Osječki matematički list **12**(2012), 29–44

Jedan dokaz iracionalnosti broja e^p

Nenad Stojanović* Zoran Mitrović†

Sažetak. *U prvom dijelu rada izloženi su osnovni pojmovi i tvrdnje koji su vezani uz algebarske i transcendentne brojeve s kratkim povijesnim osvrtom te je pokazano nekoliko osnovnih tvrdnji koji se odnose na iracionalnost i transcendentnost broja e. U drugom dijelu rada motivirani dokazom W. Ramasinghe, koji je dao jednostavan dokaz iracionalnosti broja* e^2*, dajemo dokaz iracionalnosti broja* e^p *za bilo koji prost broj* p*.*

Ključne riječi: *iracionalnost broja e, broj e, transcendentni brojevi*

One proof of e^p irrationality

Sažetak. *The first part presents the basic concepts and attitudes related to algebraic and transcendental numbers, with a brief historical review, and it was shown that several basic principles regarding the irrationality and transcendence of e. The second part motivated by evidence Ramasinghe W., who gave a simple proof of the irrationality of* e^2*, we give a proof of irrationality of* e^p *for any prime number* p*.*

Key words: *irrationality of numbers e, number e, transcendental numbers*

1. Uvod

Rješavanje problema vezanih uz transcendentnost broja dalo je značajan doprinos razvoju matematike. Dokaz o postojanju transcendentnih brojeva dao je francuski matematičar *Joseph Liouville* 1851. godine, dok je *David Hilbert* 1900. godine na II. međunarodnom kongresu matematičara izložio problem vezan uz iracionalnost i transcendentnost brojeva, poznat kao problem VII., a formulirao ga je na sljedeći način:

Pokazati da je α^β *transcendentan ili u krajnjoj mjeri iracionalan broj ako je* α *algebarski, a* β *iracionalan broj* ([2]).

*Visoka Škola poslovnog menadžmenta, Primus, Dositejeva bb, 78 400 Gradiška, Bosna i Hercegovina `nsnest1@gmail.com`

†Faculty of Electrical Engineering, University of Banja Luka, Patre 5, 78 000 Banja Luka, Bosna i Hercegovina `zmitrovic@etfbl.net`

Postavku tog problema uveo je 1748. godine *Leonhard Paul Euler* u svom djelu *Introductio in Analysin infinitorum (Uvod u analizu beskonačnih veličina)* i utvrdio da za racionalnu bazu a logaritam svakog racionalnog broja b nije racionalan broj stupnja a, odnosno nije algebarski broj. Djelimičan dokaz ovog problema dao je *Alexander Osipovich Gelfond* najprije 1929. godine dokazavši da, ako je α algebarski broj tada je i $\alpha^{\sqrt{p}}$, gdje $\alpha \neq \{0, 1\}$, a p pozitivan racionalan broj koji nije potpun kvadrat, transcendentan broj, a zatim 1934. godine je dopunio dokaz pokazujući transcendentnost svake takve klase brojeva. *Theodor Schneider* je 1934. dao novi dokaz rezultata koje je dobio Gelfond. Veliki uspjeh u teoriji transcendentnih brojeva dao je i *A. B. Shidlovski*, kada je VII. Hilbertov problem već bio riješen (vidi [3]).

2. Algebarski i transcendentni brojevi

Realne brojeve dijelimo na racionalne i iracionalne. Suprotno racionalnim brojevima čiji je skup zatvoren u odnosu na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja (isključujući dijeljenja s nulom) skup iracionalnih brojeva ne sadrži niti jedno od navedenih svojstava. Odnosno vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1. *([7])Neka je α proizvoljan iracionalan broj i r bilo koji racionalan broj različit od nule. Tada zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje primijenjeno na brojeve α i r daje iracionalan broj. Osim toga brojevi $-\alpha$ i α^{-1} su također iracionalni brojevi.*

Teorem pokazuje da se može konstruirati široka klasa iracionalnih brojeva iz jednog danog iracionalnog broja. Primjerice od iracionalnog broja $\sqrt{2}$ primjenom teorema možemo konstruirati brojeve $-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}+3, \ldots,\ 3-\sqrt{2}, -2\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{5},\ \frac{3}{\sqrt{2}}$ koji su također iracionalni. Dakle, možemo konstruirati beskonačno mnogo iracionalnih brojeva. Osim podjele realnih brojeva na racionalne i iracionalne postoji i podjela na algebarske i transcendentne brojeve. Ako realan broj zadovoljava jednadžbu oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

gdje su $a_i \in \mathbb{Z}$, $i \in 0, 1, 2, \ldots, n$, kažemo da je algebarski, a realan broj koji ne zadovoljava ni jednu jednadžbu takvog oblika nazivamo transcendentnim.

Lako se pokaže da je svaki racionalan broj algebarski. Primjerice, racionalan broj $\frac{3}{4}$ zadovoljava jednadžbu $4x - 3 = 0$. Generalno svaki racionalan broj $\frac{b}{a}$ zadovoljava jednadžbu oblika $ax - b = 0$ samim tim je algebarski broj. Kako je svaki racionalan broj ujedno i algebarski broj, tako svaki realan broj, koji nije algebarski, jeste iracionalan, odnosno: svaki transcendentan broj je iracionalan.

J. Liouvilleu pripada zasluga za dokaz (1844. godine) egzistencije transcendentnih brojeva, kao i za prvi decimalni prikaz takvog broja, tzv. *Liouvilleova konstanta* (1851. godine), dok *Euleru* pripada zasluga za definiranje transcendentnih brojeva u današnjem smislu, a sam naziv "transcendentan" dolazi od *Leibniza* koji je 1682. godine dokazao da $\sin x$ nije algebarska funkcija po varijabli x. Prvi broj za kojeg je dokazana transcendentnost je broj e (1873. godine), a zasluga pripada *Charlesu Hermiteu*, dok je *Georg Cantor* 1874. godine pokazao da je skup transcendentnih brojeva gust skup (vidi [7])

Značajno je spomenuti *Gelfond-Schneiderov* teorem (vidi [3]) kojim je dokazano da *ako su α i β algebarski brojevi različiti od nule i jedinice, tada je broj $\frac{ln\alpha}{ln\beta}$ ili racionalan ili transcendentan.*

Posljedica tog teorema je tvrdnja da ako je α algebarski broj ($\alpha \neq \{0,1\}$), a β iracionalan algebarski broj, tada je $\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha}$ transcendentan broj. Brojevi $\log 2$, π itd. su primjeri transcendentnih brojeva. Transcendentnost broja $2^{\sqrt{2}}$, kojeg nazivamo Gelfond-Schneiderova konstanta, (čija je vrijednost $2^{\sqrt{2}} = 2.6651441426902251\ldots$) i $\log 2$ je dokazana 1934. godine (vidi [7]).

Iz Gelfond-Schneiderovog teorema slijedi tvrdnja da su svi brojevi oblika $\log r$ gdje je r racionalan broj, ili transcendentni ili racionalni brojevi. U tom smislu je $\log r$ transcendentan za sve pozitivne racionalne brojeve r isključujući sljedeće brojeve; $\ldots,10^{-3},10^{-2},10^{-1},10^{0},10^{1},10^{2},10^{3},\ldots$ jer za te vrijednosti r je $\log r$ cijeli broj. Na primjer svi brojevi $\log r$ gdje je r cijeli broj između 1 i 1000, isključujući $r = 1$, $r = 10$, $r = 100$ su transcendentni.

Pokažimo na primjer da je $\log 2$ transcendentan broj. Najprije pokažimo da je $\log 2$ iracionalan broj. Pretpostavimo suprotno, da je $\log 2 = \frac{a}{b}$ gdje su a, b pozitivni cijeli brojevi. Brojeve a, b možemo uzeti pozitivnim, ako je $\log 2$ pozitivan broj. Prema definiciji logaritma imamo da je $2 = 10^{\frac{a}{b}}$. Potenciramo li obje strane s b, dobivamo $2^b = 10^a = 2^a \cdot 5^a$.

Posljednja jednakost veže dva cijela pozitivna broja, pa možemo primijeniti osnovni teorem aritmetike o jedinstvenosti rastava cijelog broja na umnožak prostih faktora. U skladu s tim teoremom, jednakost $2^b = 2^a \cdot 5^a$ nije moguća, jer 2^b predstavlja cijeli broj koji ni za jednu vrijednost b nije djeljiv s 5, a istovremeno je broj $2^a \cdot 5^a$ djeljiv s 5 za bilo koji pozitivan cijeli broj b. Slijedi, broj $\log 2$ nije racionalan nego iracionalan broj. Neka je $\beta = \log 2$,$\alpha = 10$. U smislu definicije dekadskog logaritma je $10^{\log 2} = \alpha^\beta = 2$. Ako bi broj β bio algebarski i iracionalan, tada bi prema Gelfond-Schneiderovom teoremu broj 2 bio transcendentan. Ukoliko nije tako, tada je $\beta = \log 2$ ili racionalan ili transcendentan. Pokazali smo da je broj $\log 2$ iracionalan, dakle, on je transcendentan.

Primjer transcendentnog broja je *Liouvilleova* konstanta čiji je decimalni zapis

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110001000000\ldots \tag{1}$$

Ovaj transcendentan broj ima svojstvo, da su sve znamenke u decimalnom zapisu isključujući one čiji se broj izražava faktorijelom cijelog broja jednake nuli. Pokažimo da je *Liouvilleov* broj trenscendentan.

Ideje dokaza zasniva se na tome da se broj $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ zamijeni racionalnim brojem β koji ga dobro predstavlja i pri tome razlika $(\alpha - \beta)$ između broja α i β je veoma mala u odnosu na broj β. Prodemonstrirajmo primjer racionalne ocjene broja α, tako da odaberemo konačan broj članova reda (1) iz definicije broja α. Neka je β suma prvih j članova reda (1) tada je

$$\beta = \sum_{i=1}^{j} 10^{-i!}. \tag{2}$$

Primijetimo da je broj β racionalan broj koji možemo prikazati kao sumu razlomaka

čiji su nazivnici potencije broja deset, $\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{j!}}$.
Nakon svođenja na jednake nazivnike ($10^{j!}$) i sređivanja, dobivamo razlomak oblika

$$\beta = \frac{t}{10^{j!}} \tag{3}$$

gdje je $t \in \mathbb{Z}$, a čija vrijednost se lako odredi. Primijetimo da se broj β malo razlikuje od broja α. Ta razlika iznosi

