат и друга заедничка тангента.

Решение. *Прв начин.* Нека O_2 е центар на γ_2, $O_2H_2\perp AB$ и H_2 е меѓу B и D. Радиусот на γ нека е R.

Ако воведеме ознаки $\overline{AD}=x$ и $\overline{O_2H_2}=r$ добиваме

$$\overline{AH_2}=r+x \text{ и } \overline{OO_2}=\sqrt{\overline{OH_2}^2+r^2}=\sqrt{(x+r-R)^2+r^2}.$$

Но, γ и γ_2 се допираат па е $\overline{OO_2}+\overline{O_2K}=R$, односно

$$\sqrt{(x+r-R)^2+r^2}=R-r \text{ т.е. } (x+r-R)^2=R^2-2Rr$$

и според тоа

$$\overline{AH_2}^2=(x+r)^2=[(x+r-R)+R]^2=2Rx.$$

Понатаму, од $\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}=2Rx=\overline{AH_2}^2$, добиваме $\overline{AC}=\overline{AH_2}$.

Ако со O_3 го означиме центарот на γ_3 и $O_3H_3\perp AB$, тогаш аналогно се докажува дека $\overline{BC}=\overline{BH_3}$. Нека O_1 е средина на отсечката O_3O_2, $O_1H_1\perp AB$. Ќе покажеме дека O_1 е центар на γ_1. Бидејќи O_1H_1 е средна линија на трапезот $O_3H_3H_2O_2$, точно е равенството

$$\overline{O_1H_1}=\tfrac{1}{2}(\overline{O_3H_3}+\overline{O_2H_2}).$$

Понатаму, $\overline{O_3H_3}=\overline{H_3D}$, CD е тангента на γ_2 и γ_3, $\overline{O_2H_2}=\overline{H_2D}=r$. Според тоа

$$\overline{O_1H_1}=\tfrac{\overline{O_3H_3}+\overline{O_2H_2}}{2}=\tfrac{\overline{H_3D}+\overline{H_2D}}{2}=\tfrac{\overline{H_3H_2}}{2}=\tfrac{\overline{AH_2}+\overline{BH_3}-\overline{AB}}{2}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$$

$$\overline{AH_1}=\tfrac{\overline{AH_3}+\overline{AH_2}}{2}=\tfrac{\overline{AH_2}+\overline{AB}-\overline{BH_3}}{2}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}.$$

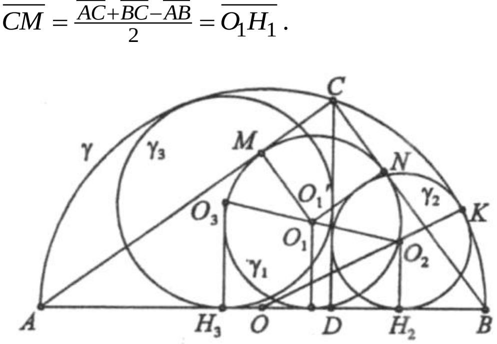
Нека $O_1^{'}$ е центар на γ_1, $O_1^{'}H_1^{'}\perp AB$, $O_1^{'}M\perp AC$, $O_1^{'}N\perp BC$ и $H_1^{'}, M, N$ се допирни точки на $\triangle ABC$ и γ_1. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{AH'_1}+\overline{AM}&=(\overline{AB}-\overline{BH_1^{'}})+(\overline{AC}-\overline{MC})=\overline{AC}+\overline{AB}-(\overline{MC}+\overline{BH_{11}^{'}})\\&=\overline{AC}+\overline{BC}-(\overline{CN}+\overline{BN})=\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}.\end{aligned}$$

бидејќи $\overline{MC}=\overline{CN}$ и $\overline{BH_1^{'}}=\overline{BN}$ (разгледај ги тангентите од точките B и C кон кружницата). Според тоа,

$$\overline{O_1^{'}H_1^{'}}=\overline{O_1^{'}M}=\overline{CM}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}=\overline{O_1H_1}.$$

Ако триаголникот ABC не е рамнокрак тогаш $O_2O_3 \not\parallel AB$, од што следува дека точките O_1 и O'_1 се совпаѓаат. Ако триаголникот ABC е рамнокрак, тогаш радиусите на γ_1, γ_2 и γ_3 се еднакви на $(\sqrt{2}-1)R$.

