Сојузен натпревар 1975

I година

1. Докажи дека за секој $a\in[5,10]$ важи равенството

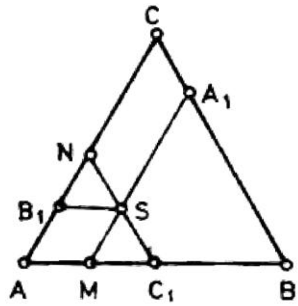
$$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}=1.$$

Решение. Ако $5\le a\le 10$, тогаш $2\le\sqrt{a-1}\le 3$ и

$$\begin{aligned}\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}&=\sqrt{(\sqrt{a-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{a-1}-3)^2}\\&=|\sqrt{a-1}-2|+|\sqrt{a-1}-3|\\&=\sqrt{a-1}-2+3-\sqrt{a-1}=1.\end{aligned}$$

2. Во внатрешноста на некоја страна на рамностраниот триаголник ABC дадена е точка S, низ која се повлечени прави SA_1, SB_1, SC_1, соодветно паралелни на страните AC, AB, BC на триаголникот ABC така што $A_1.B_1.C_1$ припаѓаат соодветно на страните BC, AC, AB. Докажи дека збирот $SA_1+SB_1+SC_1$ има константна вредност која не зависи од изборот на точката S.

Решение. Нека S е внатрешна точка на триаголникот ABC, цртеж десно. Понатаму, нека M е пресекот на правите AB и SA_1, а N е пресекот на правите AC и SC_1. Триаголниците NB_1S и SMC_1 се рамнострани, а четириаголниците SA_1CN и SB_1AM се паралелограми. Затоа



$$\begin{aligned}SA_1+SB_1+SC_1&=NC+B_1N+MS\\&=NC+B_1N+AB_1=AC.\end{aligned}$$

Ако точката S припаѓа на некоја страна на триаголникот ABC, на пример на AC, тогаш $B_1=S, A_1=C$, а триаголникот SAC_1 е рамностран, па повторно имаме

$$SA_1+SB_1+SC_1=SC+AS=AC.$$

3. Два автомобили тргнуваат истовремено од местото A кон местото B. Првиот оди половина од времето со брзина u, а втората половина од времето со брзина v. Вториот оди половина од патот со брзина u, а втората половина од патот со брзина v. Кој автомобил побрзо ќе стигне на целта?

Решение. Нека должината на патот меѓу местата A и B е s. Нека T е времето за кое во местото B ќе пристигне автомобилот кој првата половина од патот ја минува со брзина u, а втората со брзина v. Овој автомобил првата половина од патот ја минал за време $\frac{s}{2u}$, а втората половина од патот за време $\frac{s}{2v}$. Затоа важи

$T=\frac{s}{2}(\frac{1}{u}+\frac{1}{v})$. Нека t е времето за кое во местото B ќе пристигне автомобилот кој првата половина од времето оди со брзина u, а втората со брзина v. Тогаш $s=\frac{t}{2}u+\frac{t}{2}v=\frac{t}{2}(u+v)$, односно $t=\frac{2s}{u+v}$. Понатаму, добиваме

$$\frac{T}{t}=\frac{s}{2}(\frac{1}{u}+\frac{1}{v})\frac{u+v}{2s}=\frac{(u+v)^2}{4uv}=1+\frac{(u-v)^2}{4uv}\geq 1.$$

Ако $u=v$, тогаш $T=t$, а ако $u\neq v$, тогаш $T>t$.

4. На кружница во произволен редослед се запишани пет нули и четири единици. Потоа меѓу еднаквите цифри се запишува нула, а меѓу различните се запишува единица, па почетните цифри се бришат. Докажи дека без разлика колку пати ќе ја повториме оваа постапка не може да се добијат девет нули.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното и нека по $n-$тото повторување на опишаната постапка прв пат се добиваат 9 нули. Тоа значи дека по $(n-1)-$виот чекор секои две соседни цифри биле еднакви и тоа еднакви на 1, бидејќи сите нули прв пат се појавуваат по $n-$тиот чекор. Понатаму, добиваме дека по $(n-2)-$риот чекор секои две соседни цифри мора да бидат различни. Ако местата на кои стојат цифрите ги нумерираме со броевите 1, 2, ..., 9, тогаш по $(n-2)-$риот чекор на непарните места биле еднакви цифри, а на парните места исто така еднакви цифри, но различни од оние на непарните места. На местата 1 и 9 кои се соседни стојат еднакви цифри, што противречи дека секои две соседни цифри мора да се различни. Од добиената противречност следува дека претпоставката не е точна, т.е. дека без разлика колку пати ќе ја повториме опишаната постапка не може да се добијат девет нули.