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + \dots . \tag{4}$$

Dekadski rastav od $\alpha - \beta$ isto je kao i od broja α, sastoji se od nula i jedinica. Znamenka 1 se najprije javlja na $(j+1)!$ mjestu, zatim na $(j+2)!$, itd. Očito je broj $\alpha - \beta$ manji od broja $0.0000\dots0002$, gdje su sve znamenke jednake nuli izuzev znamenke 2 koja se nalazi na $(j+1)!$ mjestu, što možemo zapisati u obliku nejednakosti

$$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$$

Na ovaj način smo pokazali lemu

Lema 1. *Neka je broj α definiran izrazom* (1). *Broj α se može aproksimirati proizvoljnim racionalnim brojem β sa po želji odabranom točnošću, tj. vrijedi*
$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$, *gdje je j broj prvih članova desne strane izraza* (1).

Za dalji dokaz transcendentnosti broja α trebaju nam još neke nejednakosti između α i β. Ako su α i β pozitivni brojevi definirani izrazima (1) i (2) tada uzimajući u obzir da je $\alpha < 1$, $\beta < 1$ vrijede nejednakosti

$$0 < \alpha^p < 1, \;\; 0 < \beta^s < 1, \;\; 0 < \alpha^p \beta^s < 1, \;\; \forall p, s \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Da bismo dokazali transcendentnost broja α polazimo od suprotne pretpostavke da je α algebarski broj i pokažimo neodrživost takve pretpostavke. Kada bi α bio algebarski broj tada bi on zadovoljavao neku algebarsku jednadžbu sa cijelim koeficijentima. Među svim algebarskim jednadžbama koje zadovoljava, odaberimo jednadžbu sa najmanjim stupnjem. Neka je to jednadžba

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{6}$$

Neka je polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{7}$$

odgovarajući polinom. Pretpostavimo da za polinom $f(x)$ vrijede uvjeti:

1. $f(x)$ ima cjelobrojne koeficijente,
2. broj α je korijen jednadžbe $f(x) = 0$, tj.$f(\alpha) = 0$,
3. broj α nije korijen ni jedne jednadžbe sa cjelobrojnim koeficijentima stupnja manjeg od n.

Dokažimo sljedeći teorem kojim se pokazuje da veličina $|f(\alpha) - f(\beta)|$ ima isti predznak kao i $|\alpha - \beta|$.

Teorem 2. *Neka su α i β definirani s (1) i (2), a $f(x)$ oblika (7). Tada je odnos između koeficijenata polinoma $f(x)$ i njegovog stupnja iskazan nejednakošću*

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta)$$

gdje je N suma koeficijenata navedenog polinoma.

Dokaz. Broj N definiramo jednakošću

$$N = n|a_n| + (n-1)|a_{n-1}| + (n-2)|a_{n-2} + \cdots + 2|a_2| + |a_1| \tag{8}$$

Primijetimo da broj N ne ovisi od broja j koji se pojavljuje u definiciji broja β u izrazu (2). U procesu dokazivanja koristimo formulu rastava $\alpha^k - \beta^k$ na faktore i nejednakost koju ta razlika zadovoljava. Kako je

$$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \alpha^{k-3}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{k-3} + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}) \tag{9}$$

gdje je $k \in \mathbb{N}$.

Iz ove jednakosti, u skladu s nejednakostima (5), svaki član desne strane rastava (9) je manji od 1. Slijedi, ukoliko tih članova ima k, i $\alpha - \beta > 0$, vrijedi nejednakost

$$\alpha^k - \beta^k < (\alpha - \beta)(1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1) = k(\alpha - \beta). \tag{10}$$

Obzirom na rastav (9) imamo da je

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= a_n(\alpha^n - \beta^n) + a_{n-1}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \dots \\ &\quad \cdots + a_2(\alpha^2 - \beta^2) + a_1(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)[a_n(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots \\ &\quad + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) + a_{n-1}(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2}) + \cdots + a_1]. \end{aligned}$$

Koristeći dalje apsolutnu vrijednost i nejednakost (10), nalazimo da je

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta|[n|a_n| + (n-1)|a_{n-1}| + \cdots + |a_1|].$$

Kako je $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ na osnovu definicije broja N dobivamo traženi odnos $|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta)$.

□

Razmotrimo ponovo razliku $f(\alpha) - f(\beta)$ ali na drugi način.

Teorem 3. *Za svaki pozitivan cijeli broj j*

$$|f(\alpha) - f(\beta)|10^{n \cdot j!} \tag{11}$$

je također pozitivan cijeli broj.

