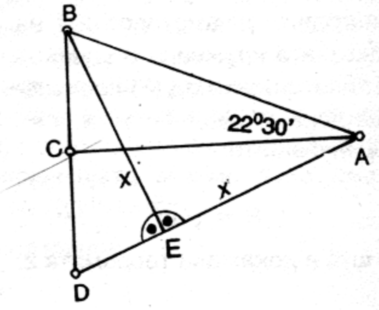
Драгољуб Милошевиќ
Прањани

ДВЕ ТЕОРЕМИ ВО ВРСКА СО ПРАВОАГОЛНИОТ ТРИАГОЛНИК

Во врска со правоаголниот триаголник можат да се докажат многу теореми. Овде ќе примениме две од нив.

Теорема 1. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник е c, а еден внатрешен агол $22^0 30'$, тогаш плоштината на овој триаголник е $\frac{c^2\sqrt{2}}{8}$.

Доказ: Нека е даден правоаголниот триаголник ABC, со хипотенуза c и остар агол $\alpha=22^0 30'$ (црт.1). Да нацртаме триаголник ACD симетричен на дадениот во однос на катетата AC. Висината на $\triangle ABD$ нека е BE. Триаголникот ABE е правоаголен и рамнокрак (Зошто?). Со примена на Питагоровата теорема на овој триаголник добиваме $BE^2+EA^2 = AB^2$, т.е.



Црт. 1

$x^2+x^2 = c^2$, од каде што е

$$x = \frac{c}{\sqrt{2}} \text{ или } x = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Плоштината на дадениот $\triangle ABC$ е еднаква на половината од плоштината на $\triangle ABC$, па е $P \frac{1}{2} \frac{AD\cdot BE}{2}$, т.е. $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{c\cdot c\sqrt{2}}{4}$, или $R = \frac{c^2\sqrt{2}}{8}$, што требаше да се докаже.

Теорема 2. Ако во правоаголниот триаголник еден агол е 15^0, тогаш радиусот на опишаната кружница е еднаков на геометриската средина на катетите.

Доказ 1. Триаголникот ACD е симетричен на дадениот триаголник ABC (црт. 2). Нека е $BE \perp AD$ ($E \in AD$). Триаголниците ABC и BDE се слични
па е $\overline{BD}:\overline{AB} = \overline{BE}:\overline{AC}$, т.е.

$2a : c = \overline{BE} : b$ . . . . (1)

Бидејќи во секој правоаголен триаголник спроти агол од 30^0 лежи страна што е двапати пократка од хипотенузата, заклучуваме дека:

$\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{c}{2}$ . . . . (2)

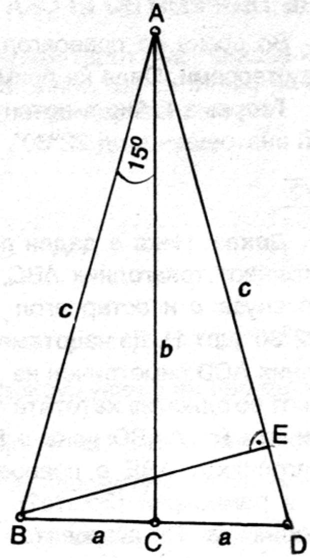
од релациите (1) и (2) следува

$2a{:}c = \frac{c}{2} : b$, т.е. $\frac{c^2}{4} = ab$. . . . (3)

Бидејќи во секој правоаголен триаголник дијаметарот $2R$ на опишаната кружница е еднаков на хипотенузата од (3) произлегува дека $R^2 = ab$, а оттука по коренувањето

$$R = \sqrt{ab}$$

со што е докажана теоремата 2.



Доказ 2. Плоштината на триаголникот ABD (црт. 2) е еднаква на $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{BE}}{2}$, но е еднаква и на $\frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2}$. (Зошто?).

Поради тоа имаме: $\overline{AD} \cdot \overline{BE} = \overline{BD} \cdot \overline{AC}$, односно $2R \cdot R = 2ab$

(бидејќи $\overline{BE} = \frac{c}{2} = R$, $\overline{AD} = c = 2R$, $\overline{BD} = 2a$ и $\overline{AC} = b$). Врз основа на последната релација добиваме дека е $R^2 = ab$, т.е. $R = \sqrt{ab}$, што значи дека навистина радиусот на опишаната кружница е геометриска средина на катетите.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус