XXXII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Кој од броевите 723,732 и 273 најмногу ќе се намали и за колку, ако во секој од нив цифрите 7 и 3 си ги заменат местата?

Решение. Паровите броеви што при ваквата замена се добиваат се

$$\begin{aligned} 732 &\rightarrow 372 \\ 723 &\rightarrow 327, \\ 273 &\rightarrow 237 \end{aligned}$$

а соодветните разлики се

$$\begin{aligned} 732-372&=360 \\ 723-327&=396 \\ 273-237&=36. \end{aligned}$$

Според тоа, најмногу ќе се намали бројот 723 и тоа за 396.

Задача 2. Определи ги збирот и разликата меѓу најголемиот трицифрен број кој има збир на цифри 8 и најмалиот трицифирен број кој има производ на цифри 8.

Решение. Најголемиот трицифрен број кој има збир на цифри 8 е 800 а најмалиот трицифрен број кој има производ на цифри 8 е 118.Сега, нивниот збир е $800+118=918$, а нивната разлика е $800-118=682$.

Задача 3. Една верверичка во текот на првата недела собрала 84 лешници, во текот на втората недела 96 лешници, а во текот на третата недела 65 лешници. Друга верверичка во четвртата недела собрала трипати повеќе лешници, отколку првата верверичка во втората и третата недела заедно. Колку вкупно лешници собрале двете верверички во текот на четирите недели?

Решение. Првата верверичка собрала $84+96+65=245$ лешници во текот на трите недели. Втората верверичка во четвртата недела собрала вкупно $3\cdot(96+65)=3\cdot161=483$ лешници. Двете верверички заедно собрале $245+483=728$ лешници.

Задача 4. Броевите од 1 до 100 се запишани едно до друго така што е добиен многуцифрен број: 123456789101112131415...979899100.

Колку цифри има тој број?

Решение. Бројот на сите цифри: има 9 едноцифрени броеви, има 90 двоцифрени броеви и еден троцифрен број, $9+90\cdot 2+3=192$ цифри.

Задача 5. Еден ракометен тим има шест играчи на теренот и девет резерви, не ги сметаме голманите. Сите 15 играчи на една натпревар играле рамномерно (можен е неограничен број на измени во ракометниот натпревар, играчот може повеќе пати да влегува и излегува и нема исклучувања на играчи). По колку минути ќе игра секој играч, ако натпреварот трае 1 час (две полувремиња по 30 минути).

Решение. Имаме 1h = 60min. На теренот секогаш има по 6 играчи. $60\cdot 6=360\min$ е вкупната минутажа на сите играчи. Екипата броела вкупно 15 играчи. $360:15=24\min$. Секој играч играл по 24min.

V одделение

Задача 1. Пет момчиња се мерат на вага по двајца во сите можни комбинации. Вагата ги покажала следните маси: $72\,kg$, $75\,kg$, $76\,kg$, $77\,kg$, 78 kg, $80\,kg$, $81\,kg$, $82\,kg$, $85\,kg$ и $86\,kg$. Колкава е вкупната маса на сите пет момчиња?

Решение. *Прв начин.* Секое момче се мерело по еднаш со останатите четири момчиња, што значи дека во дадените десет маси масата на секое момче се јавува четири пати. Ако ги собереме дадените маси, тогаш во збирот четири пати ќе учествуваат масите на петте момчиња. Според тоа, масата на петте момчиња е четвртина од пресметаниот збир. Значи, ако x е масата на петте момчиња, тогаш

$$x=(72+75+76+77+78+80+81+82+85+86):4=792:4=198kg.$$

Втор начин. Нека со x, y, z, u, v ги означиме масите соодветно на првото, второто, третото, четвртото и петтото момче. Тогаш, од условот на задачата имаме

$$x+y=72,\ y+z=75,\ z+u=76,\ u+v=77,\ v+x=78,$$

$$x+z=80,\ y+u=81,\ z+v=82,\ u+x=85,\ v+y=86.$$

Ако ги собереме овие 10 равенки ќе добиеме $4(x+y+z+u+v)=792$. Па, петте момчиња имаат вкупно $x+y+z+u+v=198$ kg.