Dokaz. Kako je $f(\alpha) = 0$, promatrani broj možemo napisati u obliku $|-f(\beta)|10^{n \cdot j!}$ ili u obliku $|f(\beta)|10^{n \cdot j!}$. Sada, suglasno (3) vrijedi

$$\begin{aligned} f(\beta) &= a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{(n-1)} + a_{n-2}\beta^{(n-2)} + \cdots + a_1\beta + a_0 \\ &= \frac{a_n t^n}{10^{nj!}} + \frac{a_{n-1}t^{n-1}}{10^{(n-1)j!}} + \frac{a_{n-2}t^{n-2}}{10^{(n-2)j!}} + \cdots + \frac{a_1 t}{10^{j!}} + a_0. \end{aligned}$$

Odavde, množenjem jednakosti s $10^{nj!}$ dobivamo

$$f(\beta)10^{nj!} = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1}10^{j!} + a_{n-2}t^{n-2}10^{2j!} \cdots + a_1 t 10^{(n-1)j!} + a_0 10^{nj!}.$$

Desna strana ove jednakosti je cijeli broj različit od nule ako je β definiran izrazom (2), jer je tada $f(\beta) \neq 0$, ($f(\alpha) = 0$ po pretpostavci).
Dalje, prelaskom na apsolutnu vrijednost dobivamo, $|f(\beta)10^{nj!}| = |f(\beta)|10^{nj!}$, a obzirom na desnu stranu posljednje jednakosti to je pozitivan cijeli broj.

Na osnovu izloženog zaključujemo da je $|f(\alpha) - f(\beta)|10^{nj!}$ pozitivan cijeli broj. Time je teorem dokazan.

□

Sada pokažimo da protivno Teoremu 2 broj zadan s (11) se nalazi između 0 i 1. U tu svrhu odaberimo cijeli broj j, korišten pri definiranju broja β, tako da vrijedi

$$\frac{2N \cdot 10^{nj!}}{10^{(j+1)!}} < 1 \tag{12}$$

Da možemo odabrati takav broj j slijedi iz toga da je nejednakost (12) ekvivalentna nejednakosti $\frac{2N}{10^{(j+1)!-nj!}} < 1$. Odavde obzirom da se izraz stupnja u nazivniku posljednje nejednakosti može napisati u obliku $(j+1)! - nj! = (j+1-n)j!$, fiksni broj n možemo odabrati dovoljno velik, ako je izabrani j dovoljno velik.

Kako su n i N zadani izrazima (6) i (8), a j ne zavise od n i N, možemo odabrati dovoljno veliki j da vrijedi (12). Pokažimo sada da broj definiran sa (11) ima vrijednost između 0 i 1.

U smislu Teorema 2, nejednakosti
$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$, $\alpha - \beta \neq 0$ i (11) vrijedi

$$|f(\alpha) - f(\beta)|10^{nj!} < N(\alpha - \beta)10^{nj!} < \frac{2N \cdot 10^{nj!}}{10^{(j+1)!}} < 1$$

Već smo pokazali (Teorem 2) da je $|f(\alpha) - f(\beta)|10^{nj!}$ pozitivan cio broj, ako je broj α definiran sa (1) algebarski broj. Iz dobivene nejednakosti vidimo da je ta pretpostavka neodrživa, odnosno dobivena nejednakost je u suprotnosti s Teoremom 3. Dakle broj α definiran sa (1) ne zadovoljava ni jednu algebarsku jednadžbu (6), odnosno α je transcendentan broj.

3. Iracionalnost i transcendentnost broja e

Poznato je da je broj e definiran kao granična vrijednost niza čiji je opći član $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ odnosno, $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Dokažimo da je broj e iracionalan broj. U dokazu iracionalnosti broja koristimo Taylorovu i MacLaurinovu formulu, koje imaju značajnu ulogu u postupku aproksimiranja funkcije f polinomom (vidi [4]).

1. Ako funkcija f ima neprekidne sve derivacije do n-tog reda na segmentu [a,b] i postoji $f^{(n+1)}$ na intervalu $< a, b >$, tada za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi Taylorova

formula

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots +$$
$$\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a), 0 < \theta(x) < 1 \qquad (13)$$

2. Specijalno za $a = 0$ i $x \in [a, b]$ imamo MacLaurinovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (14)$$

gdje je $\xi = \theta x$ i $0 < \xi = \xi(x) < 1$. Polinom

$$P_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

se naziva MacLaurinov polinom stupnja n za funkciju f s pogreškom

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \ \ \xi = \theta x, \ \ 0 < \xi = \xi(x) < 1.$$

Koristeći ove rezultate dokažimo iracionalnost broja e.

Teorem 4. *Broj e je iracionalan broj.*

Dokaz. Kako je $(e^x)' = (e^x)'' = \ldots = (e^x)^{(n)} = e^x$, $x \in \mathbb{N}$,$x \in \mathbb{R}$, slijedi da je za $f(x) = e^x$,$f(0) = f'(0) = \cdots = f(0)^{(n)} = e^0 = 1$. MacLaurinov polinom stupnja n funkcije $f(x) = e^x$ dan je formulom

$$f(0) + f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f(0)^{(n)} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

gdje je ostatak dan izrazom $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{(\xi)}$, i $\xi = \theta x$, $0 < \xi < 1$.
Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkciju $f(x) = e^x$ možemo pisati u obliku

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

gdje je $0 < \theta < 1$. Stavimo li u posljednju jednakost da je $x = 1$, dobivamo

$$e^x = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1)}{(n+1)!} e^{\theta}, 0 < \theta < 1. \qquad (15)$$

Najprije pokažimo da vrijedi nejednakost $0 < e < 3$. Krenimo od toga da pokažemo da je $a_n < 3$ tj. da je $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. Koristeći binomnu formulu imamo da je

