ПИТАГОРЕЈСКА ТЕОРИЈА ПРОПОРЦИЈА

мр Мирослава Михајлов, **Београд**

При разматрању односа међу бројевима, Питагорејци су створили пропорцију као једнакост односа.

Ако су a, b, c и d четири броја они образују:

- **аритметичку пропорцију** ако је $b-a=d-c$;
- **геометријску пропорцију** ако је $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$;
- **хармонијску пропорцију** ако је $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$.

Ако се посматрају пропорције са три броја a, b, c, онда они образују:

- **аритметичку пропорцију** ако је $b-a=c-b$, тј. $b=a+c$;
- **геометријску пропорцију** ако је $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$, тј. $b=\sqrt{ac}$;
- **хармонијску пропорцију** ако је $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$, тј. $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ или $b=\frac{2ac}{a+c}$.

Вероватно је Платон сазнао за ове пропорције од Архита из Тарента за време своје прве посете Великој Грчкој. Еудокс и непосредни Платонови ученици повећали су њихов број на 6 па су затим новопитагорејци у 1. веку пре н.е. открили још 4 заокружујући број пропорција на 10. Преосталих 7 типова пропорција су:

- $\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a}$, као на пример, 2, 5, 6;
- $\frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a}$, као на пример, 6, 9, 11;
- $\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{b}$, као на пример, 2, 8, 12;
- $\frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}$, као на пример, 4, 6, 8;
- $\frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}$, као на пример, 2, 4, 6;
- $\frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}$, као на пример, 10, 19, 25;
- $\frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$, као на пример, 2, 3, 5.

Применом данашњег алгебарског апарата наведене пропорције се врло лако своде на једноставније законитости одређивања бројева који су у датој пропорцији. Тако је, на пример:

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow a(b-a)=c(c-b)\Leftrightarrow ab-a^2=c^2-cb$$
$$\Leftrightarrow ab+cb=a^2+c^2\Leftrightarrow b(a+c)=a^2+b^2$$

тј.

$$(*) \qquad b = \frac{a^2 + b^2}{a + c} \Leftrightarrow b = \frac{(a + c)^2 - 2ac}{a + c},$$

па закључујемо да су (природни) бројеви a, b, c у датој пропорцији ако је $(a + c) \mid 2ac$, при чему се b одређује по формули $(*)$. Сада се лако могу одредити и други триплети бројева који су у датој пропорцији (на пример $3, 5, 6, \ldots$). На сличан начин се долази до еквивалентних релација у осталим пропорцијама:

- $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow c = \dfrac{b^2 + ab - a^2}{b} \wedge b \mid a^2$ (на пример $2, 4, 5$);
- $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow a = \dfrac{b^2 + bc - c^2}{b} \wedge b \mid c^2$ (на пример $1, 4, 6$);
- $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow b = \dfrac{2ac - a^2}{c} \wedge c \mid a^2$ (на пример $6, 8, 9$);
- $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow c = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a} \wedge a \mid b^2$ (на пример $4, 6, 7$);
- $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow b = \dfrac{c^2 - ac + a^2}{c} \wedge c \mid a^2$ (на пример $6, 7, 9$);
- $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow c = a + b.$

Овај последњи тип је веома важан јер се у његовом појављивању крије принцип образовања Фибоначијевог низа:

$$\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow c = a + b.$$

За $a = b = 1$ добијамо $c = 2$. Настављањем овог поступка добијамо Фибоначијев низ: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$.

Појам пропорције и из њега изведени појам симетрије, Грци су пуно користили у архитектури и уметности уопште. Тадашњи појам симетрије није оно што ми данас називамо симетријом у односу на осу (или тачку, или раван) већ она произилази из пропорције коју Грци зову „Аналогија “- сагласност између сваког дела и целине. Кад се сваки значајни део грађевине прикладно размери у односу на висину и ширину, ширину и дубину и када сви ти делови имају место у тоталној симетрији грађевине, онда добијамо склад. Аналогија је геометријска пропорција $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Она доминира у визуелним уметностима, посебно у архитектури .

Осим аналогије посебно је значајна и божанска пропорција или *златни пресек*. Познато је да су две величине у златном пресеку (или божанској пропорцији) ако је однос њихових дужина $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$, што означавамо са F.

