XLVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Марко, Жарко и Дарко собирале албум со сликички. Тие заедно собрале 1650 сликички. Жарко собрал $\frac{2}{3}$ од бројот на сликичките што ги собрал Марко, а Дарко собрал $\frac{3}{8}$ од бројот на сликичките кои што заедно ги собрале Марко и Жарко. Колку сликички собрало секое дете?

Решение. Ако Марко собрал x сликички, тогаш Жарко собрал $\frac{2}{3}x$ сликички и Дарко собрал $\frac{3}{8}(x+\frac{2}{3}x)$ сликички. Затоа

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}(x+\frac{2}{3}x)=1650,$$
$$x+\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x=1650,$$
$$\frac{24x+8x+9x+6x}{24}=1650,$$
$$\frac{55x}{24}=1650,$$
$$x=720.$$

Значи, Марко собрал 720 сликички, Жарко собрал $\frac{2}{3}\cdot 720=480$ и Дарко собрал $\frac{3}{8}(720+480)=450$ сликички.

2. Во областа на $\measuredangle AOB$ е повлечена полуправа OC така што $\measuredangle AOC$ е за 40° помал од $\measuredangle COB$ и е еднаков на една тгретина од $\measuredangle AOB$. Определи го $\measuredangle AOB$.

Решение. Нека $\measuredangle AOC=x$ и $\measuredangle COB=y$. Тогаш $\measuredangle AOB=x+y$ и важи $x=y-40^\circ$ и $x=\frac{1}{3}(x+y)$. Ако од првата равенка замениме во втората, добиваме $y-40^\circ=\frac{1}{3}(y-40^\circ+y)$, од каде следува $3y-120^\circ=2y-40^\circ$, па затоа $y=80^\circ$. Конечно, $x=80^\circ-40^\circ=40^\circ$.

3. Ако свежото грозје содржи 75% вода, а сувото грозје содржи 5% вода, колку килограми свежо грозје се потребни за да се добијат $130\,kg$ суво грозје?

Решение. Со x да го означиме количеството свежо грозје кое е потребно за да се добијат $130\,kg$ суво грозје. Во $130\,kg$ суво грозје има 95% сува материја, што значи дека во $130\,kg$ суво грозје има $\frac{95\cdot130}{100}=123{,}5\,kg$ сува материја. Бидејќи во свежото грозје има 75% вода, во него има 25% сува материја. Но, сувата материја не ја менува масата при сушењето, па затоа во x килограми суво грозје треба да има $123{,}5\,kg$ сува материја. Конечно, од

$$\frac{25x}{100}=123{,}5$$

добиваме дека $x=494\,kg$.

4. На хоризонтална права која ја дели рамнината на горна и долна полурамнина, нацртана е отсечка AB со должина $72\,cm$. Користејќи ги крајните точки на отсечката, во горната полурамнина се нацртани правилен (рамностран) триаголник AM_1M_2 и правилен петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$, а во долната полурамнина се нацртани правилен четириаголник (квадрат) $M_2M_3M_4M_5$ и правилен шестаголник $M_9M_{10}M_{11}$ $M_{12}M_{13}B$. Притоа, M_2, M_5 и M_9 се на отсечката AB, точката M_2 е меѓу A и M_5 и точката M_9 е меѓу M_5 и B. Должините на страните на правилните многуаголници се однесуваат како соодветните броеви на нивните страни. Пресметај ја должината на искршената линија

$$L\equiv AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B.$$

Решение. Нека страната на рамностраниот триаголникот AM_1M_2 ја означиме со a, страната на квадратот $M_2M_3M_4M_5$ со b, страната на правилниот петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$ со c и страната на правилниот шестаголник $M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$ со d.

Од условот на задачата следува дека $a:b:c:d=3:4:5:6$, односно

$$a=3k, b=4kc=5k, d=6k.$$

Имаме $72=a+b+c+d$, па затоа $72=3k+4k+5k+6k$, т.е. $k=4$.

Должината на искршената линија L е:

$$2a+3b+4c+5d=6k+12k+20k+30k=68k=68\cdot4=272\,cm.$$

VII одделение

1. Определи ги сите природни броеви од видот $\overline{20a2b2}$ кои се деливи со 72.

Решение. Бројот $\overline{20a2b2}$ е делив со 72 ако истовремено е делив и со 8 и со 9. За да биде делив со 9 треба збирот на цифрите да е делив со 9, односно $2+0+a+2+b+2=6+a+b$ да биде делив со 9.