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\
&= 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\\
&< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da je niz zadan općim članom $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ omeđen niz. Obzirom da je $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n!}>0,\forall n\in\mathbb{N}$, a svaki omeđen i rastući niz je konvergentan, slijedi da (a_n) konvergira. Dakle vrijedi nejednakost $0<e<3$. Ostaje pokazati iracionalnost broja e. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj e racionalan broj tj. $e=\frac{p}{q}$. Nakon produkta jednakosti (15) sa $n!$ dobivamo,

$$en!=m+\frac{e^{\theta}}{n+1},m\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

Kako je $e<3$ za $n\geq 3$ vrijedi $\frac{e^{\theta}}{n+1}<1$ pa desna strana jednakosti (16) nije cijeli broj tj.$m+\frac{e^{\theta}}{n+1}\notin\mathbb{Z}$. S druge strane, ako za n vrijedi $n\geq q$ tada je $n!$ djeljivo s q, pa je lijeva strana jednakosti (16) prirodan broj. Dakle, za prirodan broj n,$n\geq 3$ i $n\geq q$ imamo da je lijeva strana cijeli broj, a desna nije, što je kontradikcija, pa pretpostavka da je e racionalan broj je neodrživa odnosno, broj e je iracionalan broj. Dokažimo da je broj e transcendentan.

Prije toga dokažimo lemu

Lema 2. *Ako je h polinom sa cjelobrojnim koeficijentima tada za polinom $f(x)=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}h(x)$,$m\in\mathbb{N}$,$m\geq 2$ vrijedi*

1. $f^{(i)}(0)=0,i<m-1,$
2. $f^{(m-1)}(0)=h(0),$
3. $f^{(i)}(r)$ *je djeljiv sa* $m,i\geq m,r\in\mathbb{Z}$.

Dokaz. Za dokaz tvrdnje 1. koristimo teorem o nul-točkama polinoma, koju navodimo bez dokaza (vidi [4]), *x_0 je nultočka reda k, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ polinoma $f_n(x)$ stupnja $n>0$ ako i samo ako su ispunjeni uvjeti $f_n(x_0)=f_n'(x_0)=\ldots=f_n(x_0)^{(k-1)}=0,f_n(x_0)^{(k)}\neq 0$).* Sljedeća posljedica ovog teorema je za nas značajna: *Ako je x_0 nul-točka reda k polinoma $f_n(x)$, tada je x_0 nul-točka reda $(k-1)$ polinoma $f_n'(x)$.*

Imajući u vidu ovaj teorem i njegovu posljedicu dokaz tvrdnje 1. slijedi iz činjenice da je $x=0$ nul-točka polinoma $f(x)$ višestrukosti $m-1$, pa je na osnovi posljedice navedenog teorema $x=0$ nul-točka i polinoma $f^{(i)}(0)=0,i<m-1$.

2. Neka je $h(x)$ polinom čiji su koeficijenti cijeli brojevi

$$h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad h(0) = a_0,$$

tada polinom $f(x)$ ima oblik

$$f(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n).$$

Ako ovaj polinom uzastopno deriviramo, dobivamo

$$f^{(m-1)}(x) = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\left[a_0(m-1)! + a_1\frac{m!}{1!}x + a_2\frac{(m+1)!}{2!}x^2 + \cdots + a_n\frac{(m+n-1)!}{n!}x^n\right]$$

Uvrstimo li u posljednju jednakost $x = 0$ imamo da je $f^{(m-1)}(0) = a_0 = h(0)$, što je i trebalo pokazati.

Da pokažemo tvrdnju 3. uočimo da je

$$\left(\frac{a_kx^k}{(m-1)!}\right)^i = \begin{cases} a_k\binom{k}{i}\frac{i!}{(m-1)!}x^{k-1}, & i \le k \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je $i \ge m$ tada $(i!)$ sadrži faktor m i sve faktore od $(m-1)!$. Kako su $\binom{k}{i}$,$a_k \in \mathbb{Z}$ koeficijenti polinoma $f^{(i)}$ cijeli brojevi djeljivi sa m, to $f^{(i)}(r) \in \mathbb{Z}$ i $m|f^{(i)}(r)$ za svaki cijeli broj r.

□

Dokaz o transcendentnosti broja e dao je *Hermit* 1873. godine (vidi [3]). To je bio prvi konkretan dokaz transcendentnosti nekog konkretnog broja, a koji nije direktna posljedica Liuvilovog teorema. Hermitov dokaz zasnivao se na poznatim identitetima eksponencijalne funkcije s kojom je uspio uspostaviti vezu između aritmetičke prirode vrijednosti eksponencijlane funkcije, njenog analitičkog svojstva i aritmetičkog svojstva koeficijenata njenog Taylorovog reda. Sljedeći teorem daje primjer takvog dokaza.

