Регионален натпревар 2009

I година

1А. Броевите m и n се заемно прости. Дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број.

Определи го бројот со кој може да се скрати.

Решение. Нека претпоставиме дека k, $k>1$ е бројот со кој може да се скрати дропката. Според тоа, постојат природни броеви p и s, такви што $(p,s)=1$ и $3n-m=kp$, $5n+2m=ks$. Ако го решиме системот

$$\begin{cases} 3n-m=kp \\ 5n+2m=ks \end{cases},$$

по n и m ќе добиеме $n=\frac{k(2p+s)}{11}$ и $m=\frac{k(3s-5p)}{11}$. Броевите m и n се заемно прости, па според тоа $k=11$. Навистина, ако претпоставиме дека $k\neq 11$, тогаш за било кој делител d на k поголем од 1 и различен од 11 имаме $(m,n)\geq d>1$. Но тоа е во спротивност со претпоставката $(m,n)=1$. Значи, $k=11$.

1Б. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека a^2+ab+b^2 е делител на бројот $(a+b)^6-a^6$.

Решение. Ќе ги искористиме идентитетите

$$A^6-B^6=(A^3-B^3)(A^3+B^3) \text{ и } A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

Добиваме

$$\begin{aligned}(a+b)^6-a^6 &= [(a+b)^3-a^3][(a+b)^3+a^3] \\ &= [(a+b)-a][(a+b)^2+a(a+b)+a^2][(a+b)+a] \\ &= [(a+b)^2-(a+b)a+a^2] \\ &= b(2a+b)(a^2+ab+b^2)(3a^2+3ab+b^2).\end{aligned}$$

Последното значи, $(a^2+ab+b^2)\,|\,(a+b)^6-a^6$ и количникот од делењето е

$$[(a+b)^3-a^3](2a+b).$$

2. За бројот a, е исполнето равенството $a+\frac{1}{a}=1$. Пресметај ја вредноста на

$$a^5+\frac{1}{a^5}.$$

Решение. *Прв начин.* Ке воведеме ознака $b=\frac{1}{a}$. Тогаш $a+b=1$ и $ab=1$, па според тоа

$$a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab=(a+b)^2-2ab=1^2-2\cdot 1=-1;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2+b^2-ab)=1\cdot(-1-1)=-2;$$

$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)=(-1)(-2)-1^2\cdot 1=1;$$

Значи, $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

Втор начин. Користејќи ја формулата

$$A^5+B^5=(A+B)(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4),$$

за $A=a$ и $B=\frac{1}{a}$, имаме

$$\begin{aligned}a^5+\frac{1}{a^5}&=(a+\frac{1}{a})(a^4-a^3\frac{1}{a}+a^2\frac{1}{a^2}-a\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4})\\&=a^4+\frac{1}{a^4}+1-(a^2+\frac{1}{a^2})\\&=a^4+2+\frac{1}{a^4}-(a^2+\frac{1}{a^2})-1\\&=(a^2+\frac{1}{a^2})^2-(a^2+\frac{1}{a^2})-1=(*)\end{aligned}$$

Од друга страна,

$$(a^2+\frac{1}{a^2})=a^2+2+\frac{1}{a^2}-2=(a+\frac{1}{a})^2-2=1^2-2=-1,$$

па заради тоа

$$(*)=(-1)^2-(-1)-1=1.$$

Значи, $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

3А. Дадени се 21 плочка во облик на квадратче, со иста димензија. На четири плочки е запишан бројот 1; на две плочки е запишан бројот 2; на седум плочки е запишан бројот 3; на 8 плочки е запишан бројот 4. Користејќи 20 од тие плочки, Димитар формирал правоаголник со димензии 4 на 5. За формираниот правоаголник збирот на броевите во секоја редица е иста, и збирот на броевите во секоја колона е иста. Кој број стои на неискористената плочка?

Решение. Да го означиме со S збирот на сите броеви запишани на плочките кои го формираат правоаголникот. Од условот на задачата, имаме дека 4 е делител на S и дека 5 е делител на S. Значи 20 е делител на S. Збирот на сите броеви запишани на 21-та плочка е точно 61. Заклучуваме дека на неискористената плочка мора да стои бројот 1.

