УЗ ПОЧЕТАК 2013. ГОДИНЕ

Ратко Тошић, Нови Сад

1. У 2013. години Марко пуни толико година колики је збир цифара године његовог рођења. То исто важи и за његовог најстаријег брата. Колико је Марко млађи од свог најстаријег брата?

2. Дешифруј сабирање
$$ABCD + EC = 2013.$$
Различита слова представљају различите цифре.

3. Да ли постоји број са збиром цифара 2013 који је потпун квадрат?

4. Да ли се број
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2013^2$$
може представити у облику збира
(а) 2012; (б) 2011
различитих квадрата природних бројева?

5. Означимо са $S(n)$ збир цифара броја n. Наћи све природне бројеве n такве да је број 2013 дељив са $n + S(n)$.

6. Природан број завршава се са 2013. Брисањем последње четири цифре број се смањи цео број пута. Који је то број?

7. Постоје ли цели бројеви x, y, z, t такви да је
$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 20122013?$$

8. Исписани су редом природни бројеви, а затим су прецртани сви они који су квадрати или кубови природних бројева. Који се од непрецртаних бројева налази на 2013. месту?

9. По ободу кружнице исписано је 2013 бројева међу којима има и парних и непарних. Дозвољено је примењивати следећи операцију: између свака два суседна броја напише се њихов збир, а затим се полазни бројеви избришу. Да ли се после коначног броја операција може постићи да сви бројеви буду парни?

10. Први члан низа бројева је 2013, а сваки следећи једнак је збиру цифара претходног. Одреди 2013. члан тог низа.

11. У квадратну таблицу 2013×2013 исписани су бројеви 1, 2, 3, ..., 2013, сваки тачно по 2013 пута. Испоставило се да је збир бројева изнад главне дијагонале тачно 3 пута већи од збира бројева испод те дијагонале. Који је број уписан у централно поље таблице?

12. Наћи 1007 узастопних природних бројева, таквих да је први од њих дељив са 1, други са 3, трећи са 5, ... последњи са 2013.

13. Први члан низа је 439, а сваки следећи је 13 пута већи од збира цифара претходног. Одреди 2013. члан тога низа.

14. Квадрати природних бројева исписани су у низ један иза другог:

$$149162536496481100121144...$$

Која цифра стоји на 2013. месту?

15. Да ли постоји 2013 природних бројева (не обавезно различитих) чији је збир једнак њиховом производу?

РЕШЕЊА

1. Постоје два броја која сабрана са збиром својих цифара дају 2013. То су 1992 и 2010. Дакле, Марко је рођен 2010. године, а његов брат 1992. Марко је млађи од свог брата 18 година.

2. $1985 + 28 = 2013$, $1976 + 37 = 2013$, $1967 + 46 = 2013$, $1930 + 83 = 2013$.

3. Не. Број 2013 даје остатак 6 при дељењу са 9, а потпун квадрат при дељењу са 9 може имати као остатак само 0, 1, 4 и 7.

4. (а) Да. Заменити $1209^2 + 1612^2$ са 2015^2, имајући у виду да је

$$1209^2 + 1612^2 = (3 \cdot 403)^2 + (4 \cdot 403)^2 = (5 \cdot 403)^2 = 2015^2.$$

(б) У збиру добијеним под (а) заменити још и $1212^2 + 1616^2$ са 2020^2, имајући у виду да је $1212^2 + 1616^2 = (3 \cdot 404)^2 + (4 \cdot 404)^2 = (5 \cdot 404)^2 = 2020^2$.

5. Како је $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, тражени бројеви су сви они који задовољавају бар једну од једначина:

$$n + S(n) = 3, \quad n + S(n) = 11, \quad n + S(n) = 61, \quad n + S(n) = 33$$
$$n + S(n) = 183, \quad n + S(n) = 671, \quad n + S(n) = 2013.$$

Прва једначина нема решење. Решење друге једначине је 10, треће 53, четврте 30, пете 168, шесте 655, а решења седме су 1992 и 2010.

6. Брисањем последње четири цифре датог броја добија се број A. При томе је полазни број $10000A + 2013$ дељив са A. Да би тај број био дељив са A мора и 2013 да буде дељив са A. Дакле, тражени бројеви су 12013, 32013, 112013, 612013, 332013, 1832013, 6712013, 20132013.

7. Не. После степеновања са три, скраћивања и груписања добијамо да је израз на левој страни дељив са 3.

8. Има 44 природна броја мања од 2013 који су квадрати и 12 који су кубови ($44^2 = 1936 < 2013 < 2025 = 45^2$, $12^3 = 1728 < 2013 < 2197 = 13^3$). Међу њима су три броја који су шести степени, тј. и квадрати и кубови: 1, 64 и 729. Дакле, међу бројевима од 1 до 2013 има $2012 - 44 - 12 + 3 = 1959$ бројева који нису ни квадрати ни кубови.
Преостаје да видимо која су следећа 54 броја који нису ни квадрати ни кубови. Међу следећих 55 бројева (од 2013 до 2067) само је број 2025 квадрат, а кубова нема. Дакле, 2013. број у траженом низу биће 2067.

9. Не. Претпоставимо да у једном тренутку добијемо све парне бројеве. Непосредно пре тога морали су сви бројеви бити непарни, а непосредно пре тога су по кружници морали бити наизменично поређани парни и непарни бројеви. То је, међутим, немогуће, јер је број бројева непаран.

10. Испишимо првих неколико чланова низа:

2013, 14, 17, 50, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, ...

После другог појављивања броја 89 јасно је да ће се периодично понављати бројеви

89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58.

Како пре прве периоде имамо седам чланова низа и $2013 = 7 + 250 \cdot 8 + 6$, 2013. члан низа биће 6. број периоде, тј. 16.

11. Нека је A збир бројева изнад, а B збир бројева испод дијагонале. Количник $A : B$ имаће највећи вредност кад су испод дијагонале исписани само бројеви 1, 2, 3, ..., 1006, а изнад дијагонале само бројеви 1008, 1009, ..., 2013 и у том случају је тај количник 3.
Заиста, у општем случају је

$$(k+1)+1+(k+1)+2+\ldots+(k+1)+k = k(k+1)+(1+2+\ldots+k)$$
$$= k(k+1)+\frac{k(k+1)}{2} = 3\cdot\frac{k(k+1)}{2} = 3\cdot(1+2+\ldots+k).$$

Дакле, у нашем задатку наступа баш тај случај, па су на главној дијагонали сви бројеви једнаки 1006, према томе и онај у централном пољу таблице.

12. Нека је $A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013$. Тражени бројеви су $\frac{A+1}{2}, \frac{A+3}{2}, \ldots, \frac{A+2013}{2}$.

13. Првих неколико чланова низа су 439, 208, 130, 52, 91, 130, ...
Видимо да је низ периодичан и да је сваки трећи члан 130. Како је број 2013 дељив са 3, тражени члан је 130.

14. Бројеви од 1 до 3 имају једноцифрене квадрате, бројеви од 4 до 9 – двоцифрене, бројеви од 10 до 31 – троцифрене, бројеви од 32 до 99 – четвороцифрене, бројеви од 100 до 316 – петоцифрене. Укупан број цифара првих 316 квадрата је према томе једнак

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија