XLIV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Даден е квадрат со страна долга $12cm$. Најди ги димензиите на сите различни правоаголници чии должини на страните се различни природни броеви, а нивната плоштина е еднаква на плоштината на дадениот квадрат. Кој од добиените правоаголници има најголем, а кој најмал периметар?

Решение. Правоаголникот има иста плоштина со дадениот квадрат, па затоа плоштината на правоаголникот е $144cm^2$. Го разложуваме бројот 144 на делители, т.е. $144=2^4\cdot 3^2$ и ги формираме сите можни двојки различни природни броеви чиј производ е 144. Така добиваме 6 правоаголници со страни: 2 и 72, 4 и 36, 6 и 24, 8 и 18, 3 и 48, 9 и 16, изразени во cm.

Периметарот на секој од нив е
$$2(2+72)=148cm,\ 2(4+36)=80cm,\ 2(6+24)=60cm,$$
$$2(8+18)=52cm,\ 2(3+48)=102cm,\ 2(9+16)=50cm.$$
Најголем периметар има правоаголникот со страни $2cm$ и $72cm$, а најмал оној со страни $9cm$ и $16cm$.

2. Разликата на два природни броеви е 15, а нивниот најмал заеднички содржател е 42. Кои се тие броеви? Образложи го својот одговор!

Решение. Ако еден од тие броеви го означиме со a, тогаш другиот број кој го бараме е $a+15$. НЗС на овие два броја е 42, па значи и двата броја се делители на 42. Значи, бројот a е еден од броевите 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 или 42. Но, и бројот $a+15$ е еден од овие броеви. Бидејќи $a+15$ е поголем од 15 и е делител на 42, имаме:

i) $a+15=21$, од каде $a=6$;

ii) $a+15=42$, од каде $a=27$, што е противречи на условот дека бројот a е делител на 42.

Значи бараните броеви се 6 и 21.

3. Цената на едно пенкало е цел број денари. Цената на 9 вакви пенкала е поголема од 1100 денари, а помала од 1200 денари. Цената на 13 пенкала е поголема од 1500 денари, а помала од 1600 денари. Колку чини едно пенкало?

Решение. Нека x е цената на едно пенкало. Заради условот на задачата, x е цел број денари. Според дадените услови, имаме

$$\begin{matrix} 1100 < 9x < 1200 \\ 1500 < 13x < 1600 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 122 < x < 134 \\ 115 < x < 124 \end{matrix}$$

при што, во првото неравенство делиме со 9, а во второто со 13. Ако ги подредиме двете последни неравенства, добиваме:

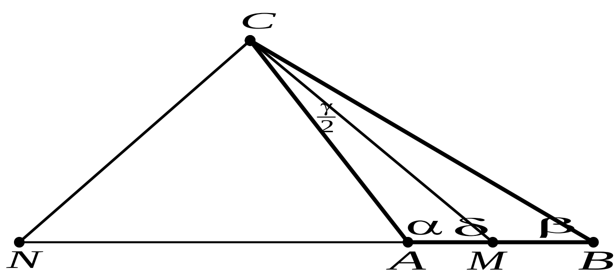
$$115 < 122 < x < 124 < 134,$$

што значи дека $x = 123$. Според тоа, цената на едно пенкало е 123 денари.

4. За внатрешните агли $\alpha = \measuredangle BAC$ и $\beta = \measuredangle ABC$ на триаголникот ABC важи $\alpha - \beta = 90^\circ$. Нека M и N се пресечните точки на правата AB со симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C, соодветно. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$!

Решение. Од условот $\alpha - \beta = 90^\circ$ следува дека триаголникот ABC е тапоаголен. За да покажеме дека $\overline{CM} = \overline{CN}$, доволно е да докажеме дека важи $\measuredangle CNM = \measuredangle NMC$.

Да означиме со $\gamma = \measuredangle ACB, \delta = \measuredangle AMC$. Од $\triangle MBC$ имаме $\delta = \beta + \frac{\gamma}{2}$ (бидејќи δ е надворешен агол за овој триаголник), а од $\triangle AMC$ имаме $\alpha + \delta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$. Ако на левата страна на последното равенство го додадеме и одземеме аголот β и го искористиме условот, ќе добиеме



$$\alpha - \beta + \delta + \beta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$$

$$90^\circ + \delta + \delta = 180^\circ$$

$$2\delta = 90^\circ$$

$$\delta = 45^\circ$$

Бидејќи $\measuredangle NCM = 90^\circ$, како агол меѓу симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C, кои се два напоредни агли, следува дека $\measuredangle CNM = 45^\circ$, т.е NMC е рамнокрак триаголник, па $\overline{CM} = \overline{CN}$.