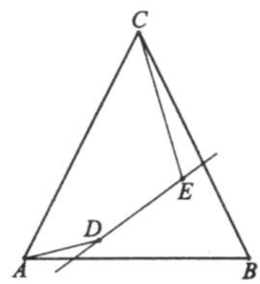


Докажавме дека O_1, O_2 и O_3 лежат на една права. Понатаму, правата која е симетрична на тангентата на кружница во однос на правата која минува низ центарот повторно е тангента на кружницата. Според тоа, правата симетрична со AB во однос на правата $O_1O_2 \equiv O_2O_3$ е бараната втора тангента.

5. Во рамнина се дадени $n, (n > 4)$ точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Докажи дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници кои имаат темиња во четири од дадените точки.

Решение. *Лема.* Во рамнина се дадени пет точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Тогаш постојат четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник.

Доказ. Ако конвексното затворање на дадените точки е петаголник, тогаш било кои четири точки се темиња на конвексен четириаголник. Ако конвексното затворање на дадените точки е четириаголник, тогаш тој е бараниот четириаголник. Нека конвексното затворање е триаголник и точките A, B, C од дадените се темиња на тој на триаголник. Две точки D и E од дадените, лежат во внатрешноста на тој триаголник, а правата DE сече две од страните на тој триаголник во внатрешни точки. Нека се тоа на пример AB и BC (цртеж десно). Тогаш точките A, C, D и E се темиња на конвексниот четириаголник. ■



Ги разгледуваме сите комбинации од по 5 точки. Нив ги има $\binom{n}{5}$. Секоја комбинација содржи подмножество од четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник. Секое теме на четириаголникот е вклучено во $n-4$ комбинации. Значи, постојат барем $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ конвексни четириаголници, кои припаѓаат на даденото множество точки. Останува да докажеме дека

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geq \binom{n-3}{2}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0.$$

кое е точно за секој $n > 4$. Знак за равенство важи ако и само ако $n = 5$ или $n = 6$.

6. Докажи дека, ако $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Најди потребни и доволни услови при кои важи знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Воведуваме ознаки

$$u_1 = \sqrt{x_1 y_1} + z_1,\ u_2 = \sqrt{x_2 y_2} + z_2,\ v_1 = \sqrt{x_1 y_1} - z_1 \text{ и } v_2 = \sqrt{x_2 y_2} - z_2 .$$

При тоа u_1, u_2, v_1 и v_2 се позитивни реални броеви. Понатаму, од

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 &= (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2})^2 + (\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1})^2 - (z_1 + z_2)^2 \\ &= (\sqrt{x_1 y_1} + z_1 + \sqrt{x_2 y_2} + z_2)(\sqrt{x_1 y_1} - z_1 + \sqrt{x_2 y_2} - z_2) + (\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1})^2 \\ &= (u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + (\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1})^2\end{aligned}$$

следува

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \geq (u_1 + u_2)(v_1 + v_2),$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

Доволно е да се докаже неравенството $\frac{8}{(u_1+u_2)(v_1+v_2)} \leq \frac{1}{u_1 v_1} + \frac{1}{u_2 v_2}$, односно

$$8u_1 u_2 v_1 v_2 \leq (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)(u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

Последното неравенствои е точно, бидејќи

$$2\sqrt{u_1 u_2} \leq u_1 + u_2,\ 2\sqrt{v_1 v_2} \leq v_1 + v_2 \text{ и } 2\sqrt{u_1 v_1 u_2 v_2} \leq u_1 v_1 + u_2 v_2 .$$

Јасно, знак за равенство важи ако $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

Со тоа даденото неравенство е докажано.

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1 y_2 = x_2 y_1$, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.