Математички она се може поставити на следећи начин: дату дуж AB поделити тачком C тако да је $AC : CB = AB : AC$

Нека је $AC = a$ и $CB = b$. Тада је $a : b = (a + b) : a$, што је у ствари геометријска пропорција. Сређујући је, добијамо:

$$a^2 = ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Сменом $\frac{a}{b} = x$ добијамо квадратну једначину $x^2 - x - 1 = 0$, чији су корени $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Узимамо само позитиван коран $F = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$, тј. $a : b = 1,618\ldots$

Из једнакости $F^2 - F - 1 = 0$, добијамо

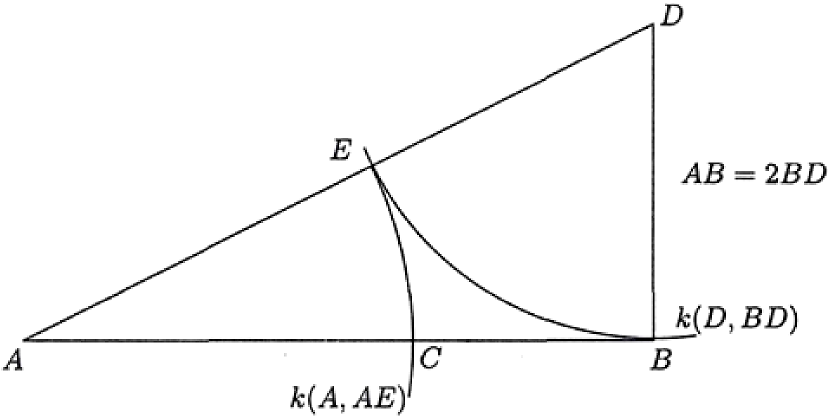
$$F^2 = F + 1 \tag{**}$$

одакле се множењем једнакости са F произвољан број пута добија

$$F^n = F^{n-1} + F^{n-2},$$

што значи да је сваки члан геометријске прогресије количника F једнак збиру два претходна. Строги доказ да је $F^n = F^{n-1} + F^{n-2}$, за сваки природан број n, изводимо математичком индукцијом.

Није познато како су Питагорејци конструисали златни пресек. Данас, ову конструкцију помоћу шестара и лењира изводимо на начин приказан на слици 1.



Слика 1.

Познато је да је Леонардо Филијус Боначи из Пизе познатији као Фибоначи, дефинисао (у 13. веку) низ бројева, који смо већ поменули; прва два члана овог низа су 1 и 1 а сваки следећи члан се добија као збир предходна два:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233\ldots$$

Може се видети да се вредности количника два узастопна члана врло брзо приближавају „идеалном“ броју F:

$$\frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,666666\ldots; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,6153846\ldots;$$
$$\frac{34}{21} = 1.6190476\ldots; \quad \frac{55}{34} = 1.617647\ldots; \quad \frac{89}{55} = 1,6181818\ldots; \quad \frac{144}{89} = 1.6179775\ldots$$

Строги доказ да је $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = F$ нећемо наводити овом приликом.

Ову особину нема само Фибоначијев низ већ сви низови чији се чланови формирају сабирањем претходна два члана при чему су прва два члана произвољни бројеви a и b.

Да бисмо се уверили у ово, формирајмо низ (U_n) чији се елементи формирају на сличан начин: $a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ 5a+8b,\ 8a+13b,\ \ldots$. Ако су $F_1, F_2, F_3, \ldots$ чланови Фибоначијевог низа, тада чланове низа (U_n) можемо представити и на следећи начин: $a,\ b,\ F_1a+F_2b,\ F_2a+F_3b,\ F_3a+F_4b,\ F_4a+F_5b,\ \ldots$, тј. $U_n = F_{n-2}a + F_{n-1}b$, $n \in \mathbb{N}$.

Ако искористимо чињеницу да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = F$, добијамо да је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_na + F_{n+1}b}{F_{n-1}a + F_nb} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a + \dfrac{F_{n+1}}{F_n}b}{\dfrac{F_{n-1}}{F_n}a + b} = \frac{a + Fb}{\dfrac{1}{F}a + b} = F.$$

Остављамо читаоцу да се пронађе још неке „чудесне“ законитости које задовољавају чланови Фибоначијег низа. Ми ћемо навести само неке. Иначе, све законитости које следе строго се доказују математичком индукцијом.

- $F^n = F_{n-1} + F_nF$

$$[F^2 = 1 + F = F_1 + F_2F]$$

$$[F^3 = (F_1 + F_2F)F = F_1F + F_2F^2 = F_1F + F_2(1+F) = F_2 + F_3F]$$

$$[F^4 = (F_2 + F_3F)F = F_2F + F_3(1+F) = F_3 + F_4F]$$

$$\vdots$$

- $F^n = F_{n+1} + \dfrac{F_n}{F}$
- $F = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$

$$\left[F = \sqrt{1+F} = \sqrt{1 + \sqrt{1+F}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+F}}} = \cdots\right]$$

- $F = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$

Последње две бliske везе између F и јединице (монаде, „корена“свих бројева) објашњавају изузетне алгебарске и геометријске особине златног пресека.

ЛИТЕРАТУРА

[1] МИЛАН БОЖИЋ: *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002.

[2] ЛАНСЕЛОТ ХОГБЕН: *Све о математици*, Младост, Загреб, 1970.

[3] МАТИЛА ГИКА: *Филозофија и мистика броја*, Књижевна заједница Новог Сада, Нови Сад, 1987.

[4] *Еуклидови Елементи*, Научна књига, Београд, 1949.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година