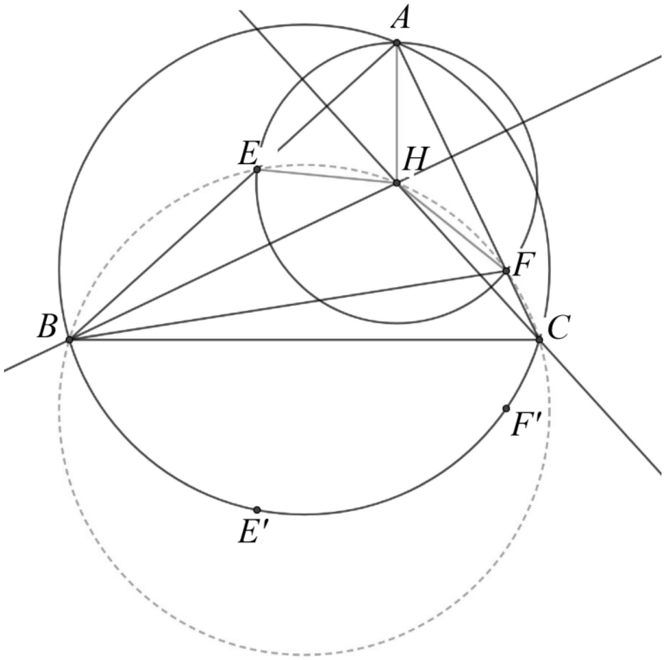
JMMO 2022

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$a^2+b^2+1=c!.$$
Решение. За секој цел број x важи $x\equiv 0,1 \pmod 4$, па затоа
$$c!=a^2+b^2+1\equiv 1,2,3 \pmod 4.$$
Оттука следува дека $c\leq 3$, бидејќи за $c\geq 4$ важи $c!\equiv 0 \pmod 4$. Со непосредна проверка за $c=1,2,3$ се добива дека во множеството природни броеви единствени решенија на дадената равенка се
$$(a,b,c)=(1,2,3) \text{ и } (a,b,c)=(2,1,3).$$

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи дека
$$\frac{a^3}{a^2+1}+\frac{b^3}{b^2+1}+\frac{c^3}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$
Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $a^2+1\geq 2a$, па затоа $\frac{a}{a^2+1}\leq\frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{a}{a^2+1}\geq-\frac{1}{2}$. Аналогно $-\frac{b}{b^2+1}\geq-\frac{1}{2}$ и $-\frac{c}{c^2+1}\geq-\frac{1}{2}$. Сега, левата страна на даденото неравенство ја трансформираме и ако ги искористиме последните три неравенства добиваме
$$\begin{aligned}\frac{a^3}{a^2+1}+\frac{b^3}{b^2+1}+\frac{c^3}{c^2+1}&=\frac{a^3+a-a}{a^2+1}+\frac{b^3+b-b}{b^2+1}+\frac{c^3+c-c}{c^2+1}\\&=a-\frac{a}{a^2+1}+b-\frac{b}{b^2+1}+c-\frac{c}{c^2+1}\\&=3-\frac{a}{a^2+1}-\frac{b}{b^2+1}-\frac{c}{c^2+1}\\&\geq 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$
што и требаше да се докаже.

3. Нека ABC е остроаголен триаголник со ортоцентар H. Кружницата Γ со центар H и радиус AH по втор пат ги сече правите AB и AC во точките E и F, соодветно. Нека E',F',H' се соодветно сликите на точките E,F,H при осната симетрија во однос правата BC. Докажи дека точките A,E',F',H' лежат на иста кружница.
Решение. Ќе докажеме дека точките E',F',H' припаѓаат на опишаната

кружница ω околу триаголникот ABC.



Имаме $\overline{AH} = \overline{EH} = \overline{FH}$, $CH \perp AB$ и $BH \perp AC$. Оттука следува дека BH и CH се симетрали на отсечките AF и AE, соодветно. Затоа важи $\overline{AB} = \overline{FB}$ и $\overline{AC} = \overline{EC}$. Сега имаме

$$\measuredangle CBH = \measuredangle CAH = \measuredangle EAC - \measuredangle EAH = \measuredangle AEC - \measuredangle AEH = \measuredangle CEH,$$

од каде што следува дека четириаголникот $BEHC$ е тетивен. Аналогно, четириаголникот $BFHC$ е тетивен. Како слика на E при осна симетрија во однос на BC за точката E' важи

$$\measuredangle BE'C = \measuredangle BEC = \measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC,$$

од каде заклучуваме дека E' припаѓа на ω. Аналогно се докажува дека F' припаѓа на ω. Конечно, имаме

$$\measuredangle BH'C = \measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC,$$

што значи дека и H' припаѓа на ω, со што тврдењето е докажано.

4. Рамностран триаголник T, со страна 2022, е поделен со прави паралелни на неговите страни на рамнострани триаголници со страна 1. Триаголникот се покрива со фигурите прикажани на долните цртежи, кои се составени од по 4 рамнострани триаголници со страна 1 и при покривањето тие може да се ротираат за агол $k \cdot 60^\circ, k = 1,2,3,4,5$.

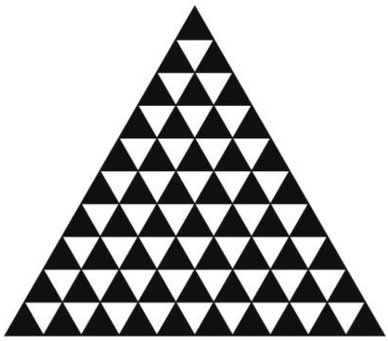
1 2 3 4

Покривањето ги задоволува следниве услови:

- Може да нема фигура од некој вид и да има повеќе фигури од некој вид.
- Триаголниците од фигурите се поклопуваат со триаголниците на кои е поделен триаголникот T .
- Никои две фигури не се преклопуваат и никоја фигура не излегува надвор од триаголникот T .
- Целиот триаголник T е покриен.

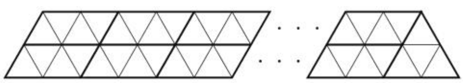
Кој е најмалиот можен број фигури од типот 1 кои се искористени при вакво покривање?

Решение. Триаголниците на кои е поделен T ги боиме наизменично со црна и бела боја, при што триаголниците во темињата на T се обоени црно (види го цртежот десно за триаголник со страна 10). Притоа фигурите од вид 2, 3 и 4 ќе покриваат по 2 бели и 2 црни полиња, а фигурата од тип 1 покрива 3 полиња од една боја и 1 поле од друга боја. Последното може да се види од долните цртежи на кои шрафираните полиња се во едан боја, а белите полиња во друга боја.



1 2 3 4

Од друга страна во секој ред на T бројот на црните триаголници е за 1 поголем од бројот на белите триаголници (секој ред започнува и завршува со црн триаголник, а триаголниците по боја наизменично се менуваат). Според тоа, во T има 2022 црни полиња повеќе од бели, па затоа мора да се употребат најмалу $\frac{2022}{2}=1011$ фигури од типот 1. На следниот вртеж е прикажано покривањето на два реда со една фигура од тип 1 и фигури од тип 2.



Значи, постои покривање со точно 1011 фигури од тип 1.

5. Нека n е природен број таков што $n^5+n^3+2n^2+2n+2$ е точен куб. Докажи дека $2n^2+n+2$ не е точен куб.

Решение. Нека претпоставиме дека $n^5+n^3+2n^2+2n+2$ и $2n^2+n+2$ се точни кубови, односно дека постојат природни броеви x и y такви што

$$n^5+n^3+2n^2+2n+2=x^3,$$
$$2n^2+n+2=y^3.$$

Тогаш

$$x^3-y^3=n^5+n^3+n=n(n^4+2n^2+1-n^2)=n(n^2+n+1)(n^2-n+1),$$

па затоа

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=n(n^2+n+1)(n^2-n+1).$$

Производот на десната страна на последното равенство е делив со 3. Навистина, ако $n=3k$ тогаш првиот множител е делив со 3, ако $n=3k+1$, тогаш вториот множител е делив со 3, а за $n=3k+2$ третиот множител е делив со 3. Според тоа, $3|x-y$ или $3|x^2+xy+y^2$. Но, од $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy$ следува дека $3|x^2+xy+y^2$ ако и само ако $3|x-y$. Според тоа, во случајот секако важи $3|x-y$ и притоа важи и $3|x^2+xy+y^2$, што значи дека $9|x^3-y^3$.

Од горните разгледувања следува дека $9|n(n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Понатаму, никои два од броевите n, n^2+n+1 и n^2-n+1 не се истовремено деливи со 3 (Зошто?), па затоа можни се следниве случаи.

Случај 1. Ако $9|n$, тогаш $x^3=n^5+n^3+2n^2+2n+2\equiv 2 \pmod 9$, што не е можно бидејќи куб на природен број при делење со 9 не дава остаток 2.

Случај 2. Ако $9|n^2+n+1$, тогаш $a(a+1)=a^2+a\equiv 8 \pmod 9$, но со непосредна проверка се покажува дека производ на два последователни природни броја при делење со 9 не дава остаток 8.

Случај 3. Ако $9|n^2-n+1$, тогаш $a(a-1)=a^2-a\equiv 8 \pmod 9$, но со непосредна проверка се покажува дека производ на два последователни природни броја при делење со 9 не дава остаток 8.