Teorem 5. *Broj e je transcendentan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je broj e algebarski broj. Tada prema definiciji algebarskog broja postoji prirodan broj n i cijeli brojevi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da je

$$a_0 + a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_ne^n = 0. \tag{17}$$

Uočimo funkciju $g(x) = e^{-x}$. Derivacije funkcije $g(x)$ su redom

$$(e^{-x})' = -e^{-x}, (e^{-x})'' = e^{-x}, \ldots, (e^{-x})^{(n)} = (-1)^ne^{-x}.$$

U dokazu koristimo sljedeće rezultate analize. Ako su f, g derivabilne funkcije na segmentu $[a, b]$, tada vrijedi formula parcijalne integracije

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Ako su funkcije f, g derivabilne reda $(n+1)$ na $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx = [f(x)g^{(n)}(x)]|_a^b - [f'(x)g^{(n-1)}(x)]|_a^b + \ldots + (-1)^n[f^{(n)}(x)g(x)]|_a^b - (-1)^n \int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)dx.$$

Očito za polinom stupnja n je $f^{(n+1)}(x) = 0$ pa posljednji integral ima vrijednost nula. Promatramo li funkcije na segmentu $[0,1]$ i pri tome je stupanj polinoma, $\deg f = n$, tada posljednja jednakost prelazi u oblik:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g^{(n+1)}(x)dx &= f(1)g^{(n)}(1) - f'(1)g^{(n-1)}(1) \\ &+ f''(1)g^{(n-2)}(1) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(1)g(1) \\ &- \big[f(0)g^{(n)}(0) - f'(0)g^{(n-1)}(0) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(0)g(0)\big].\end{aligned} \tag{18}$$

Ako se u (18), varijabla x zamijeni s αx i $g(x) = e^{-x}$ dobivamo

$$\begin{aligned}(-1)^n + 1 \cdot \alpha \int_0^1 f(\alpha x)e^{-x}dx &= (-1)^n[e^{-\alpha}(f(\alpha) \\ &+ f'(\alpha) + \cdots + f(\alpha)^n - (f(0) + f'(0) + \cdots + f^n(0))],\end{aligned} \tag{19}$$

gdje je n stupanj polinoma f. Stavimo li da je $F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^n(x)$, tada se desna strana (19) može napisati u obliku

$$(-1)^{n+1} \cdot \alpha \int_0^1 f(\alpha x)e^{-\alpha x}dx = (-1)^n[e^{-\alpha} \cdot (F(\alpha) - F(0)]$$

Množenjem posljednje jednakost s $(-1)^{n+1}e^{\alpha}$ nakon sređivanja dobivamo

$$\alpha \cdot e^{\alpha} \cdot \int_0^1 f(\alpha x)e^{-\alpha x}dx = e^{\alpha}F(0) - F(\alpha)$$

odavde je

$$e^{\alpha}F(0) = F(\alpha) + \alpha e^{\alpha} \int_0^1 f(\alpha x)e^{-\alpha}xdx. \tag{20}$$

S druge strane jednakost (17) nakon množenja s $F(0)$, prelazi u oblik

$$F(0)(a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n) = 0$$

odnosno,

$$\sum_{k=0}^n a_k e^k F(0) = a_0 F(0) + \sum_{k=1}^n a_k e^k F(0),$$

Iskoristimo li (20) posljednja jednakost se može napisati u obliku

$$a_0 + F(0) + \sum_{k=1}^n a_k(F(k) + ke^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx) = 0,$$

odakle je

$$a_0 + F(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k(F(k) = -\sum_{k=1}^{n} ka_k e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx. \tag{21}$$

Da bismo dokazali da je broj e transcendentan potrebno je pokazati da je jednakost (21) nemoguća. Odnosno, da na lijevoj strani jednakosti imamo cijeli broj, a na desnoj racionalan. Dakle, ideja dokaza o transcendentnosti broja e zasniva se na tome da se odabere pogodan polinom f kojim bi postigli da desna strana jednakosti (21) bude po apsolutnoj vrijednosti broj manji od 1, a lijeva strana da je cijeli broj različit od nule i po apsolutnoj vrijednosti veći ili jednak jedinici, čime bi se dobila kontradikcija koja bi potvrdila da naša pretpostavka da je e algebarski broj nije točna. Koristeći rezultate Leme 2 odredimo polinom f. Neka je za proizvoljan prim broj p polinom $h(x)$ stupnja np oblika $h(x) = (x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p$, tada polinom f oblika

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot h(x) \tag{22}$$

zadovoljava uvjete Leme 2 (stav 1), odnosno vrijedi

$$f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, p-2 \tag{23}$$

$$f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, p-2 \tag{24}$$

$$p|f^(i)(r), i \geq p, r \in \mathbb{Z} \tag{25}$$

Primijetimo da je stupanj polinoma $f(x)$,$N = np + p - 1$. Na osnovi ranije uvedene oznake za funkciju $F(x)$ i uvjeta (23) je

$$F(0) = f(0)^{(p-1)} + f(0)^{(p)} + \cdots + f(0)^{(pn+p-1)}.$$

Produkt ove jednakosti s a_0 i jednakost (24) daje

$$a_0F(0) = a_0[(-1)^n n!]^p + a_0 \cdot f(0)^{(p)} + \cdots + a_0 f^{(np+p-1)}(0) \tag{26}$$