Истовремено треба да биде делив со 8, што значи дека трицифрениот завршеток треба да е делив со 8, односно $\overline{2b2}$ треба да е делив со 8. Од оваа деливост следува дека $b\in\{3,7\}$. Според тоа, заклучуваме дека за $b=3$, $a=0,9$; за $b=7$, $a=6$. Значи, бараните броеви се:

200232, 209232 и 205272.

2. Дропката $\frac{93}{91}$ претстави ја како збир од две позитивни дропки чии именители се 7 и 13.

Решение. Дропката $\frac{93}{91}$ треба да ја претставиме како збир од две дропки $\frac{a}{7}$ и $\frac{b}{13}$, односно $\frac{93}{91}=\frac{a}{7}+\frac{b}{13}=\frac{13a+7b}{91}$. Значи, $93=13a+7b$, односно $13a=93-7b, a,b\in\mathbb{N}$. Јасно, $b\geq 1$, па затоа $13a\leq 93-7\cdot 1=86$, од каде добиваме $a\leq 6$. Од $93=13a+7b$ следува $7b=93-13a$, а од тоа што 7 е делител на $7b$, мора 7 да е делител и на $93-13a$. Со непосредна проверка се добива дека за $a\leq 6$ само при $a=5$ бројот $93-13a=28$ е делив со 7. Конечно, при $a=5$ имаме $b=4$, па баранопто претставување е $\frac{93}{91}=\frac{5}{7}+\frac{4}{13}$.

3. Еден работен ден 40% од учениците од првата смена во едно основно училиште за ужина купиле ѓеврек, 36% од учениците купиле сендвич, а останатите купиле кроасан.

Во втората смена во истото училиште:

- бројот на учениците кои за ужина купиле кроасан, е поголем за 37,5% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле кроасан;
- бројот на учениците кои за ужина купиле сендвич, е поголем за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле сендвич; и

- бројот на учениците кои за ужина купиле ѓеврек, е помал за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле ѓеврек.

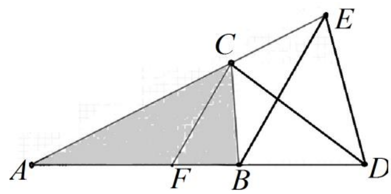
Во која смена бројот на учениците е поголем од бројот на учениците во другата смена? За колку проценти е поголем?

Решение. Да го означиме со x вкупниот број на ученици од првата смена. За ужина купиле: ѓеврек $0,4x$ ученици; сендвич $0,36$ ученици; а кроасан $(1-(0,4+0,36))x=0,24x$ ученици.

Во втората смена, кроасан купиле: $0,24x+0,375\cdot\ 0,24x=0,33x$ ученици; сендвич купиле $0,36x+0,75\cdot 0,4x=\ 0,63x$ ученици; а ѓеврек купиле $0,4x-0,75\cdot 0,4x=0,1x$ ученици. Вкупниот број на ученици од втората смена е $0,33x+0,63x+0,1x=1,06x=x+0,06x$. Бидејќи $0,06=6\%$ заклучуваме дека во втората смена во училиштето имало 6% повеќе ученици отколку во првата смена.

4. Во триаголник ABC аголот во темето C, т.е. $\measuredangle ACB$ е 48°. Нормалата на симетралата на $\measuredangle ACB$ која минува низ темето C ја сече правата AB во точка D, така што точката B лежи меѓу точките A и D и $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{BC}$. Пресметај ги големините на аглите во триаголникот ABC.

Решение. Правата CD која е нормала на симетралата на внатрешниот $\measuredangle ACB$ е истовремено и симетрала на надворешниот акол во темето C. Ја продолжуваме страната AC преку темето C и на неа ја означуваме



точката E така што да важи $\overline{BC}=\overline{CE}$. Триаголниците BCD и CDE се складни според признакот за складност САС. Од нивната складност следува $\measuredangle CBD=\measuredangle CED$, а $\measuredangle CBD=\alpha+\gamma$. Бидејќи

$$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AD}$$

следува дека триаголникот ADE е рамнокрак со агли

$$\measuredangle ADE=\measuredangle AED=\alpha+\gamma\ .$$

За триаголникот ADE важи $\alpha+2(\alpha+\gamma)=180^\circ$ и како $\gamma=48^\circ$ добиваме $\alpha=28^\circ$ и $\beta=104^\circ$.

VIII одделение

1. Докажи дека бројот $2^{2022}+6$ е делив со 7.