Задача 2. Во една слаткарница секое колаче чини 32 денари. По повод први септември (ден на почеток на учебната година) слаткарот објавил дека секое дете што ќе влезе во слаткарницата за да купи колаче, пред да го плати ќе добие онолку пари колку што има во моментот. Тој ден Дамјан во слаткарницата влегол четири пати и купил четири колачиња. На крајот немал ниту еден денар.

Колку денари имал Дамјан кога прв пат влегол во слаткарницата?

Решение. *Прв начин.* Ако Дамјан на почетокот имал x денари, тогаш од условот на задачата добиваме

$$2(2(2(2x-32)-32)-32)-32=0,$$

од каде последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&2(2(2(2x-32)-32)-32)-32=0\\
&2(2(2x-32)-32)-32=16\\
&2(2x-32)-32=24\\
&2x-32=28\\
&2x=60
\end{aligned}$$

Значи, на почетокот Дамјан имал 30 денари.

Втор начин. Дамјан пред последниот пат да влезе во продавницата имал 16 денари. Значи, пред да влезе да го купува третото колаче имал 24 денари (24 денари имал, 24 денари имал му дал слаткарот и по купувањето му останале $24+24-32=16$ денари).

За да по купувањето на второто колаче му останат 24 денари, тој пред да влезе во продавницата мора да има 28 денари (28 денари има, 28 денари му дал слаткарот па $28+28-32=56-32=24$)

Значи по купувањето на првото колаче тој треба да има 28 денари. Сега не е тешко да се види дека тој на почетокот тој имал 30 денари (30 денари имал, 30 му дал слаткарот и $30+30-32=28$ денари што му останале).

Задача 3. Нека е дадена коцката $ABCDEFGH$. Колку има отсечки, чии крајни точки се темињата на коцката? Образложи го одговорот.

Решение. Коцката има 8 темиња. Од секое теме може да повлечеме 7 отсечки кон останатите темиња. На тој начин добиваме $8\cdot 7=56$ отсечки. Но при броењето, секоја отсечка се појавува 2 пати. Значи постојат $56:2=28$ отсечки.

Задача 4. Месецот мај во една година имал четири понеделници и четири петоци. Кој ден во неделата бил први мај?

Решение. Месецот мај има 31 ден. Ако месецот има четири понеделници и четири петоци, тогаш има и четири саботи и недели. Деновите што паѓаат на 29-ти, 30-ти и 31-ви ги има пет пати во месецот, па затоа тие се вторник, среда и четврток. Следува 29-ти мај е вторник, па 1-ви мај е исто така во вторник.

Задача 5. Милан и Александар имаат голема кутија со чоколадни бонбони, кои требало да ги поделат на следниот начин: Прво Милан зел 1 бонбона, а Александар две бонбони, потоа Милан зел три, а Александар четири бонбони и така натаму наизменично за една бонбона повеќе земал секој од нив.

Кога бројот на останатите бонбони во кутијата е помалку од неопходниот број, кој што треба да го земе некој од двајцата другари кој е на ред, ги зема сите останати бонбони. Колку бонбони имало на почетокот во кутијата, ако последен зел Милан и на крајот имал 101 бонбона.

Решение. Милан: $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$

Александар: $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=110$

Во последното земање Милан земал само една чоколадна бонбона и имал вкупно 101. На почетокот во кутијата имало $101+110=211$ бонбони.

VI одделение

Задача 1. На правата p дадени се по наведениот редослед точките $M, A, B, C,$ D и N, така што $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$. Растојанието меѓу средините на отсечките AB и CD е $32cm$, а растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е $57cm$. Колку е долга отсечката MN?

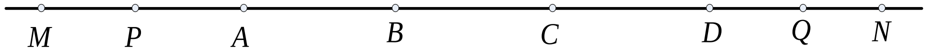
Решение. Од тоа што растојанието меѓу средините на отсечките AB и CD е $32cm$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$ следува дека $2\overline{BC}=32cm$, односно должината на отсечката $\overline{AB}=16cm$. Нека P е средина на отсечката MA, а Q е средина на отсечката DN.

Бидејќи растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е $57cm$, следува дека збирот од должините на отсечките

$$\overline{MP}+\overline{QN}=57-3\cdot 16=9cm.$$

Значи должината на отсечката MN е

$$\overline{MN}=\overline{MP}+\overline{PQ}+\overline{QN}=57+9=66cm.$$

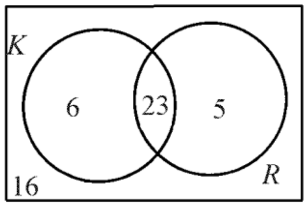


Задача 2. Аголот α претставува $\frac{2}{3}$ од својот комплементен агол. Ако аголот β е суплементен со аголот α, колкав дел од β е аголот α?