5. Најди ги сите трицифрени броеви деливи со 7, кои имаат различни цифри и имаат збир на цифри делив со 7. Образложи го својот одговор!

Решение. Нека $x=\overline{abc}$ е таков трицифрен број каков што се бара во задачата. Тогаш за неговите цифри важи $a\neq b\neq c\neq a$. Имаме

$$x=100a+10b+c=7(14a+b)+(2a+3b+c),$$

од каде што следува дека $2a+3b+c$ е број делив со 7. Бидејќи од условот на задачата $a+b+c$ е број делив со 7, добиваме дека и разликата

$$(2a+3b+c)-2(a+b+c)=b-c$$

е број делив со 7. Да напоменеме дека ако $b-c$ е број делив со 7, тогаш и бројот $c-b$ е број делив со 7. Бидејќи цифрите се различни, добиваме дека единствени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се: 518, 581, 329 и 392.

VII одделение

1. Најди го најмалиот природен број, кој помножен со 127008 дава куб на природен број. Образложи го својот одговор!

Решение. Бидејќи $127008=2^5\cdot3^4\cdot7^2$, следува дека најмалиот природен број со кој треба да го помножиме овој број е бројот $2\cdot3^2\cdot7=126$.

2. Должините на страните на еден правоаголник се природни броеви. Одреди ги тие должини ако мерниот број на плоштината на овој правоаголник е еднаков со мерниот број на неговиот периметар. Образложи го својот одговор!

Решение. Нека a и b се должините на страните на правоаголникот. Тогаш заради условот на задачата, $ab=2(a+b)$, односно $ab-2a-2b=0$. Со додавање на 4 од двете страни на равенката, добиваме $ab-2a-2b+4=4$, од каде што $(a-2)(b-2)=4$. Тогаш можни се следните случаи:

1) $a-2=1, b-2=4$, односно $a=3, b=6$;

2) $a-2=2, b-2=2$, односно $a=4, b=4$,

што се и бараните димензии.

3. Дропката $\frac{179}{140}$ претстави ја како збир на три позитивни дропки со едноцифрени именители. Образложи го својот одговор!

Решение. Ако именителот на дадената дропка го разложиме на прости множители, се добива $140 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 7$. Оттука, овој број може да се запише како производ од три едноцифрени броеви единствено на следниов начин $140 = 4\cdot 5\cdot 7$. Според тоа, бараното претставување на дадената дропка е $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=\frac{179}{140}$. Ако равенката ја помножиме со 140 се добива $35x+28y+20z=179$.

Доволно е да се најдат сите решенија на оваа равенка. Пред се, да забележиме дека бројот $20z$ е парен број кој завршува на 0, за било која вредност на z. Потоа, бројот $28y$ е парен за било која вредност на y. Бидејќи десната страна на равенката е непарен број, бројот $35x$ треба да биде непарен, а тоа е можно само ако x е непарен број. Притоа, $35x$ завршува на 5 за било која вредност на x, па затоа треба $28y$ да завршува на 4. Тоа е можно, ако y е број што завршува на 3 или 8. Ако y е 8, тогаш $28y>179$. Затоа заклучуваме дека $y=3$. Имаме

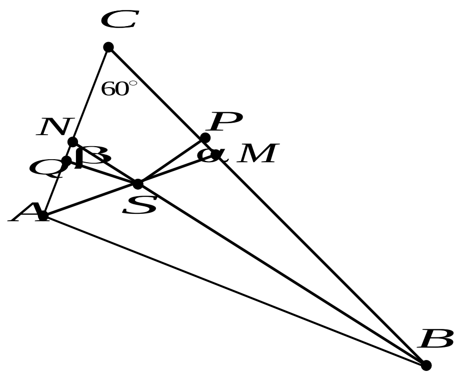
$$35x+20z=95.$$

Со непосредна проверка се добива дека $x=1, z=3$, односно

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{7}=\frac{179}{140}.$$

4. Во триаголникот ABC, $\measuredangle ACB=60^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка M, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точка N. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{SM}=\overline{SN}$.

