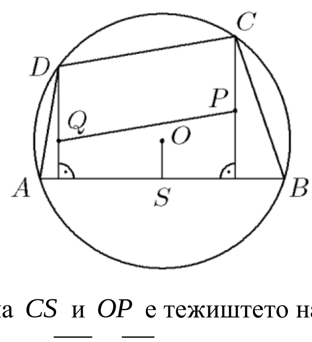
БМО 1984

1. Нека $a_i, i=1,2,...,n, (n\geq 2)$ се позитивни броеви такви што $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Докажи дека
$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}}\geq\frac{n}{2n-1}.$$
Решение. За секој $i=1,2,...,n$ важи
$$\frac{a_i}{1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}=\frac{a_i}{2-a_i}=\frac{2}{2-a_i}-1,$$
па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството
$$\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\geq\frac{n^2}{2n-1}.$$
Ставаме $x_i=2-a_i, i=1,2,...,n$ и добиваме
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\geq\frac{n^2}{2n-1},$$
каде $x_i>0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2n-\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n-1$. Според тоа, неравенството е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}.$$

2. Нека $A_1A_2A_3A_4$ тетивен е четириаголник. Со H_1,H_2,H_3,H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Докажи дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

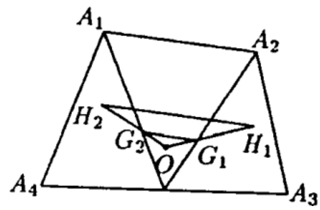
Лема. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник и P и Q се ортоцентрите соодветно на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, тогаш четириаголникот $PCDQ$ е паралелограм.



Доказ. Од $CP\perp AB$ и $DQ\perp AB$ следува $CP\parallel DQ$. Ако O е центарот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ и S е средината на AB, тогаш важи $2\overline{OS}=\overline{CP}$ (ова својство се докажува ако се искористи дека пресечната точка на CS и OP е тежиштето на триаголникот ABC). Аналогно, $2\overline{OS}=\overline{DQ}$, па затоа $\overline{DQ}=\overline{CP}$. Конечно, од $CP\parallel DQ$ и $\overline{DQ}=\overline{CP}$ следува, дека $PCDQ$ е паралелограм. ■

Од лемата следува, дека отсечките A_1A_2 и H_2H_1; A_2A_3 и H_3H_2; A_3A_4 и H_4H_3; A_4A_1 и H_1H_4 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

Втор начин. Нека O е центарот на опишаната кружница, а G_1, G_2, G_2, G_4 се тежиштата на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$, соодветно. Точките O, G_i, H_i, за $i=1,2,3,4$ припаѓаат на соодветните Ојлерови прави и притоа важи $\overrightarrow{OH_i} = 3\overrightarrow{OG_i}$. Тогаш



$$\overrightarrow{OH_i} = 3 \cdot \tfrac{1}{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \overrightarrow{OA_j} = \vec{v} - \overrightarrow{OA_i},$$

каде $\vec{v} = \sum_{j=1}^{4} \overrightarrow{OA_j}$. Ако $\overrightarrow{OAB_i} = -\overrightarrow{OA_i}$, за $i=1,2,3,4$, тогаш $\overrightarrow{OH_i} = \vec{v} + \overrightarrow{OB_i}$, па значи четириаголникот $H_1H_2H_3H_4$ се добива од четириаголникот $B_1B_2B_3B_4$ со транслација за вектор $\vec{v}$. Но, $B_1B_2B_3B_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ се симетрични при централна симетрија со центар O, т.е. $H_1H_2H_3H_4$ се добива од $A_1A_2A_3A_4$ со помош на централна симетрија и транслација, па затоа овие четириаголници се складни.

Трет начин. Да разгледаме координатен систем со координатен почеток во центарот O на опишаната кружница околу четириаголникот $A_1A_2A_3A_4$. Нека a_i и h_i се комплексните броеви (афиксите) соодветни на A_i и H_i, за $i=1,2,3,4$. Тогаш $h_i = \sum_{j=1}^{4} a_j - a_i$, па затоа $\overline{H_iH_k} = |h_i - h_k| = |a_i - a_k| = \overline{A_iA_k}$.

Според тоа, четириаголниците $H_1H_2H_3H_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ имаат еднакви страни и еднакви дијагонали. Затоа, $\triangle A_4A_1A_2 \cong \triangle H_4H_1H_2$, т.е. $\measuredangle A_1 = \measuredangle H_1$, што значи дека разгледуваните четириаголници се складни.