Решение. Нека γ е комплементниот агол на α. Тогаш $\alpha=\frac{2}{3}\gamma$, односно $\gamma=\frac{3}{2}\alpha$ и $\alpha+\frac{3}{2}\alpha=90^\circ$. Оттука $\alpha=36^\circ$. Неговиот суплементен агол е $\beta=180^\circ-36^\circ=144^\circ$, па $\alpha=4\beta$.

Задача 3. Во училиштето има 50 наставници, од кои 29 пијат кафе, 28 пијат чај, а 16 не пијат ниту кафе, ниту чај. Колку наставници пијат само кафе, а колку само чај?

Решение. Бидејќи 16 наставници не пијат ниту кафе, ниту чај добиваме дека 50-16=34 наставници пијат или кафе или чај. Но, чај пијат 28, а кафе 29 наставници, па затоа $(28+29)-34=57-34=23$ наставници пијат и кафе и чај. Само кафе пијат $29-23=6$ наставници, а само чај пијат $28-23=5$ наставници.



Задача 4. Одреди го најголемиот број со кој треба да се поделат 845 и 275, за остатокот во двата случаи да биде 5.

Решение. Броевите $845-5=840$ и $275-5=270$ се деливи со еден ист број. Го бараме најголемиот од нив, односно НЗД$(840,270)=30$. Тогаш бараниот број е 30.

Задача 5. Сите ученици од VI^a, VI^b, VI^c, VI^d и VI^e заедно со нивните класни раководители биле на кино. Во VI^b има еден ученик повеќе отколку во VI^a, а во VI^c има 2 ученика повеќе отколку во VI^b, во VI^d има 3 ученика повеќе отколку во VI^c и во VI^e има 4 ученика повеќе отколку во VI^d. Во киното има 12 редови со по 18 седишта. Колку ученика има во секое од VI^a, VI^b, VI^c, VI^d и VI^e, ако 96 седишта во киното останале празни?

Решение. Во киното има вкупно $12\cdot18=216$ седишта. Од тој број на седишта 96 останале празни, па вкупниот број на присутни во киното е

$216-96=120$, а бројот на ученици е $120-5=115$. Нека во VI^a има x ученици. Тогаш во VI^b има $x+1$, во VI^c има $x+1+2=x+3$, во VI^d има $x+1+2+3=x+6$ и во $6e$ има $x+1+2+3+4=x+10$. Имаме,

$$x+x+1+x+3+x+6+x+10=115,$$

односно $5x+20=115$, од каде $5x=95$, па $x=19$. Значи во VI^a има 19 ученици, во VI^b има 20 ученици, во VI^c има 22 ученика, во VI^d има 25 ученици и во VI^e има 29 ученици.

VII одделение

Задача 1. Дали е можно од жица со должина $\frac{2}{3}$ метри да се исече $\frac{1}{2}$ метар без да користиме метар или друг инструмент за мерење на должина? Образложи го својот одговор!

Решение. Ако жицата ја превиткаме точно на половина, деловите ќе бидат долги $\frac{1}{3}$ метри, а ако постапката ја повториме уште еднаш ќе добиеме делови кои имаат по $\frac{1}{6}$ метри. Ако отсечеме еден од крајните делови ќе добиеме $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ метри. Според тоа, од жица со должина $\frac{2}{3}\mathrm{m}$ без користење на метро може да се исече парче со должина $\frac{1}{2}\mathrm{m}$.

Задача 2. Одреди ги сите природни броеви a и b за кои броевите $x=\frac{2a+b}{3b+2}$, $y=\frac{3b+2}{8}$ и $z=\frac{8}{2a+b}$ се природни броеви.

Решение. Не е тешко да се провери дека е исполнето равенството $xyz=1$, и бидејќи $x,y,z\in\mathbb{N}$ добиваме дека $x=y=z=1$. Според тоа, од $y=1$ добиваме $\frac{3b+2}{8}=1$, т.е. $3b+2=8$. Од последната равенка имаме $b=2$. Од друга страна пак, од $z=1$ добиваме $\frac{8}{2a+b}=1$, т.е. $2a+b=8$. Од добиената равенка имаме $a=3$.Сега не е тешко да се види дека и $x=1$ (за добиените вредности за a и b).