Решение. Нека P и Q се подножја на нормалите спуштени од S кон BC и AC, соодветно. Нека означиме $\alpha=\measuredangle AMC$ и $\beta=\measuredangle BNA$. Заради $\measuredangle ACB=60^\circ$, за внатрешните агли на триаголникот ABC имаме



$$\measuredangle BAC+\measuredangle ABC=120^\circ.$$

Во $\triangle AMC$ важи

$$\alpha + 60^\circ + \frac{\measuredangle BAC}{2} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \frac{\measuredangle BAC}{2} = 120^\circ \qquad (1)$$

Во $\triangle BNC$ важи

$$(180^\circ - \beta) + 60^\circ + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 180^\circ \Rightarrow (180^\circ - \beta) + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 120^\circ \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), се добива

$$\alpha + \frac{\measuredangle BAC}{2} + (180^\circ - \beta) + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 240^\circ,$$

$$\alpha - \beta + \frac{\measuredangle BAC + \measuredangle ABC}{2} = 60^\circ,$$

$$\alpha - \beta = 0,$$

$$\alpha = \beta.$$

Според тоа, триаголниците MPS и NQS се складни според признакот АСА, бидејќи имаат исти агли и $\overline{SQ} = \overline{SP}$, како радиуси на впишаната кружница во триаголникот ABC. Следува дека $\overline{SM} = \overline{SN}$, што требаше да се докаже.

5. Ана има 16 исти квадари со должини на рабовите $2cm$, $2cm$ и $1cm$. Таа со нив на повеќе начини може да формира поголем квадар, при што мора да ги употреби сите 16 мали квадари и новиот квадар да нема никакви празнини. Кои се должините на рабовите на квадарот што го формирала Ана, ако тој треба да има најмала плоштина?

Решение. Волуменот на добиениот квадар секогаш е ист, без разлика како Ана ќе го формира и изнесува $V = 16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 64cm^3$. Должините на рабовите на вака добиениот квадар мора да се делители на 64, односно $1cm$, $2cm$, $4cm$, $8cm$, $16cm$, $32cm$ или $64cm$. Единствените можни квадари што можат да се добијат на овој начин имаат димензии: $32\times2\times1$, $16\times4\times1$, $16\times2\times2$, $8\times8\times1$, $8\times4\times2$ и $4\times4\times4$.

Нивните плоштини се:

$$P_1 = 2(64+32+2) = 196cm^2,$$

$$P_2 = 2(64+16+4) = 168cm^2,$$

$$P_3 = 2(32+32+4) = 136cm^2,$$

$$P_4 = 2(64+8+8) = 160cm^2,$$

$$P_5 = 2(32+16+8) = 112cm^2,$$

$$P_6 = 2(16+16+16) = 96cm^2.$$

Според тоа, квадарот кој го направила Ана има димензии $4\times4\times4$.

VIII одделение

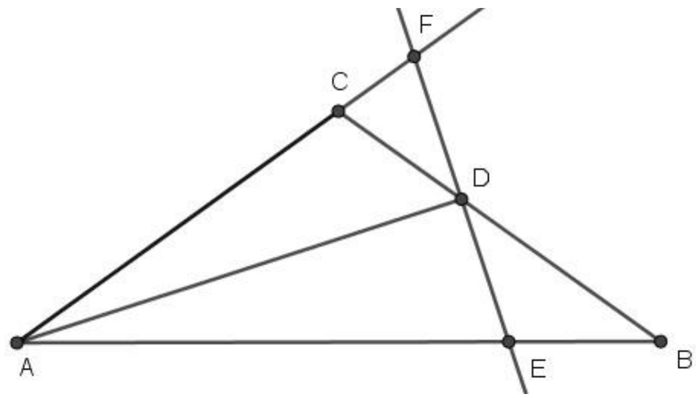
1. Докажи дека бројот $20192019+20192018\cdot 20192019\cdot 20192020$ е куб на цел број.

Решение. Нека означиме со $n=20192019$. Тогаш горниот израз може да го запишеме како $n+(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=n+n(n^2-1)=n+n^3-n=n^3$, од каде што следува тврдењето на задачата.

2. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со краци AC и BC и $\measuredangle ACB=108^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D. Низ D повлекуваме права нормална на AD која ја сече правата AB во точка E. Докажи дека $\overline{DE}=\overline{CD}$.

Решение. Нека F е пресечната точка на правата ED со правата AC. Од $\triangle ABC$ е рамнокрак и од $\measuredangle ACB=108^\circ$ имаме $\measuredangle BAC=36^\circ$. Од AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ имаме $\measuredangle DAC=18^\circ$. Триаголникот ADF е правоаголен па имаме $\measuredangle DFA=72^\circ$. Од $\measuredangle ACB=108^\circ$ имаме

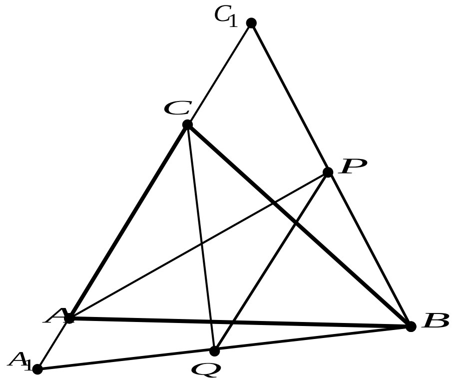
$$\measuredangle DCF=180^\circ-108^\circ=72^\circ.$$



Следува $\triangle DCF$ е рамнокрак триаголник и $\overline{DC}=\overline{FD}$. Од AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ следува $\overline{DE}=\overline{FD}=\overline{CD}$.