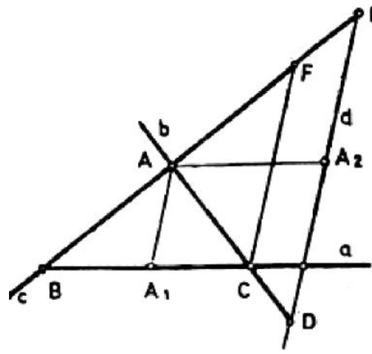
II година

1. Нека a,b,c се непарни цели броеви. Докажи дека равенката $ax^2+bx+c=0$ нема рационални корени.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека $b^2-4ac=k^2$, каде k е цел број. Бидејќи b е непарен број, добиваме дека k^2 и k се непарни броеви. Понатаму, $4ac=b^2-k^2$. Бројот $4ac$ е делив со 4, но не е делив со 8, бидејќи a и c се непарни броеви. Меѓутоа, бидејќи квадратите на непарните броеви при делење со 8 секогаш даваат остаток 1, добиваме дека бројот b^2-k^2 е делив со 8, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

2. Во рамнината се дадени четири прави такви што никои две не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Ако четвртата права е паралелна со некоја тежишна линија на триаголникот кој го определуваат првите три прави, тогаш секоја од првите три прави е паралелна со некоја тежишна линија на триаголникот кој го определуваат преостанатите три прави. Докажи!

Решение. Нека ABC е триаголникот кој го формираат правите a,b,c и нека правата d е паралелна на тежишната линија AA_1 на триаголникот ABC, цртеж десно. Нека D и E се пресеците соодветно на правите b и c со правата d, F е пресекот на правата c со правата која минува низ точката C и е паралелна со AA_1, а A_2 е пресекот на правата d со правата која минува низ точката A и е паралелна на правата a. Бидејќи AA_1 е средна линија на триаголникот BCF, добиваме дека точката A е средина на отсечката BF. Затоа правата AA_2 ја полови CF, па сега лесно следува дека таа права ја полови и DE. Според тоа, AA_2 е тежишна линија на триаголникот ADE. Аналогно се разгледуваат и останатите случаи.



3. Сложувач на букви во печатница ги растурил цифрите 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9 со кои е запишан број кој е шести степен на некој природен број. Кој е тој број?

Решение. Со n да го означиме бараниот број. Збирот на цифрите на бројот n^6 е еднаков на 45, па затоа тој е делив со 9, што значи дека бројот n е делив со 3. Бидејќи 21^6 е осумцифрен, а 33^6 е десетцифрен број, важи $n\in\{24,27,30\}$. Но, $n\neq 30$, бидејќи во записот на 30^6 има шест нули. Исто така $n\neq 24$, бидејќи цифрата на единиците на бројот 24^6 е 6, а цифрата 6 не се содржи во записот на бројот n^6. Конечно, од $27^6=387402489$, добиваме $n=27$.

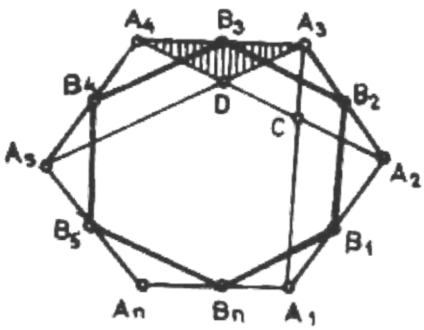
4. Во внатрешноста на квадрат се дадени n точки. Се поврзуваат по две точки меѓу себе, како и одделни точки со темињата на квадратот, но така што никои две отсечки не се сечат во внатрешна точка. Колку најмногу отсечки може да се конструираат на овој начин?