3Б. Во равенството $25!=15511x10043330y85984z00000$ определи ги цифрите x, y и z за да тоа е точно.

Решение. По дефиниција $25!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 25$. Ако овој број го разложиме на прости множители (направиме негова канонична факторизација), се добива:

$$25!=2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 23=10^{6}\cdot 2^{16}\cdot 3^{10}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 23$$

значи 25! завршува на 6 нули, па следува дека $z=0$.

Бројот 25! е делив со 9, следува дека $61+x+y$ е делив со 9. Значи

$$x+y=2 \quad \text{или} \quad x+y=11 \tag{1}$$

(бидејќи x и y се едноцифрени броеви).

Бројот 25! е делив со 11. Критериумот за деливост со 11 гласи: бројот $a_n\ldots a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ е делив со 11 ако бројот $(a_0+a_2+a_4+...)-(a_1+a_3+a_5+...)$ е делив со 11. Па, следува дека $(34+x)-(27+y)=7+x-y$ е делив со 11. Значи

$$-x+y=7 \text{ или } x-y=4 \tag{2}$$

(бидејќи x и y се едноцифрени броеви).

Од (1) и (2) ги формираме следниве системи равенки:

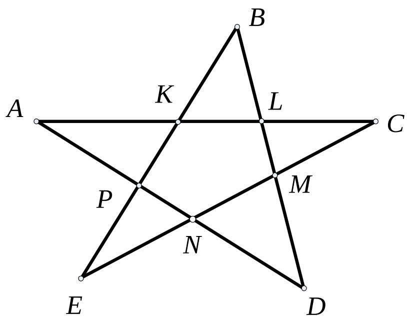
$$\begin{cases}x+y=2\\-x+y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=11\\-x+y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=11\\x-y=4\end{cases}$$

Целобројни решенија се добиваат само кај вториот и третиот систем, т.е. $x=2$, $y=9$.

4. Во петокраката на цртежот важат следниве равенства:

$$|AK|=|LC|, |BL|=|MD|,$$
$$|CM|=|NE|, |DN|=|PA|.$$

Докажи дека важи и $|EP|=|KB|$.



Решение. Да ги повлечеме отсечките AB, BC, CD, DE, EA. Од дадените равенства во условот следува дека триаголниците

$$AKB,\ LCB,\ MCD,\ NED,\ PEA$$

се еднакво-плоштни користејќи дека имаат по еден пар еднакви страни и заедничка соодветна висина. Но тогаш $\Delta EPA, \Delta KBA$ се еднаквоплоштни, и имаат заедничка висина од темето A, па затоа точно е равенството $|EP|=|KB|$.

II година

1А. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $z=(\frac{3+i}{2-i})^n$ е реален, i е имагинарна единица.

Решение. Комплексниот број $\frac{3+i}{2-i}$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{3+i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}\frac{2+i}{2+i}=\frac{6+5i+i^2}{4-i^2}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$$

Значи, $z=(1+i)^n$. Ако n е парен број, односно $n=2k$ за некој $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$z=(1+i)^n=(1+i)^{2k}=[(1+i)^2]^k=(2i)^k.$$

Ако пак k е парен број, односно $k=2m$ за некој $m\in\mathbb{N}$, тогаш

$$z=(2i)^{2m}=(4i^2)^m=4^m(-1)^m.$$

Значи, ако $n=4m$, т.е. $4\mid n$ тогаш $z\in\mathbb{R}$.

Ако $4\nmid n$, тогаш n има еден од облиците $4m+1, 4m+2$ или $4m+3$. Во секој од тие случаи имаме

$$z=(1+i)^{4m+1}=4^m(-1)^m(1+i)\notin\mathbb{R},$$

$$z=(1+i)^{4m+2}=4^m(-1)^m(1+i)^2=4^m\cdot(-1)^m\cdot 2i\notin\mathbb{R},$$

$$z=(1+i)^{4m+3}=4^m(-1)^m(1+i)^3=4^m(-1)^m\cdot 2i(1+i)=4^m\cdot(-1)^m\cdot 2(-1+i)\notin\mathbb{R}.$$

Значи, z е реален број ако и само ако $4\mid n$.