Значи, бараните броеви се $a=3$ и $b=2$.

Задача 3. Во едно училиште има 35% девојчиња, а момчиња за 252 повеќе од девојчињата. Колку момчиња, а колку девојчиња има во училиштето?

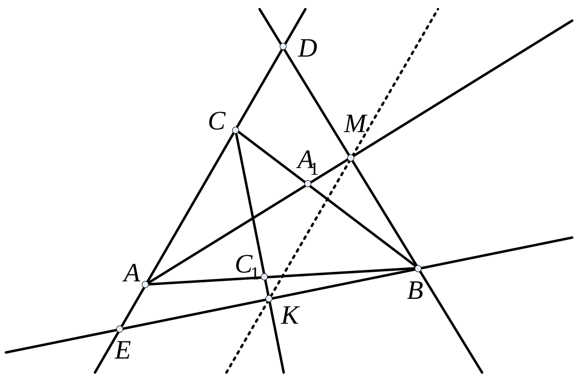
Решение. Во училиштето има 65% момчиња, што значи има 30% повеќе момчиња од девојчиња. Имаме ако 30% се 252 деца, тогаш 10% се 84 деца. Оттука заклучуваме дека во училиштето има 840 ученици, од кои 294 се женски, а 546 се машки.

Задача 4. Со помош на цифрите a,b и c составени се сите трицифрени броеви запишани со различни цифри. Збирот на сите такви броеви е 5328. Одреди ги сите можни вредности за цифрите a,b и c.

Решение. Дадениот збир е $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}=5328$, т.е. $2\cdot 111\cdot(a+b+c)=5328$. Значи $a+b+c=24$. Постои единствен избор за цифрите а тоа е 7, 8, 9.

Задача 5. Во триаголникот ABC повлечени се симетралите AA_1 на аголот α и CC_1 на аголот γ. Од темето B спуштени се нормали кон AA_1 и CC_1 и добиени се пресечните точки M и K, соодветно. Докажи дека $MK \| AC$.

Решение. Да ги продолжиме отсечките BM и BK до пресекот со правата AC и нека пресечните точки се соодветно D и E. Тогаш AM е симетрала на аголот α и е нормална на страната BD во триаголникот ABD, па ABD е рамнокрак со краци $\overline{AB}=\overline{AD}$ и M е средина на BD.



Слично, CK е симетрала на аголот γ и е нормална на страната EB во триаголникот EBC, па EBC е рамнокрак со краци $\overline{CE}=\overline{CB}$ и K е средина на EB. Од тоа што M е средина на BD и K е средина на EB следува дека MK е средна линија на триаголникот EBD па $MK \| ED$ односно $MK \| AC$.

VIII одделение –деветтолетка

Задача 1. Ако $7a^2=7b^2+3c^2$ тогаш

$$(5a-2b+3c)(5a-2b-3c)=(2a-5b)^2.$$

Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(5a-2b+3c)(5a-2b-3c)&=(5a-2b)^2-9c^2=\\&=25a^2-20ab+4b^2-21a^2+21b^2\\&=4a^2-20ab+25b^2=(2a-5b)^2.\end{aligned}$$

Задача 2. Нека a,b,c,d,e се пет различни цели броеви за кои важи:

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12;$$

Докажи дека $a+b+c+d+e=17$.

Решение. Од условот на задачата броевите $4-a,4-b,4-c,4-d,\ 4-e$ се цели и различни меѓу себе. Лесно се забележува дека броевите $-1,1,2,-2,3$ се единствените пет различни меѓу себе цели броеви чии производ е 12. Оттука добиваме дека

$$(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e)=-1+1+2-2+3=3,$$

па го добиваме бараното равенство.

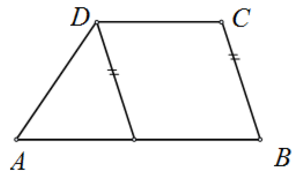
Задача 3. За да испече 100 кифлички на мајката и се потребни 30 минути, а на Маја 40 минути. Марко јаде 100 кифлички за еден час. Мајката и Маја заедно печат кифлички непрекинато, а Марко јаде непрекинато. После колку време од почетокот на печењето на масата ќе останат точно 100 кифлички?