Решение. Со поврзување на точките на опишаниот начин квадратот се разбива на триаголници. Нека k е бројот на тие триаголници. Збирот на аглите на сите тие триаголници е еднаков на $k\cdot 180^\circ$. Овој збир е еднаков на $n\cdot 360^\circ+4\cdot 90^\circ$, бидејќи збирот на аглите чие заедничко теме е некоја од внатрешните точки е еднаков на 360°, додека збирот на аглите чие заедничко теме е некое од темињата на квадратот е 90°. Затоа $k\cdot 180^\circ=n\cdot 360^\circ+4\cdot 90^\circ$, т.е. $k=2n+2$. Бидејќи секоја конструирана отсечка е заедничка страна на два триаголници, а при броењето на страните на триаголниците ги броиме и четирите страни на квадратот, добиваме дека бројот на конструираните отсечки е

$$\frac{3(2n+2)-4}{2}=3n+1.$$

III година

1. Нека n е природен број поголем или еднаков на 4. Докажи дека $n-$аголникот кој е определен со средините на страните на даден конвексен $n-$аголник M има плоштина која не е помала ос половина од плоштината на многуаголникот M.



Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се темињата на многуаголникот M, а $B_1, B_2, ..., B_n$ се редоследно средините на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$, цртеж десно. Да забележиме дека, заради конвексноста на многуаголникот M, никои три од триаголниците

$$A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, ..., A_{n-1}A_nA_1 \qquad (1)$$

немаат внатрешна заедничка точка. Затоа збирот на плоштините на овие триаголници е најмногу два пати поголем од плоштината P на многуаголникот M. Ако плоштината на многуаголникот $B_1B_2...B_n$ ја означиме со P_1, тогаш

$$\begin{aligned} P-P_1 &= P_{B_nA_1B_1}+P_{B_1A_2B_2}+...+P_{B_{n-1}A_nB_n} \\ &= \tfrac{1}{4}(P_{A_nA_1A_2}+P_{A_1A_2A_3}+...+P_{A_{n-1}A_nA_1}) \\ &\le \tfrac{2P}{4}=\tfrac{P}{2} \end{aligned}$$

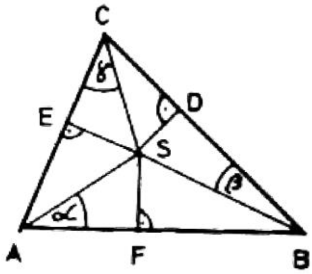
од каде следува $P_1 \ge \frac{P}{2}$. Знак за равенство важи ако и само ако секоја точка на многуаголникот M припаѓа барем на два од триаголниците (1). Ако $n \ge 5$, со C и D да ги означиме редоследно пресеците на отсечката A_2A_4 со отсечките A_1A_3 и A_3A_5. Тогаш секоја внатрешна точка на триаголникот A_3CD се содржи во точно еден од триаголниците (1). Лесно се проверува дека за $n=4$ важи $P_1=\frac{P}{2}$. Според тоа, равенството $P_1=\frac{P}{2}$ важи ако и само ако M е четириаголник.

2. Нека S е произволна точка во внатрешноста на триаголникот ABC со страни a,b,c. Докажи дека

$$SA\cos\frac{A}{2}+SB\cos\frac{B}{2}+SC\cos\frac{C}{2} \ge \frac{a+b+c}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека D, E, F се подножјата на нормалите повлечени од точката S соодветно на страните BC, CA, AB, цртеж десно. Да забележиме дека за $\varphi>0, \psi>0, \varphi+\psi<\pi$ важи



$$\cos\varphi+\cos\psi=2\cos\tfrac{\varphi+\psi}{2}\cos\tfrac{\varphi-\psi}{2}\leq 2\cos\tfrac{\varphi+\psi}{2},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\varphi=\psi$. Користејќи го ова тврдење и ознаките

$$\alpha=\measuredangle SAF, \beta=\measuredangle SBD, \gamma=\measuredangle SCE,$$

добиваме

$$\begin{aligned}a+b+c&=(AE+AF)+(BD+BF)+(CD+CE)\\&=SA\cdot(\cos\alpha+\cos(A-\alpha))+SB\cdot(\cos\beta+\cos(B-\beta))+CS\cdot(\cos\gamma+\cos(C-\gamma))\\&\leq 2(SA\cdot\cos\tfrac{A}{2}+SB\cdot\cos\tfrac{B}{2}+SC\cdot\cos\tfrac{C}{2}).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\alpha=\frac{1}{2}\measuredangle BAC, \beta=\frac{1}{2}\measuredangle CBA, \gamma=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$, т.е. ако и само ако S е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

3. Реши ја равенката

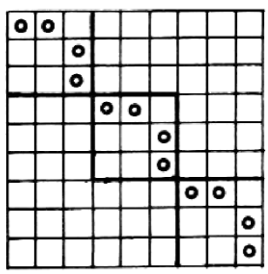
$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x=2^{\frac{x+4}{4}}.$$

Решение. Да означиме

$$A=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^{\frac{x}{2}},$$
$$B=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^{\frac{x}{2}}.$$

Тогаш $\frac{A+B}{2}=2^{\frac{x}{4}}$, $AB=2^{\frac{x}{2}}$. Бидејќи $A>0, B>0$ и $\frac{A+B}{2}=\sqrt{AB}$, добиваме $A=B$. Равенството $A=B$ е еквивалентно со $x=0$ или $\sqrt{x^2-5x+6}=0$. Конечно, решенија на почетната равенка се 0, 2 и 3.