1Б. Определи ги комплексните броеви z за кои

$$|z|=\tfrac{1}{|z|}=|z-1|.$$

Решение. Јасно е дека равенките се определени за $z\neq 0$. Од равенката $|z|=\frac{1}{|z|}$, добиваме $|z|^2=1$, односно

$$|z|=1. \tag{1}$$

Од претходната равенка и равенката $|z|=|z-1|$ ја добиваме равенката

$$|z-1|=1 \tag{2}$$

Ако комплексниот број z го запишеме во алгебарски облик $z=x+iy$, од (1) и (2) добиваме

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \tag{3}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, ја добиваме равенката $2x-1=0$. од каде $x=\frac{1}{2}$. Ако замениме во било која од равенките од системот (3), ја добиваме равенката $y^2=\frac{3}{4}$. Нејзини решенија се $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, множеството броеви $\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ е решение на равенките.

2. Темињата на еден квадрат лежат на страните на друг квадрат (на една страна едно теме). Да се најде односот на кој се разделени страните на вториот квадрат со темињата на првиот квадрат, ако односот на нивните плоштини е еднаков на p, ($p<1$).

Решение. Нека $ABCD$ и $KLMN$ се дадените квадрати, така што K, L, M и N припаѓаат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{BL} = y$, $\overline{KB} = x$, $\overline{KL} = b$ и $\overline{AB} = a$, при што можеме да претпоставиме $x > y$. Тогаш

$$P_1 = P_{ABCD} = a^2 = (x+y)^2,$$

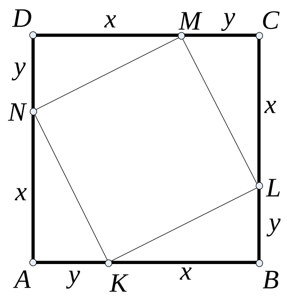
а според Питагоровата теорема $b^2 = x^2 + y^2$, па затоа

$$P_2 = P_{KLMN} = b^2 = x^2 + y^2.$$

Од условот на задачата $\frac{P_2}{P_1} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = p$, каде $0 < p < 1$. Равенството $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = p$ можеме да го запишеме во обликот

$$(1-p)x^2 - 2pxy + (1-p)y^2 = 0 \qquad /:y^2$$

$$(1-p)(\tfrac{x}{y})^2 - 2p\tfrac{x}{y} + (1-p) = 0,$$



Ако воведеме ознака $\frac{x}{y} = t$ добиваме

$$(1-p)t^2 - 2pt + (1-p) = 0. \qquad (1)$$

Решенија на равенката (1) се

$$t_1 = \frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}, \qquad t_1 = \frac{p-\sqrt{2p-1}}{1-p}.$$

Јасно е дека $\frac{x}{y} = \frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$ е бараното решение.

3А. Реши ја равенката

$$(\tfrac{x^3+x}{3})^3 + \tfrac{x^3+x}{3} = 3x.$$

Решение. Ако воведеме смена $\frac{x^3+x}{3} = y$, тогаш $y^3 + y = 3x$ и $x^3 + x = 3y$. Според тоа, ако x_0 е решение на равенката и $\frac{x_0^3+x_0}{3} = y_0$, тогаш (x_0, y_0) е решение на системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + x = y \\ y^3 + y = x \end{cases}. \qquad (1)$$

Точно е и обратното кое што не е тешко да се докаже. Заради тоа, доволно е да се реши системот равенки (1).

Ако од првата равенка на системот ја одземеме втората равенка на системот добиваме

$$(x^3 - y^3) + (x - y) = 3(y - x);$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 3(y - x);$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+4)=0\,; \qquad (2)$$

Бидејќи

$$x^2+xy+y^2+4=x^2+2x\tfrac{y}{2}+\tfrac{y^2}{4}+\tfrac{3}{4}y^2+4=(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3y^2}{4}+4\geq 4\,,$$

за било кои $x,y\in\mathbb{R}$, од равенката (2) имаме $x-y=0$ односно $x=y$. Според тоа $\frac{x^3+x}{3}=x$, од каде добиваме дека $x(x^2-2)=0$. Решенија на последната равенка се $x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=-\sqrt{2}$. Не е тешко да се провери дека истите се решенија и на почетната равенка.