Четврт начин. Четириаголниците $G_1G_2G_2G_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ се слични со коефициент на сличност $\frac{1}{3}$, бидејќи на пример $G_1G_2 \parallel A_2A_1$ и $\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_2A_1}} = \frac{1}{3}$. Четириаголниците $G_1G_2G_2G_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се исто така слични со коефициент на сличност $\frac{1}{3}$, бидејќи на пример $G_1G_2 \parallel H_2H_1$ и $\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{H_2H_1}} = \frac{1}{3}$ (Ојлерова права). Значи, четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се слични со коефициент на сличност 1, т.е. тие се складни.

3. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број $n > m$ таков што декадниот запис на 5^n се добива од декадниот запис на 5^m со додавање на неколку цифри од лево.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе докажеме, дека ако бројот 5^m има k цифри, тогаш $k \leq m$. Навистина, ако го претпоставиме спротивното, тогаш $k-1 \geq m$, па како секој број со k цифри е поголем или еднаков на 10^{k-1} добиваме

$$10^{k-1} \geq 10^m > 5^m \geq 10^{k-1},$$

што е противречност.

Ако најдеме n таков што $5^n - 5^m$ е делив со 10^k, тогаш последните k цифри на 5^n се совпаѓаат со бројот 5^m, т.е. 5^n се добива од 5^m со додавање на неколку цифри од лево. Бидејќи броевите 2 и 5 се заемно прости, заклучуваме дека бројот $5^{\varphi(2^k)} - 1$ е делив со 2^k, каде $\varphi(x)$ е Ојлеровата функција. Тогаш бројот

$$5^{m+\varphi(2^k)} - 5^m = 5^m(5^{\varphi(2^k)} - 1)$$

е делив со 5^k и со 2^k, т.е. е делив со 10^k. Значи, $n = m + \varphi(2^k)$ е бројот со саканото својство.

Втор начин. Ќе бараме n во облик $n = m + k$, каде $k > 0$. Нека r_m е бројот на цифрите на декадниот запис на 5^m. Бидејќи треба $5^n - 5^m = 10^{r_m} a$, доволно е 10^{r_m} да е делител на $5^n - 5^m$. Но, $5^n - 5^m = 5^m(5^k - 1)$ и како $r_m < m$ (Зошто?), добиваме дека 5^{r_m} е делител на 5^m. Од друга страна $10^{r_m} = 5^{r_m} 2^{r_m}$ и затоа доволно е 2^{r_m} да е делител на $5^k - 1$. Ќе користиме индукција. Нека $r_m = 1$ и да ставиме $k = 1$. Очигледно $2^{r_m} = 2$ е делитек на $5^k - 1 = 4$. Нека $r_m \geq 1$ и нека k е таков што 2^{r_m} е делитек на $5^k - 1$. На $r_m + 1$ во соодветствве му ставаме $2k$. Тогаш, бидејќи $2^{r_m} \mid 5^k - 1$ и $2 \mid 5^k + 1$, добиваме $2^{r_m+1} \mid 5^{2k} - 1$, што и требаше да се докаже.

4. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax + by = (x-y)^2 \\ by + cz = (y-z)^2 \\ cz + ax = (z-x)^2 \end{cases}$$

каде a, b, c се позитивни броеви.

Решение. Ги собираме трите равенки и добиваме

$$ax+by+cz=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\,.$$

Во последното равенство заменуваме

$$ax+by=x^2+y^2-2xy$$

и добиваме

$$cz=z^2+xy-yz-zx=(z-x)(z-y)\,.$$

Аналогно добиваме $by=(y-x)(y-z)$ и $ax=(x-z)(x-y)$. Ако $x\ge y\ge z$, тогаш

$$\begin{aligned} ax&=(x-z)(x-y)\ge 0\\ by&=(y-x)(y-z)\le 0\\ cz&=(z-x)(z-y)\ge 0. \end{aligned}$$

Бидејќи a,b,c се позитивни броеви, добиваме $x\ge 0,\ y\le 0$ и $z\ge 0$. Сега од $y\ge z$ следува дека $y=z=0$ и од $ax=x^2$ добиваме $x=0$ или $x=a$. Во овој случај ги добиваме решенијата $(0,0,0)$ и $(a,0,0)$. Аналогно добиваме уште две решенија $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$.