Na desnoj strani jednakosti (26) obzirom da je $a_0 \in \mathbb{Z}$ i kako vrijedi (25), članovi $a_0 f^{(p)}(0)$,$a_0 f^{(p+1)}(0)$,$\dots, a_0 \cdot f^{(np+p-1)}(0)$ sume su cijeli brojevi djeljivi s p. Odaberimo takav prost broj p da je $p > a_0$,$p > n$. Tada broj $a_0[(-1)^n n!]^p$ nije djeljiv s prostim brojem p, pa zbog toga cijela desna strana (26) nije djeljiva s p, odnosno broj $a_0F(0)$ je cijeli broj koji nije djeljiv s p. Imajući u vidu oblik funkcije $f(x)$ i činjenicu da su $k = 0, 1, 2, \dots, n$ njene nul-točke reda p vrijedi $f^{(i)}(k) = 0$, $i \leq p-1, \quad k = 1, 2, \dots, n$,pa je

$$F(k) = f^{(p)}(k) + f^{(p+1)}(k) + \cdots + f^{(pn+p-1)}(k)$$

Uzimajući u obzirom relaciju (25) zaključujemo da $p|F(k) \in \mathbb{Z}$. Kako je, $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$ i $p|F(k)$, imamo da je $\sum_{k=1}^{n} a_k F(k)$ na lijevoj strani jednakosti (21) djeljiva s p. Na osnovu toga i (26) lijevu stranu jednakosti (21) čine dva cijela broja od kojih je jedan djeljiv s p, a drugi nije, pa lijeva strana (21) je cijeli broj koji nije djeljiv s p. Apsolutna vrijednost tog broja je zbog toga, barem 1. Za desnu stranu jednakosti (21) možemo dakle pisati da je

$$\left| -\sum_{k=1}^{n} k a_k e^k \cdot \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx \right| \geq 1. \tag{27}$$

Da završimo dokaz potrebno je procijeniti funkciju $f(kx)$ kako bi ocijenili izraz pod znakom apsolutne vrijednosti.

Uočimo da za $x \in [0,1]$ i nenegativne cijele brojeve $r, k \leq n$ vrijedi $|kx - r| \leq n$. Primjenimo li to na funkciju $f(kx)$ definiranu sa (22) dobivamo

$$f(kx) = \frac{1}{(p-1)!} |kx|^{p-1} |kx-1|^p |kx-2|^p \dots |kx-n|^p \leq \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!} < \frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!}$$

Kako je $0 < e^{-kx} \leq 1$ vrijedi

$$\left| -\sum_{k=1}^{n} k|a_k|e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx} dx| \leq \sum_{k=1}^{n} |k a_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k|a_k|e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx} dx < \sum_{k=1}^{n} k|a_k|e^k \int_0^1 \frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} k|a_k|e^k$$

$$= \frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} n^{n+1} \sum_{k=1}^{n} k|a_k|e^k.$$

Iskoristimo li poznatu graničnu vrijednost $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, lako se pokaže da je $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} = 0$, pa postoji prost broj p za koji vrijedi nejednakost

$$\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{n^{n+1} \sum_{k=1}^{n} k|a_k|e^k}. \tag{28}$$

Na taj način iz provedenog niza nejednakosti nalazimo da vrijedi

$$| -\sum_{k=1}^{n} k a_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx| < 1. \tag{29}$$

Iz dokazane nejednakosti zaključujemo da je pretpostavka u nejednakosti (27) pogrešna, odnosno da desna strana jednakosti (21)) nije cijeli broj, koji je po apsolutnoj vrijednosti barem jednak jedinici. S druge strane, pokazali smo da lijevu stranu jednakosti (21) čini cijeli broj. Iz provedenog dokaza zaključujemo da je jednakost (21) neodrživa, uz pretpostavku da je broj e algebarski broj. Odnosno, pretpostavka da je broj e algebarski je pogrešna, dakle on je transcendentan broj.

$\square$

4. Iracionalnost broja e^p

W. Ramasinghe (vidi [8]) je na vrlo jednostavan način dokazao iracionalnost broja e^2. Rukovodeći se tom idejom dajemo dokaz iracionalnosti broja e^p za bilo koji prost broj p. Prije nego to dokažemo dokažimo dvije leme na koje se taj dokaz oslanja.

Podsjetimo se da, svaki prirodan broj različit od 1 koji je djeljiv jedino s 1 i sa samim sobom zovemo prost ili prim broj, a prirodan broj koji nije prost nazivamo složenim prirodnim brojem.

Lema 3. *Neka je p bilo koji prost broj. Tada za svaki prirodan broj n, vrijedi tvrdnja $p^{p^{n-1}}$ dijeli $(p^n)!$, odnosno kraće zapisano $p^{p^{n-1}}|(p^n)!, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Dokaz leme provodimo matematičkom indukcijom. Neka je p bilo koji prost broj. Za $n = 1$ imamo da je $p^{p^{1-1}} = p^{p^0} = p$, dok je $p! = p(p-1)(p-2)(p-3)\dots 21$. Dakle, tvrdnja je točna za $n = 1$, jer vrijedi $p|p!$.