3Б. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \\ x^3+y^3=z \end{cases}.$$

Решение. Третата равенка на системот ќе ја трансформираме во обликот $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, односно $z=z^3-3xyz$. Притоа од формулата за бином на квадрат имаме $xy=\frac{1}{2}((x+y)^2-(x^2+y^2))$ и конечно третата равенка на системот добива облик

$$z=z^3-\tfrac{3}{2}z(z^2-z)\,.$$

Со средување истата станува

$$z^3-3z^2+2z=0\Leftrightarrow z(z-1)(z-2)=0\,,$$

од каде решенија за променливата z се $z\in\{0,1,2\}$. За секоја од поединечните вредности на z решаваме системи од две равенки со две непознати

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \end{cases}.$$

Така за првиот систем, за $z=0$ имаме:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

со решение $x=y=0$.

За $z=1$, системот добива облик

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

кој со замена од првата во втората равенка и решавајќи квадратна равенка ни дава решенија $x=0,y=1$ и $x=1,y=0$.

За $z=2$, системот добива облик

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

кој слично како во претходниот случај, решавајќи квадратна равенка ни дава решенија $x=y=1$.

Конечно, решенија на почетниот систем се подредените тројки

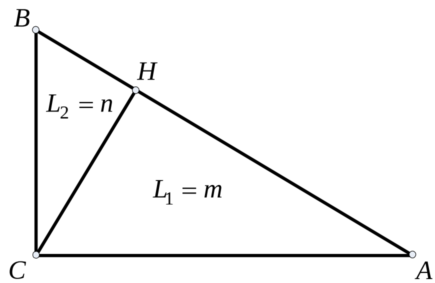
$$(x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,2)\}.$$

4А. Висината го дели правоаголнот триаголник на два триаголници кои имаат периметри m и n. Определи го периметарот на почетниот триаголник.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник (со теме на правиот агол во точката C) и нека CH е негова висина. Од условот на задачата имаме

$$L_1=L_{AHC}=m \quad \text{и} \quad L_2=L_{CHB}=n.$$

Триаголниците AHC, BHC и ABC се слични, при што коефициентите на сличност се



$$k_1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ и } k_2=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \qquad (1)$$

При тоа, исто така

$$\frac{L_1}{L}=k_1 \text{ и } \frac{L_2}{L}=k_2. \qquad (2)$$

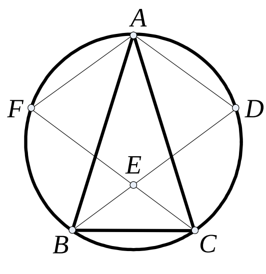
Од равенствата (1) имаме $\overline{AC}=k_1\overline{AB}$ и $\overline{BC}=k_2\overline{AB}$. Според Питагоровата теорема

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2,$$

од каде го добиваме равенството $k_1^2+k_2^2=1$. Ако (2) замениме во претходното равенство, имаме $(\frac{L_1}{L})^2+(\frac{L_2}{L})^2=1$, т.е. $L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}=\sqrt{m^2+n^2}$.

4Б. Нека k е опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник ΔABC со основа BC. Нека E е пресечната точка на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Нека D и F се пресечните точки на симетралите на аглите во темињата B и C со k соодветно. Докажи дека $EDAF$ е ромб.

Решение. Нека $\alpha=\measuredangle ABC=\measuredangle ACB$ и нека $\gamma=\measuredangle CAB$. Тогаш, бидејќи BD е симетрала на $\measuredangle CBA$ и CF е симетрала на $\measuredangle BCA$ следува дека:



$$\measuredangle ABE=\measuredangle CBE=\frac{\alpha}{2}=\measuredangle BCE=\measuredangle ACE.$$

Па $\measuredangle CED=\alpha$. Па оттука

$$\measuredangle BEF=\alpha \text{ и } \measuredangle CFA=\measuredangle CBA=\alpha$$

како агли над ист кружен лак, па $\measuredangle CFA=\alpha=\measuredangle CED$. Од каде $FA \parallel ED$. Аналогно $EF \parallel AD$.