Решение. Имаме

$$2^1=7\cdot 0+2,$$
$$2^2=7\cdot 0+4,$$
$$2^3=7\cdot 1+1,$$
$$2^4=7\cdot 2+2,$$
$$2^5=7\cdot 4+4,$$
$$2^6=7\cdot 9+1,$$
$$2^7=7\cdot 18+2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Значи, броевите $2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,\dots$ при делење со 7 даваат остатоци 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, ..., соодветно, кои периодично се повторуваат по секој трет член. Забележуваме дека секој степен чиј степенов показател е делив со три, при делење со 7 дава остаток 1. Бидејќи $2022=3\cdot 674$ следува дека 2^{2022} при делење со 7 дава остаток 1, т.е. $2^{2022}=7k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Според тоа, $2^{2022}+6=7k+7=7(k+1)$, т.е. $7\,|\,2^{2022}+6$.

2. Експресниот патнички воз, пред два дена наутро, тргнал од Гевгелија кон Скопје, со неколку вагони во кои имало одреден број патници. На станицата во Велес, од првиот вагон се симнал еден патник, од последниот вагон се симнале два патника, а не се качил ниту еден патник. Тргнувајќи од Велес, во секој вагон од возот имало еднаков број патници. Истиот воз, со два вагона помалку, попладнето тргнал од Скопје кон Гевгелија со 50 патници помалку во однос на патниците кои тргнале на патување со возот тоа утро од Гевгелија. Притоа, просечниот број на патници по вагон бил 30. Колкав е бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија?

Решение. Нека n е бројот на вагони, а x е вкупниот број на патници во возот кој патувал на релација Гевгелија-Скопје. Ако од првиот вагон се симне еден патник, а од последниот вагон се симнат два патника, тогаш вкупниот број на патници ќе биде $x-3$, па бројот на патници во еден вагон на релација Гевгелија-Скопје ќе биде еднаков на $\frac{x-3}{n}=k$, $k\in\mathbb{N}$, односно ќе важи $x-3=kn$.

На релација Скопје-Гевгелија бројот на вагони е еднаков на $n-2$, а вкупниот број на патници е еднаков на $x-50$. Од условот дека просечниот број на патници по вагон е 30 патника на релација Скопје-Гевгелија, добиваме дека $\frac{x-50}{n-2}=30$, односно $x-50=30(n-2)$.

Од $x-3=kn$ и $x-50=30(n-2)$ го добиваме системот

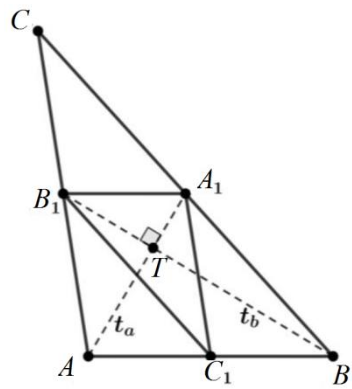
$$\begin{cases} x=kn+3 \\ (30-k)n=13. \end{cases}$$

Од втората равенка на системот равенки добиваме $30-k=1, n=13$ или $30-k=13, n=1$, односно $k=29, n=13$ или $k=17, n=1$

Од условот на задачата следува $n\geq 3, k\geq 1$, па единствено решение на задачата е $k=29, n=13$. Според тоа, $x=29\cdot 13+3=377+3=380$ односно бројот на патници кои тргнале со возот тоа утро од Гевгелија е 380.

3. Даден е триаголник ABC со меѓусебно нормални тежишни линии $t_a=12\,cm$ и $t_b=20\,cm$. Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. *Прв начин.* Со A_1, B_1, C_1 ги означуваме средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Имаме $\overline{AA_1}=t_a=12\,cm$ и $\overline{BB_1}=t_b=20\,cm$. Ги разгледуваме триаголниците $AC_1B_1, A_1B_1C_1, C_1BA_1$ и B_1A_1C. За $\triangle AC_1B_1$ имаме $\overline{AC_1}=\frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{AB_1}=\frac{\overline{AC}}{2}$, и $\overline{C_1B_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$. Триаголникот $A_1B_1C_1$ е триаголник чии



страни се средните линии на $\triangle ABC$, па важи $\overline{A_1C_1}=\frac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{A_1B_1}=\frac{\overline{AB}}{2}$, и $\overline{C_1B_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$. За C_1BA_1 имаме $\overline{C_1B}=\frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{BA_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{C_1A_1}=\frac{\overline{CA}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$. За $\triangle B_1A_1C$ имаме $\overline{B_1C}=\frac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{CA_1}=\frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{B_1A_1}=\frac{\overline{BA}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$.