3. Во триаголникот ABC повлечени се симетралите на аглите во темињата A и C. Точките P и Q се проекциите на точката B на тие симетрали, соодветно. Докажи дека отсечката PQ е паралелна со страната AC.

Решение. Нека ги продолжиме отсечките BQ и BP до пресек со правата AC и нека тие точки ги означиме со A_1 и C_1, соодветно. Во триаголникот ABC_1 отсечката AP е висина и симетрала на аголот во темето A. Значи тој триаголник е рамнокрак, $\overline{AB}=\overline{AC_1}$. Тогаш отсечката AP е исто така и тежишна линија, па $BP=PC_1$. Сосема аналогно, CQ е тежишна линија во триаголникот CBA_1, па $\overline{BQ}=\overline{QA_1}$. Според тоа PQ е средна линија за триаголникот A_1BC_1. Значи, отсечката PQ е паралелна со страната AC.



4. Нека A е природен број со парен број на цифри, а B е број добиен со некоја промена на редоследот на цифрите на бројот A така што $A+B=10^n$. Докажи дека ако n е парен број, тогаш секој од броевите A и B со горното својство е делив со 10.

Решение. Нека $A=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ и $B=\overline{b_1b_2\ldots b_n}$. Од условот $A+B=10^n$ следува дека $a_n+b_n=0$ или $a_n+b_n=10$. Ако $a_n+b_n=10$, тогаш од $A+B=10^n$ следува дека $a_k+b_k=9$ за секој $i=\overline{1,n-1}$. Со собирање на овие равенства добиваме $\sum_{i=1}^{n}(a_k+b_k)=9(n-1)+10$. Левата страна на последното равенство е парен број бидејќи секоја цифра се јавува два пати, а десната е непарна (n е непарен број), што не е можно. Следува дека $a_n+b_n=0$, односно $a_n=b_n=0$, па $10|A$ и $10|B$.

5. Пресметај го максималниот производ на сите природни броеви чиј збир е 2019.

Решение. Нека со P го означиме максималниот производ. Очигледно е дека ниту еден од множителите во производот P не е 1. Бидејќи $2(k-2)>k$ и $2+k-2=k$ кога $k>4$, јасно е дека сите множителите во производот P се помали или еднакви на 4 (во спротивно, P не би бил максимален). Бидејќи $4=2+2$, производот не се менува кога четворките ги заменуваме со две двојки. Следува дека $P=2^x3^y$. Бидејќи $2^3<3^2$ и $2+2+2=3+3$, јасно е дека двојки не може да има повеќе од две. Од $2019=673\cdot 3$, следува дека $P=3^{673}$.

IX одделение

1. За колку природни броеви n се исполнети неравенствата
$$2019<\sqrt{n}<2020\,?$$
Образложи го својот одговор!
Решение. Со квадрирање на дадените неравенства ги добиваме еквивалентните неравенства $2019^2<n<2020^2$. Според тоа, вкупниот број на броеви за кои се точни последните неравенства, т.е. се точни дадените неравенствата е еднаков на
$$2020^2-2019^2-1=(2020-2019)(2020+2019)-1=4039-1=4038\,.$$

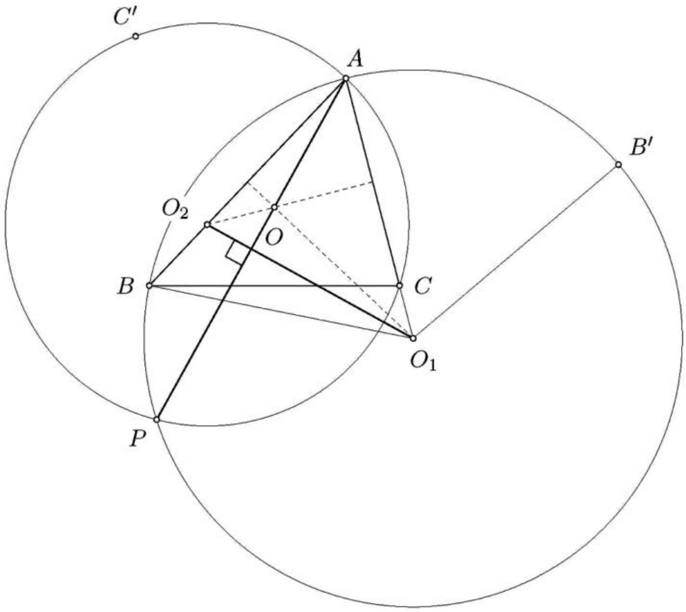
2. Најди ги сите прости броеви p такви што $17p+1$ е полн квадрат на природен број.
Решение. Нека $17p+1=n^2$. Од тоа што 17 и p се прости броеви имаме
$$17p=n^2-1=(n-1)(n+1)\,.$$
Можни се два случаи
1) $17=n-1,\quad p=n+1$, од каде следува дека $n=18$ односно $p=19$;
2) $p=n-1,\quad 17=n+1$, т.е. $n=16$ и $p=15$ што е контрадикција (15 не е прост број).
Следува, единствено решение е $p=19$.

3. Докажи дека за секој природен број n постои број од облик $11\ldots 10\ldots 0$ кој е делив со n.
Решение. Ги разгледуваме броевите $1, 11, 111, 1111,\ldots, 11\ldots 1$ каде i-тиот број содржи i единици, $i=\overline{1,n+1}$. При делење со бројот n, можни остатоци се броевите $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Имаме $n+1$ број, а n остатоци, па според Принципот на Дирихле постојат два кои имаат ист

остаток при делење со n. Нивната разлика е делива со n и има облик $11\ldots 10\ldots 0$.

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AC, а точката C' е осносиметрична слика на точката C во однос на правата AB. Опишаните кружници околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точките A и P. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата AP.

Решение. Нека O_1 е пресекот на правата AC и симетралата на страната AB. Заради осната симетрија важи $\overline{BO_1} = \overline{B'O_1}$, т.е. O_1 е



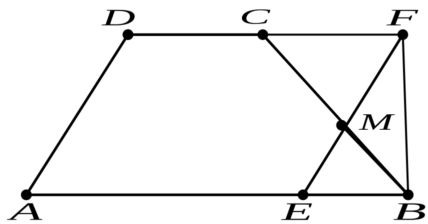
центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABB'. Аналогно ја дефинираме точката O_2 како пресек на правата AB и симетралата на страната AC, што значи дека таа е центар на опишаната кружница околу триаголникот ACC'.

Бидејќи AP е заедничка тетива на двете кружници, правата AP е нормална на правата O_1O_2. Симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O, т.е. OO_1 е нормална на AB и OO_2 е нормална на AC. Значи, O е ортоцентар на триаголникот AO_2O_1. Заклучуваме дека правата AO е нормална на правата O_1O_2. Значи, правите AP и AO се нормални на O_1O_2, од што следува дека тие се совпаѓаат, т.е. точките A, O и P се колинеарни.

5. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD, $AB > CD$. На страната BC е одбрана точка M, така што $BM < MC$. Докажи дека

$$P_{\triangle AMD} > P_{\triangle AMB} + P_{\triangle CMD}.$$

Решение. Низ точката M ќе повлечеме права паралелна со кракот AD и ќе ги означиме со E и F пресечните точки со AB и CD, соодветно. За трапезот $CFBE$, важи дека $P = P_{\triangle FMB} = P_{\triangle CME}$, бидејќи $P_{\triangle FMB} = P_{\triangle CBF} - P_{\triangle CMF}$, $P_{\triangle CME} = P_{\triangle CFE} - P_{\triangle CMF}$ и $P_{\triangle CBF} = P_{\triangle CFE}$.



Од $\overline{BM} < \overline{CM}$ следува дека

$$P = P_{\triangle BMF} < P_{\triangle CMF} \text{ и } P_{\triangle BME} < P_{\triangle CME} = P.$$

Следува $P_{\triangle BME} < P_{\triangle CMF}$. Од паралелограмот $AEFD$ имаме

$$P_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} P_{AEFD} \text{ или } P_{\triangle AMD} = P_{\triangle AEM} + P_{\triangle DFM}.$$

Но,

$$P_{\triangle AEM} = P_{\triangle ABM} - P_{\triangle BEM} \text{ и } P_{\triangle DFM} = P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF}.$$

Конечно,

$$\begin{aligned} P_{\triangle AMD} &= P_{\triangle ABM} - P_{\triangle BEM} + P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF} \\ &= P_{\triangle ABM} + P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF} - P_{\triangle BME} \\ &> P_{\triangle ABM} + P_{\triangle DCM}. \end{aligned}$$