Сега

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \frac{\alpha}{2} \text{ и } \measuredangle BCF = \measuredangle BAF = \frac{\alpha}{2}$$

од каде добиваме

$$\measuredangle FAC = \measuredangle FAB + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \gamma \text{ и } \measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \gamma .$$

Значи $\measuredangle FAC = \measuredangle DAB$. Сега бидејќи

$$\measuredangle ABD = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ACF , \ \overline{AC} = \overline{AB}$$

следува дека $\Delta ACF \cong \Delta ABD$ па $\overline{AF} = \overline{AD}$. Според тоа $EDAF$ е ромб.

III година

1А. Определи ги сите цели броеви x, за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е исто така цел број.

Решение. Цели броеви x за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е определен се

$$x \in (-\infty, 2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, +\infty) \cap \mathbb{Z} .$$

Нека n е цел број за кој постои $x \in \mathbb{Z}$ така што

$$\log_2(x^2 - 4x - 1) = n .$$

Тогаш

$$x^2 - 4x - (1 + 2^n) = 0 \tag{1}$$

од каде добиваме $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5 + 2^n}$, односно

$$x = 2 + \sqrt{5 + 2^n} \quad \text{или} \quad x = 2 - \sqrt{5 + 2^n} .$$

Бидејќи $x \in \mathbb{Z}$, постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $5 + 2^n = k^2$. Значи, доволно е да ги определиме сите n за кои $5 + 2^n$ е полн квадрат. Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $n < 0$, тогаш $2^n = k^2 - 5$, односно $1 = 2^{-n}(k^2 - 5)$. Бројот $2^{-n}(k^2 - 5)$ е парен, па според тоа последното равенство не е можно.

б) Ако $n = 0$, тогаш $k^2 = 6$, т.е. $5 + 2^n$ не е полн квадрат. Значи и овој случај не е можен.

в) Ако $n > 0$, тогаш $5 + 2^n$ е непарен, па затоа $k = 2m - 1$ за некој $m \in \mathbb{Z}$. Со алгебарски трансформации добиваме

$$m(m-1) = 2^{n-2} + 1 . \tag{2}$$

Ако $n = 1$, тогаш $2^{n-2} + 1$ е рационален број и равенството (2) не е можно за ниту еден $m \in \mathbb{Z}$.

Ако $n>2$, тогаш $2^{n-2}+1$ е непарен број а $m(m-1)$ е парен, па равенство меѓу нив не е можно.

Ако $n=2$, тогаш $5+2^2=9=3^2$. Со замена во (2) ја добиваме квадратната равенка $x^2-4x+5=0$ чии решенија се $x=-1$ и $x=5$. Не е тешко да се провери дека за најдените вредности за x, $\log_2(x^2-4x-1)$ е цел број и во двата случаи е еднаков на 2.

1Б. Реши ја равенката

$$4^{\log_{10} x}-32+x^{\log_{10} 4}=0.$$

Решение. Јасно е дека равенката е определена за $x>0$. За $x>0$, $\log_{10} x$ можеме да го запишеме во облик

$$\log_{10} x=\frac{\log_4 x}{\log_4 10}=(\log_4 x)(\log_{10} 4),$$

од каде добиваме

$$4^{\log_{10} x}=4^{(\log_4 x)(\log_{10} 4)}=(4^{\log_4 x})^{\log_{10} 4}=x^{\log_{10} 4}.$$

Сега, равенката можеме да ја запишеме во обликот

$$4^{\log_{10} x}-32+4^{\log_{10} x}=0,$$

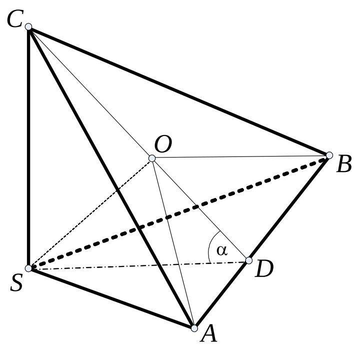
$$2\cdot 4^{\log_{10} x}-32=0,$$

$$4^{\log_{10} x}=4^2,$$

$$\log_{10} x=2.$$

Значи, решение на равенката е $x=100$.