4. Кој е најголемиот број топови кои може да се постават на шаховска табла $3n\times 3n$ така што секој топ биде нападнат најмногу од еден од преостанатите топови.



Решение. Да претпоставиме дека на шаховската $3n\times 3n$ табла се поставени неколку топови, така што секој од нив е нападнат најмногу од еден од преостанатите топови. Нека притоа се поставени $2x$ топови кои во парови се напаѓаат и y топови така што ниту еден од нив не напаѓа ниту еден од преостанатите топови. Секои два топа кои меѓусебно се напаѓаат го напаѓаат секое поле на вкупно 3 линии (две хоризонтални и една вертикална или две вертикални и една хоризонтална). Секој топ кој не ги напаѓа преостанатите топови го напаѓа секое поле од една хоризонтална и една вертикална линија. Според тоа, сите поставени топови напаѓаат вкупно $3x+2y$ линии, од кои некои се хоризонтални, а некои се вертикални. Бидејќи вкупниот број линии е $6n$, добиваме $3x+2y \le 6n$. Бројот на поставените топови е еднаков на $2x+y$ и важи

$$2x+y \le \tfrac{2}{3}(3x+2y) \le 4n .$$

За $n=3$ горниот цртеж е покажано како $4n$ топови може да се поставaт на $3n\times 3n$ табла така што се исполнети условите на задачата. Сличен пример може да се конструира за секој природен број n.

IV година

1. Дадена е парабола $y=x^2$. За $|x_0|>\sqrt{2}$ низ точката $A(x_0,x_0^2)$ на параболата минуваат две нејзини нормали чии подножја се B и C, различни од A. Докажи дека правата BC ја сече оската на параболата во фиксна точка која не зависи од x_0.

Решение. Нека $M(m,m^2)$ е произволна точка на параболата различна од A. Равенката на тангентата на параболата во точката M е $y-m^2=2m(x-m)$, а равенката на нормалата во таа точка е $y-m^2=-\frac{1}{2m}(x-m)$. Ако оваа нормала минува низ точката $A(x_0,x_0^2)$, тогаш $x_0^2-m^2=-\frac{1}{2m}(x_0-m)$, па користејќи го условот $x_0 \ne m$ ($M \ne A$), добиваме

$$2m^2+2x_0m+1=0 . \qquad (1)$$

Оваа квадратна равенка по m има две реални решенија бидејќи $D=4(x_0^2-2)>0$. Со x_1 и x_2 да ги означиме овие решенија. Нормалите на параболата во точките $B(x_1,x_1^2)$ и $C(x_2,x_2^2)$ ја содржат точката A, а равенката на правата BC е

$$y-x_1^2=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{, т.е. } y=(x_2+x_1)x-x_1x_2 .$$

Пресечната точка на правата BC со $y-$оската е $P(0,-x_1x_2)$, а како x_1 и x_2 се решенија по m на равенката (1), добиваме дека $x_1x_2=\frac{1}{2}$. Конечно, $P(0,-\frac{1}{2})$, т.е. координатите на точката P не зависат од точката A.

2. Реши ја равенката $1!+2!+...+x!=y^z$, каде x,y и z се природни броеви и $z>1$.

Решение. Прво да забележиме дека секоја тројка $(1,1,z),\ z\in\{2,3,...\}$ е решение на дадената равенка.

а) Нека $z=2$. Равенката го прима видот $1!+2!+...+x!=y^2$. Бројот y^2 при делење со 5 дава остатоци $-1,0$ и 1 и за $x\ge 4$ важи

$$1!+2!+3!+...+x!\equiv 1!+2!+3!+4!\equiv 3 \pmod 5.$$

Според тоа, ако тројката $(x,y,2)$ е решение на дадената равенка, тогаш $x\le 3$. Со непосредна проверка добиваме дека за $x=2$ немаме решение, а за $x=3$ решение е тројката $(3,3,2)$.