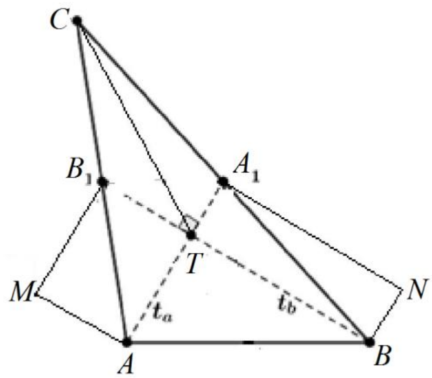
Од досега изнесеното следува дека $\triangle ABC$ е составен од четири складни триаголници. Нека со P' ја означиме плоштината на секој од четирите складни триаголника. Тогаш плоштината на $\triangle ABC$ е $P = 4P'$. Според тоа доволно е да ја пресметаме плоштината P'.

Бидејќи A_1B_1 е средна линија во $\triangle ABC$, таа е паралелна со AB, што значи дека ABA_1B_1 е трапез за чии дијагонали важи $AA_1 \perp BB_1$. Од овде, плоштината на трапезот ќе биде $P_{ABA_1B_1} = \frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1}}{2} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120\, cm^2$. Бидејќи трапезот е составен од трите складни триаголника $AC_1B_1, A_1B_1C_1$ и C_1BA_1, секој со плоштина P', добиваме $P_{ABA_1B_1} = 3P'$. Оттука $P' = 40\, cm^2$ и $P = 4P' = 160\, cm^2$.

Втор начин. Со A_1, B_1 ги означуваме средините на страните BC и AC, соодветно, па $\overline{AA_1} = t_a = 12\, cm$ и $\overline{BB_1} = t_b = 20\, cm$. Бидејќи тежиштето ги дели тежишните линии во однос 1:2 се добива:

$$\overline{AT} = 8\, cm,\ \overline{TA_1} = 4\, cm,$$

$$\overline{AT} = \frac{40}{3}\, cm \text{ и } \overline{TB_1} = \frac{20}{3}\, cm.$$



Бидејќи плоштината на $\triangle BTC$ е еднаква на плоштината на правоаголникот BTA_1N, и плоштината на $\triangle ATC$ е еднаква на плоштината на правоаголникот ATB_1M, следува дека плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците BTA_1N, ATB_1M и триаголникот ABT. Според тоа, плоштината на $\triangle ABC$ е

$$\frac{40}{3} \cdot 4 + \frac{20}{3} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 8 = 160\, cm^2 .$$

4. Резервоар со вода во еден национален парк секој ден се надополнува со 1 хектолитар вода. Едно стадо од 38 слонови, ќе ја испие целата вода од резервоарот за еден ден, додека пак стадо од 8 слонови ќе ја испие целата вода од резервоарот за 5 дена. Ако секој слон просечно пие исто количество вода, за колку дена, почнувајќи од денес, еден слон може да ја испие целата вода од резервоарот? (Слоновите почнуваат да пијат вода од резервоарот откако тој ќе биде надополнет со вода.)

Решение. Секој ден количеството на вода во резервоарот се зголемува за 1 хектолитар, односно за 100 литри вода. Во еден ден количеството на вода во резерварот е $V+100$, каде V ја означува количината на вода која била во резервоарот. Според првиот услов, тоа е количината на вода која дневно ја пијат 38 слонови. Ако со s ја означиме количината на вода (во литри) која ја пие еден слон дневно, тогаш од условите на задачата може да го формираме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} V+100=38s \\ V+5\cdot 100=5\cdot 8s \end{cases}$$

чие решение е $s=200, V=7500$.

Значи, во резервоарот имало $7500\,l$ вода. Бидејќи во резервоарот секој ден се дотураат $100\,l$ вода, а еден слон просечно дневно пие $200\,l$ вода, заклучуваме дека за еден ден еден слон го намалува количеството вода за $100\,l$. Затоа тоај резервоарот ќе го испразни за $7500:100=75$ дена.

IX одделение

1. На две свеќи со иста должина, но различна дебелина потребно им е различно време за целосно да изгорат. На подебелата свеќа ѝ се потребни 4 часа за целосно да изгори, а на потенката свеќа ѝ се потребни 2 часа. Свеќите биле запалени во исто време, одредено време гореле, а потоа двете биле изгаснати. Откако биле изгаснати, остатокот од подебелата свеќа бил три пати подолг од остатокот од потенката свеќа. Колку време гореле свеќите?