2. Во триаголна пирамида $SABC$ аглите меѓу рабовите при врвот S се прави, а точката O е проекција на врвот S врз рамнината на основата ABC. Докажи дека плоштината на триаголникот ASB е геометриска средина на плоштините на триаголниците ABC и OAB.



Решение. Од условот на задачата $CS\perp AS$, $CS\perp BS$ и $AS\perp BS$ а точката O е подножје на нормалата спуштена од врвот S на рамнината на основата ABC. Нека α е аголот меѓу рамнините на триаголниците SAB и ABC (види цртеж). Триаголниците OAB, SAB и CAB имаат една заедничка страна AB и имаат различни висини спуштени врз таа страна.

При тоа за висините OD, SD и CD имаме, $\overline{OD}=\overline{SD}\cos\alpha$, $\overline{SD}=\overline{CD}\cos\alpha$, од каде што ги добиваме следните равенства $P_{OAB}=P_{SAB}\cos\alpha$ и $P_{SAB}=P_{ABC}\cos\alpha$.

Од првото равенство добиваме $\cos\alpha = \frac{P_{OAB}}{P_{SAB}}$, и ако замениме во второто равенство добиваме $P_{SAB} = P_{ABC}\frac{P_{OAB}}{P_{SAB}}$ односно $P_{SAB}^2 = P_{ABC}\cdot P_{OAB}$.

Значи, $P_{SAB} = \sqrt{P_{ABC}\cdot P_{OAB}}$, што и требаше да се докаже.

3А. Нека a,b,c се страните а α,β,γ соодветните агли во триаголникот ABC со плоштина P. Докажи дека важи равенството

$$a^2(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) + b^2(\sin 2\gamma + \sin 2\alpha) + c^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = 12P.$$

Решение. Ќе ги прегрупираме собироците на левата страна од равенството

$$(a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha) + (b^2\sin 2\gamma + c^2\sin 2\beta) + (c^2\sin 2\alpha + a^2\sin 2\gamma).$$

Со примена на синусната теорема и формула за синус од двоен агол, ќе трансформираме збировите во заградите. Од $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, односно од $a\sin\beta = b\sin\alpha$, со замена, првиот збир добива облик

$$\begin{aligned} a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha &= 2a^2\sin\beta\cos\beta + 2b^2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= 2ab\sin\alpha\cos\beta + 2ab\sin\beta\cos\alpha \\ &= 2ab(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ &= 2ab\sin(\alpha+\beta) = 2ab\sin(\pi-\gamma) \\ &= 2ab\sin\gamma = 4P \end{aligned}$$

Аналогно,

$$b^2\sin 2\gamma + c^2\sin 2\beta = 4P \text{ и } c^2\sin 2\alpha + a^2\sin 2\gamma = 4P.$$

Собирајќи ги изразите се добива

$$(a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha) + (b^2\sin 2\gamma + c^2\sin 2\beta) + (c^2\sin 2\alpha + a^2\sin 2\gamma) = 12P$$

што требаше да се докаже.

3Б. Провери ја точноста на равенството

$$\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 2^2\operatorname{tg}2^2\alpha + \ldots + 2^n\operatorname{tg}2^n\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.$$

Решение. Не е тешко да се провери точноста на следното равенство

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha. \qquad (1)$$

Навистина

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha} = 2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Равенството (1) може да се трансформира во облик

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Сега

$$2\operatorname{tg}2\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha - 4\operatorname{ctg}4\alpha$$

$$2^2\operatorname{tg}2\alpha = 4\operatorname{ctg}4\alpha - 2^3\operatorname{ctg}2^3\alpha$$

$$2^3 \operatorname{tg} 2\alpha = 2^3 \operatorname{ctg} 4\alpha - 2^4 \operatorname{ctg} 2^4 \alpha$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2^n \operatorname{tg} 2\alpha = 2^n \operatorname{ctg} 2^n \alpha - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} \alpha$$

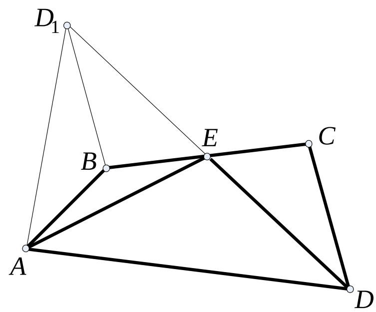
Ако ги собереме претходните равенство (2) го добиваме бараното равенство

$$\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 2^2 \operatorname{tg} 2^2\alpha + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n \alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha .$$

4. Во четириаголникот $ABCD$, E е средина на страната BC, и плоштината на триаголникот AED е двпати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Докажи дека AB е паралелна со CD.

Решение. Нека $ABCD$ е четириаголникот во кој E е средина на BC, при што $P_{ABCD} = 2P_{AED}$. Точката D ќе ја пресликаме централно симетрично со центар на симетрија E. Нека D_1 е нејзината слика. Бидејќи $ECD \cong EBC$ имаме $P_{ECD} = P_{EBC}$, од каде добиваме



$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= 2(P_{ABE} + P_{ECD}) \\ &= 2(P_{ABE} + P_{EBD_1}) \end{aligned} \tag{1}$$

Од друга страна $P_{AED} = P_{AED_1}$ (имаат иста должина на основа и висината спуштена врз неа). Значи

$$P_{ABCD} = 2P_{AED_1} \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$P_{ABE} + P_{EBD_1} = P_{AED_1} .$$

Ако A, B и D_1 не се колинеарни, последното равенство не е точно. Значи A, B и D_1 се колинеарни.

Од колинеарноста на A, B и D_1 и од тоа што $DC \parallel BD_1$, добиваме дека $AB \parallel CD$.

IV година

1. Аритметичката прогресија се состои од цели броеви. Збирот на првите n членови на прогресијата е степен на бројот 2. Докажи дека и n е степен на бројот 2.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија е a, n-тиот член е b а разликата е d. Нека S е збирот на првите n членови на прогресијата. Тогаш

$$\begin{aligned} S &= a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) \\ &= na + d(1+2+\dots+n-1) \\ &= na + \tfrac{n(n-1)}{2} d \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{n}{2}(2a+(n-1)d) \\
&= \tfrac{n}{2}(a+a+(n-1)d) \\
&= \tfrac{n}{2}(a+b).
\end{aligned}
$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$2S=(a+b)n\,. \tag{1}$$

Бидејќи S е степен на бројот 2, постои $k\in\mathbb{N}$ така што $S=2^k$. Од равенството (1) добиваме

$$2^{k+1}=(a+b)n\,.$$

Значи, каноничната репрезентација на $(a+b)n$ е еднаква на 2^{k+1}, па затоа $a+b$ и n немаат делители различни од 2. Според тоа, постојат броеви p и q такви што

$$a+b=2^p\,,\ n=2^q\,,$$

при што $p+q=k+1$.

2. Провери ја точноста на равенството:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\,,$$

каде $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Равенството ќе го докажеме со математичка индукција.

Ќе воведеме ознака $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$. Јасно е дека

$$x_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}\,.$$

Тврдењето е точно за $n=1$. Навистина

$$x_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k}=(-1)^{1+1}\binom{1}{1}=1\ .$$

Нека тврдењето е точно за $n-1$, т.е. нека е точно равенството

$$x_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\,.$$

Од равенството $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, за $k=1,2,\ldots,n-1$, за природниот број n, заради индуктивната претпоставка имаме

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}$$
$$=x_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}$$
$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k}$$
$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}(-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k}+1)$$
$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}(1-(1-1)^{n})=x_{n-1}+\frac{1}{n}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

Притоа искористивме дека

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^{k}=\frac{1}{n}(1+(-1))^{n}=\frac{1}{n}(1-1)^{n}=0\text{).}$$

Сега, според принципот на математичка индукција добиваме дека равенството

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

е точно за секој природен број n.

3А. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n$ ... , дефинирана со:

$$a_1=2 \text{ и } a_{n+1}=1+a_1a_2...a_n$$

за секој природен број, $n\geq 2$. Да се пресмета $S_{2009}+P_{2009}$, каде

$$S_k=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n} \text{ и } P_k=\frac{1}{a_1a_2...a_n},$$

за секој $k\geq 1$.