б) Нека $z=3$. Равенката го прима видот $1!+2!+...+x!=y^3$. Бројот y^3 при делење со 7 дава остатоци $-1,0$ и 1 и за $x\ge 7$ важи

$$1!+2!+3!+...+x!\equiv 1!+2!+3!+4!+5!+6!\equiv 5 \pmod 7.$$

Според тоа, ако тројката $(x,y,3)$ е решение на дадената равенка, тогаш $x\le 5$. Со непосредна проверка добиваме дека за $x\in\{2,3,4,5\}$ немаме решение на равенката.

в) Нека $z\ge 4$. Ако за природните броеви $x>1, y$ и $z\ge 4$ важи

$$1!+2!+...+x!=y^z,$$

тогаш $3\,|\,1!+2!+...+x!=3+3!+...+x!$, па затоа $3\,|\,y^z$, т.е. $3\,|\,y$, од каде заклучуваме дека $3^z\,|\,y^z$. Тоа значи дека бројот $1!+2!+...+x!$ е делив со $3^4=81$. Понатаму, бројот $1!+2!+...+8!=46233$ е делив со 9, но не е делив со 81. Бидејќи бројот $k!$ е делив со 81 за секој $k\ge 9$, заклучуваме дека $x\le 7$. Со непосредна проверка добиваме дека ниту за еден $x\in\{2,3,4,5,6,7\}$ бројот $1!+2!+...+x!$ не е делив со 81. Значи, дадената равенка нема решенија кај кои $x>1$ и $z\ge 4$.

Конечно, единствени решенија на дадената равенка се $(1,1,z),\ z\in\{2,3,...\}$ и $(3,3,2)$.

3. Дадени се реални броеви $a_i,\ i=1,2,...,n$ такви што

$$|a_i|<M\ (i=1,2,...,n),\qquad a_1+a_2+...+a_n=0.$$

Докажи дека

$$a_1+2a_2+3a_3+...+na_n\le \frac{n^2}{4}M.$$

Решение. Нека $S=a_1+2a_2+...+na_n$. Тогаш

$$S=(a_1+a_2+...+a_n)+(a_2+...+a_n)+...+(a_{n-1}+a_n)+a_n.$$

Понатаму,

$$a_1+a_2+...+a_n=0,$$

а за $k\in\{1,2,...,n-1\}$ добиваме

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \le \left|\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=k+1}^{n} |a_i| \le (n-k)M,$$
$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \le \left|\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{k} |a_i| \le kM,$$

па затоа

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \le \min\{(n-k)M, kM\} = \begin{cases} kM, & k \le \frac{n}{2} \\ (n-k)M, & k > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Ќе ги разгледаме посебно случаите кога n е парен, односно непарен број.

1) Ако $n = 2p$, тогаш

$$S \le M + 2M + ... + (p-1)M + pM + (p-1)M + ... + 2M + M$$
$$= 2\frac{p(p-1)}{2}M + pM = p^2 M = \frac{n^2}{4}M.$$

2) Ако $n = 2p+1$, тогаш

$$S \le 2(M + 2M + ... + pM) = p(p+1)M = \frac{n^2-1}{4}M \le \frac{n^2}{4}M.$$

4. Во некое друштво секои два познаници немаат заеднички познаник, а секои двајца кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. Докажи дека во ова друштво сите имаат еднаков број познаници.

Решение. а) Да претпоставиме дека A и B се познаваат. Нека $A_1, A_2, ..., A_n, B$ се сите познаници на лицето A. Тогаш никои двајца од $A_1, A_2, ..., A_n, B$ не се познаваат меѓу себе. Бидејќи A_1 и B не се познаваат, тогаш тие имаат двајца заеднички познаници A и B_1. Но, A и B_1 не се познаваат, па затоа A_1 и B се нивни единствени заеднички познаници. Според тоа, ниту еден од $A_2, A_3, ..., A_n$ не е познаник на B_1. Аналогно се докажува дека постои B_2 (различен од B_1) кој е заеднички познаник на A_2 и B итн. Според тоа, на лицата $A_1, A_2, ..., A_n$ можеме да им придружиме различни познаници на лицето B, при што ниту еден од нив не е A. Оттука следува дека B има не помалку познаници од A. Аналогно, A има не помалку познаници од B. Затоа A и B имаат еднаков број познаници.

б) Ако X и Y се познаваат, тогаш тие имаат заеднички познаник Z. Сега од а) следува дека тие имаат еднаков број познаници како и лицето Z.