Решение. *Прв начин.* Ако мајката пече 100 кифлички за 30 минути, тогаш за 1 минута ќе испече $\frac{100}{30}=\frac{10}{3}$ кифлички. Ако Маја пече 100 кифлички за 40 минути, тогаш за 1 минута ќе испече $\frac{100}{40}=\frac{10}{4}$ кифлички. Бидејќи тие две заедно печат, тогаш за 1 минута ќе испечат $\frac{10}{3}+\frac{10}{4}=\frac{35}{6}$ кифлички. Марко јаде 100 кифлички за еден час, па за 1 минута ќе изеде $\frac{100}{60}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$ кифлички. Ако времето после кое на масата ќе останат 100 кифлички го означиме со x, тогаш имаме $(\frac{35}{6}-\frac{5}{3})x=100$, т.е. $x=24$ минути.

Втор начин. Ако мајката пече 100 кифлички за 30 минути, тогаш за 2 часа ќе испече 400 кифлички. Ако Маја пече 100 кифлички за 40 минути, тогаш за 2 часа ќе испече 300 кифлички. Марко јаде 100 кифлички за еден час, па за два часа ќе изеде 200 кифлички. Тогаш за два часа имаме $400+300-200=500$ кифлички. Треба да ни останат 100 кифлички, па $500:5=100$ и следува дека бараното време е $120:5=24$ минути.

Задача 4. Во трапезот $ABCD$ должината на едниот крак е еднаква со едната основа, а двапати помала од другата основа. Докажи дека другиот крак на трапезот е нормален на една од дијагоналите.

Решение. Да ги означиме основите на трапезот со a и b. Тогаш од услов имаме $a=2c$ и $b=c$, каде c е должината на едниот крак. Ако од D повлечеме паралелна права со BC и пресечната точка на таа права со AB ја означиме со E, тогаш $BCDE$ е паралелограм. Бидејќи $b=c$, следува дека $BCDE$ е ромб.



Притоа DE е тежишна линија во триаголникот ABD која има иста должина со деловите во кои ја дели спротивната страна, па триаголникот ABD е правоаголен со $\measuredangle ADB=90^0$. Бидејќи BD е дијагонала на трапезот, а AD е вториот негов крак, следува дека кракот и дијагоналата се заемно нормални.

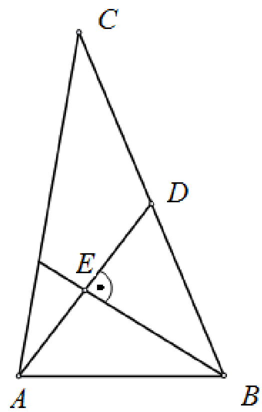
Задача 5. Во триаголникот ABC должините на страните се три последователни природни броеви. Нека тежишната линија повлечена од темето A е нормална на симетралата на аголот $\angle ABC$. Одреди ги должините на страните на триаголникот ABC.

Решение. Триаголникот ABD е рамнокрак (BE е висина спуштена од темето B и симетрала на аголот $\measuredangle ABD$). Следува дека $\overline{AB}=\overline{BD}=\frac{\overline{BC}}{2}$, односно $\overline{BC}=2\overline{AB}$. Постојат две можности:

1^0 $\overline{BC}=\overline{AB}+2=2\overline{AB}$ и

2^0 $\overline{BC}=\overline{AB}+1=2\overline{AB}$.

Ако $\overline{BC}=\overline{AB}+1=2\overline{AB}$, тогаш $\overline{AB}=1$ и $\overline{BC}=2$. Тогаш $\overline{AC}=3$ или $\overline{AC}=0$. Јасно, случајот кога $\overline{AC}=0$ не е можен. Следува дека $\overline{AC}=3$. Но тогаш од неравенство на триаголник се добива $3=AB+BC>AC=3$, што не е можно. Ако $\overline{BC}=\overline{AB}+2=2\overline{AB}$, тогаш $\overline{AB}=2, \overline{BC}=4$ и $\overline{AC}=3$.



VIII одделение –осмолетка

Задача 1. Група момчиња и девојчиња собрале 1700 денари за роденденски подарок. Девојчињата собирале по 200 денари, а момчињата по 300 денари. Одреди го бројот на момчиња и девојчиња во групата, ако се знае дека групата има непарен број членови.

Решение. Ако бројот на девојчиња го означиме со x, а на момчиња со y, тогаш имаме $200x+300y=1700$ т.е. $2x+3y=17$. Значи бројот $2x+3y$ мора да биде непарен , па y мора да е непарен број и $y\in\{1,3,5\}$.

Ако $y=1$, тогаш $x=\frac{17-3}{2}=7$, но тогаш групата има $1+7=8$ члена, што не е можно.

Ако $y=3$, тогаш $x=\frac{17-9}{2}=4$ и групата има $3+4=7$ члена.

Ако $y=5$, тогаш $x=\frac{17-15}{2}=1$, но тогаш групата има $5+1=6$ члена, што не можно.

Конечно во групата има 4 девојчиња и 3 момчиња.

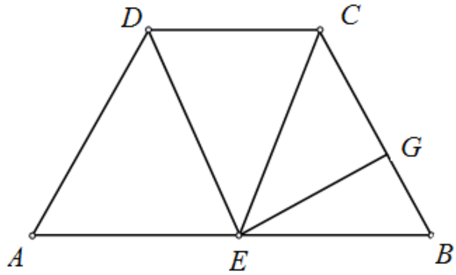
Задача 2. На маса во форма на круг со радиус 25 лежат n метални парички со радиус 1, така што ниедна паричка не излегува надвор од масата. Ако $n>625$, тогаш постојат парички што делумно се препокриваат. Докажи!

Решение. Плоштината на масата е 625π, а плоштината на секоја паричка е π. Ако имаме повеќе од 625 парички, тогаш нивната вкупна плоштина ќе биде поголема од 625π, па според Принципот на Дирихле мора да постојат парички што се препокриваат.

Задача 3. Плоштината на основата на права тристрана призма е $4cm^2$, а плоштините на бочните ѕидови се 9 cm^2, 10 cm^2 и 17 cm^2. Пресметај го волуменот на призмата.

Решение. Нека H е висина на призмата. Тогаш $a=\frac{9}{H}, b=\frac{10}{H}, c=\frac{17}{H}$, каде што a,b,c се должини на рабовите на основата. Од $B=4cm^2$, со примена на Хероновата формула, добиваме $4=\frac{36}{H^2}$, од каде што следува дека $H=3cm, V=BH=12cm^3$.

Задача 4. Во рамнокракиот трапез $ABCD$ со должина на кракот 10, едната од основите е два пати поголема од другата. Ако едниот од аглите на трапезот е 75°, пресметај ја неговата плоштина.



Решение. Нека E е средина на поголемата основа AB. Тогаш $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CD}$. Па, бидејќи $AB\parallel CD$ добиваме дека $AECD$ и $EBCD$ се паралелограми. Односно, $\overline{AD}=\overline{ED}=\overline{EC}=\overline{BC}$ од што добиваме дека $\triangle AED\cong\triangle BEC\cong\triangle CDE$ (ССС). Па $P_{ABCD}=3P_{BEC}$. Нека EG е висина спуштена од E кон BC. Бидејќи $\measuredangle BEC=\measuredangle EBC=75^\circ$ добиваме $\measuredangle ECB=30^\circ$, од што следи $\overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{EC}=5$. Конечно, $P_{BEC}=\frac{10\cdot 5}{2}=25$ и од тоа $P_{ABCD}=75$.

Задача 5. Докажи дека збирот на квадратите на произволни 2014 последователни природни броеви не е квадрат на природен број.

Решение. Помеѓу 2014 последователни природни броеви, секогаш 1007 се парни и 1007 се непарни. За секој парен број $2n$ важи $(2n)^2=4n^2$, односно неговиот квадрат е делив со 4. Слично, за секој непарен број 2n+1 важи $(2n+1)^2=4(n^2+n)+1$, односно неговиот квадрат дава остаток 1 при делење со 4. Бидејќи $1007=4\cdot 251+3$, следува дека збирот на квадратите на произволни 2014 последователни природни броеви, при делење со 4, дава остаток 3, но претходно видовме дека квадрат на природен број дава остаток 0 или 1, при делење со 4. Значи збирот на квадратите на произволни 2014 последователни природни броеви не може да биде квадрат на природен број.