Решение. Нека $t_n=S_n+P_n$ тогаш

$$t_1=S_1+P_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\ t_2=S_2+P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

Со математичка индукција ќе покажеме дека $t_n=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Да забележиме дека

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{a_{n+1}} \text{ и } P_{n+1}=\frac{P_n}{a_{n+1}}.$$

За $n=1$, јасно, тврдењето важи.

Нека за $n=k$ тврдењето важи т.е. $t_k=1$.

За $n=k+1$ имаме

$$t_{k+1}=S_{k+1}+P_{k+1}=S_k+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}$$
$$=S_k+P_k+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}-P_k$$

$$=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}(1-a_{k+1})$$
$$=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}(-a_1a_2...a_k)$$
$$=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}\cdot\frac{-1}{P_k}=1+\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+1}}=1$$

Според принципот на математичка индукција следува дека $t_n=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи $S_{2009}+P_{2009}=1$.

3Б. За даден број ќе велиме дека е „шарен“ ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Определи го бројот на сите четирицифрени “шарени” броеви запишани со различни цифри?

Решение. Имаме 5 парни цифри: 0, 2, 4, 6, 8 и 5 непарни цифри: 1, 3, 5, 7, 9. Две парни цифри од 5 можеме да избереме на $C_5^2=10$ начини, т.е. ги имаме следниве можности

$$\{\{0,2\},\{0,4\},\{0,6\},\{0,8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}\}.$$

На исто толку начини може да се изберат две од 5-те непарни цифри.

За секои два пара (еден пар парни и еден пар непарни броеви) постојат вкупно $4!=24$ начини за формирање на низа од четири цифри. Па вкупно имаме $10\cdot 10\cdot 24=2400$ четирицифрени низи, кои се состојат од две парни и две непарни цифри.

Останува да ги преброиме оние каде на прво место се наоѓа 0. Ако во некој пар составен од парни броеви се наоѓа 0 тогаш бројот на четирицифрени броеви кои започнуваат со 0 е $3!=6$. Бидејќи имаме четири парни пара, во кои се наоѓа 0, следува дека бројот на сите „шарени“ четирицифрени низи кои започнуваат со 0 е $4\cdot 10\cdot 6=240$.

Па според ова бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри е $2400-240=2160$.

4А. Секоја точка од рамнината е обоена во една од две бои, сина или црвена. Да се докаже дека во таа рамнина постои рамностран триаголник чии темиња се обоени во една иста боја.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја. Имено, во дадената рамнина конструираме рамностран триаголник, тогаш според Принципот на Дирихле меѓу трите темиња постојат две кои се обоени во иста боја, според ова во дадената рамнина постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја.

Понатаму ќе покажеме дека постои отсечка чии крајни точки и средишна точка се обоени во иста боја.

Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени на пример во сина боја (таква отсечка постои според претходното). Нека D и E (од различни страни на A и B)

се точки такви што $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BE}$. Тогаш ако некоја од точките D и E е обоена во сина боја , задачата е решена. Затоа нека точките D и E се обоени во црвена боја. Средишната точка F на AB е средишна и на отсечката DE, и јасно F е обоена или во сина или во црвена боја. Со ова тврдењето е докажано.

Сега да разгледаме три сини точки A, B, C такви што B е средина на AC, (такви постојат според претходното). Нека D, E и F се трети темиња на рамностраните триаголници конструирани над AC, AB, BC , соодветно од иста страна на правата AC.

Тогаш ако барем една од E, F и D е сина , задачата е решена.

Ако пак сите три точки E, F и D се црвени тогаш бараниот триаголник е EFD (тој е рамностран и сите негови темиња се обоени црвено).

4Б. Дадена е функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x).$$

Докажи дека f е периодична функција.

Решение. Од даденото равенство што го исполнува функцијата f имаме :

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

односно

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}f(x+4)&=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)\\&=f(x)-\sqrt{2}(f(x-1)+f(x+1))\\&=f(x)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}f(x)\\&=f(x)-2f(x)=-f(x).\end{aligned}$$

Од ова пак следува дека,

$$f(x+8)=-f(x+4)=-(-f(x))=f(x).$$

Значи, функцијата f е периодична со период 8.