Решение. Нека x е должината на свеќите и нека свеќите гореле t часови. Од подебелата свеќа за еден час ќе изгори дел со должина $\frac{x}{4}$, а по време t ќе остане дел со должина $x-\frac{x}{4}t$. Од потенката свеќа за еден час ќе изгори дел со должина $\frac{x}{2}$, а по време t ќе остане дел со должина $x-\frac{x}{2}t$. Бидејќи остатокот од подебелата свеќа е три пати подолг од остатокот од потенката свеќа, ја добиваме равенката

$$x-\frac{x}{4}t=3(x-\frac{x}{2}t)$$

чие решение е $t=\frac{8}{5}h$. Свеќите гореле 1 час и 36 минути, односно гореле 96 минути.

2. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи дека важи неравенстото

$$a^4+a^2b^2+b^4\geq\frac{3}{4}c^4\,. \tag{1}$$

Решение. Според Питагоровата теоема имаме $a^2+b^2=c^2$. Последното равенство го квадрираме и го добиваме равенството

$$a^4+2a^2b^2+b^4=c^4\,.$$

Според тоа, неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^4+a^2b^2+b^4\geq\frac{3}{4}(a^4+2a^2b^2+b^4),$$
$$4(a^4+a^2b^2+b^4)\geq 3(a^4+2a^2b^2+b^4),$$
$$a^4-2a^2b^2+b^4\geq 0,$$
$$(a^2-b^2)^2\geq 0.$$

Последното неравенство е точно бидејќи квадрат на секој реален број е ненегативен број, па затоа точно е и неравенството (1).

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2b^2+2ab-b^2+2b=2022.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$a^2b^2+2ab+1-b^2+2b-1=2022,$$
$$(ab+1)^2-(b-1)^2=2022,$$
$$(ab+1-b+1)(ab+1+b-1)=2022,$$
$$b(a+1)(ab-b+2)=2022.$$

Понатаму, ако b е парен број, левата страна на последната равенка е делива со 4, а десна страна не е делива со 4, што е противречност. Затоа b мора да е непарен број. Сега, ако a е парен број, тогаш бидејќи b е непарен, добиваме дека левата страна е непарен број, а десната е парен број, што не е можно. Значи, a мора да е непарен број. Но, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4, што е противречност.

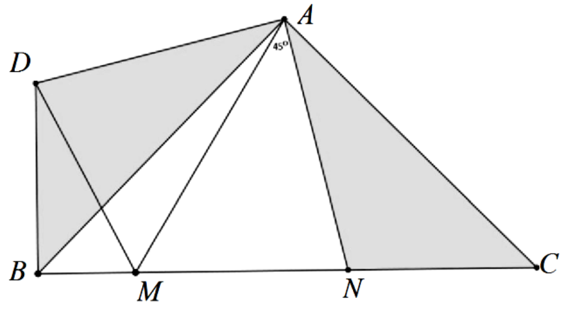
Конечно, од претходните разгледувања следува дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

4. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и M и N се две точки од хипотенузата BC, такви што $\measuredangle MAN=45^\circ$ и $M\in BN$. Докажи дека

$$\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=\overline{MN}^2.$$

Решение. Над страната AB, надвор од $\triangle ABC$, конструираме $\triangle ABD$ складен со $\triangle ACN$, таков што $\overline{BD}=\overline{NC}$ и $\overline{AD}=\overline{AN}$. Тогаш,

$$\measuredangle MBD=\measuredangle MBA+\measuredangle ABD=\measuredangle ABM+\measuredangle ACN=\measuredangle ABC+\measuredangle BCA=90^\circ.$$



Уште повеќе,

$$\begin{aligned}\measuredangle DAM &= \measuredangle DAB + \measuredangle BAM = \measuredangle NAC + \measuredangle BAM \\ &= \measuredangle BAC - \measuredangle MAN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \measuredangle MAN.\end{aligned}$$

Бидејќи $\overline{DA} = \overline{AN}$ и AM е заедничка страна, триаголниците DAM и MAN се складни (САС). Заклучуваме дека $\overline{DM} = \overline{MN}$. Сега ја применуваме Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник MBD и добиваме

$$\overline{MN}^2 = \overline{DM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2$$

што требаше да се докаже.