Pretpostavimo da je tvrdnja točna za prirodan broj n, tj. da vrijedi $p^{p^{n-1}}|(p^n)!$. Dokažimo da vrijedi i za $n+1$, tj. da je točna tvrdnja $p^{p^n}|(p^n)!$. Kako je

$$\begin{aligned}(p^{n+1})! = (p^n)!(p^{n+1}(p^n+1)\dots(p^n+p)\\ \dots(p^n+p^2)\dots(p^n+p^{n-1})\dots(2p^n)\\ \dots(2p^n+p)\dots(2p^n+p^2)\dots(2p^n+p^{n-1})\dots(3p^n)\\ \dots((p-1)p^n+p)\dots((p-1)p^n+p^2)\dots((p-1)p^n+p^{n-1})\dots(p^{n+1})\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}2p^n &= (p^n+(p-1)p^{n-1}+(p-1)p^{n-2}+\dots+(p-1)p+p)\\ 3p^n &= (2p^n+(p-1)p^{n-1}+(p-1)p^{n-2}+\dots+(p-1)p+p)\\ &\vdots\\ p^{n+1} &= ((p-1)p^n+(p-1)p^{n-1}+(p-1)p^{n-2}+\dots+(p-1)p+p).\end{aligned}$$

Pogodnim grupiranje članova raspisane forme $(p^{n+1})!$ i to članova oblika

$$p^n+p = p(p^{n-1}+1), 2p^n+p = p(2p^{n-1}+1), 3p^n+p = p(3p^{n-1}+1)$$

$$\dots(p-1)p^n+p = p((p-1)p^{n-1}+1), p^n+p^2 = p^2(p^{n-2}+1), 2p^n+p^2 = p^2(2p^{n-2}+1),$$

$$\dots(p-1)p^n+p^2 = p^2((p-1)p^{n-2}+1), p^n+p^3 = p^3(p^{n-3}+1), 2p^n+p^3 = p^3(2p^{n-3}+1),$$

$$\dots(p-1)p^n+p^3 = p^3((p-1)p^{n-3}+1), p^n+p^{n-1} = p^{n-1}(p+1), 2p^n+p^{n-1} = p^{n-1}(2p+1),$$

$$\dots(p-1)p^n+p^{n-1} = p^{n-1}((p-1)p+1)$$

nakon sređivanja nalazimo da se produkt na desnoj strani posljednje jednakosti može napisati u obliku

$$\begin{aligned}(p^{n+1})! = (p^n)!(p^n+1(p^n+1)\dots(p^n+p)\dots(p^n+p^2)\dots(p^n+p^{n-1})\dots(2p^n)\\ \dots(2p^n+p)\dots(2p^n+p^2)\dots(2p^n+p^{n-1})\dots(3p^n)\\ ((p-1)p^n+p)\dots((p-1)p^n+p^2)\dots((p-1)p^n+p^{n-1})\dots(p^{n+1})\\ =(p^n)!\dots p(p^{n-1}+1)\dots p(2p^{n-1}+1)\dots p((p-1)p^{n-1}+1)\\ \dots p^2(p^{n-2}+1)\dots p^2(2p^{n-2}+1)\dots p^2((p-1)p^{n-2}+1)\\ \dots p^{n-1}(p+1)p^{n-1}(2p+1)\dots p^{n-1}((p-1)p+1)\dots 2p^n\dots(p-1)p^np^{n+1}\end{aligned}$$

Nakon sređivanja uzimajući u obzir da je $p^{p^{n-1}}|(p^n)!$ po pretpostavci, odnosno, da postoji cijeli broj q takav da je $(p^n)! = p^{p^{n-1}}q$, desna strana posljednje jednakosti se može napisati u obliku

$$(p^{n+1})! = (p^{p^{n-1}}q)(p^{(p-1)p^{n-1}}r = p^{p^{n-1}+(p-1)p^{n-1}}s = p^{p^n}s,$$

gdje su q, r, s pozitivni cijeli brojevi i $s = qr$. Iz posljednje jednakosti slijedi da $p^{p^n}|(p^{n+1})!$, odnosno tvrdnja je točna za svaki prirodan broj n.

□

Druga lema koja nam je potrebna glasi

Lema 4. *Ako je p prost broj, tada za svaki prirodan broj n i za svaki $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$, $p^{p^{n-1}}$ dijeli $\frac{p^k(p^n)}{k!}$. Kraće zapisano, $p^{p^{n-1}}|\frac{p^k(p^n)!}{k!}$,$\forall n \in \mathbb{N}$,i $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$.*

Dokaz. Oslanjajući se na rezultate Leme(3) matematičkom indukcijom pokažimo da vrijedi tvrdnja. Za $n = 1$ i $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$, očito vrijedi

$$p^{p^{1-1}}|\frac{p^k(p^1)!}{k!} \Leftrightarrow p|\frac{p^kp!}{k!} \Leftrightarrow p|\frac{p^kp(p-1)(p-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{k!},$$

što je točno. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za bilo koji prirodan broj n tj. da $p^{p^{n-1}}|\frac{p^k(p^n)!}{k!}$ i pokažimo da tada vrijedi tvrdnja i za prirodan broj $n+1$ tj. $p^{p^n}|\frac{p^k(p^{n+1}!}{k!}$ odnosno, postoji pozitivan cijeli broj q_n tako da vrijedi jednakost $p^k(p^{n+1})! = p^{p^n}k!q_n$. Primijetimo da ako vrijedi pretpostavka, tada postoji pozitivan cijeli broj s_n takav da je $p^k(p^n)! = k!p^{p^{n-1}} \cdot s_n$ za $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$ za bilo koji prost broj p. Provjerimo sada tvrdnju za $n+1$. Vrijedi niz jednakosti

$$\begin{aligned}p^k(p^{n+1})! = p^k(p^n)!(p^n+1)(p^n+2)\cdots(p^n+p)\dots(p^n+p^2)\cdots(p^n+p^{n-1})\cdots(2p^n)\\ \cdots(2p^n+p)\dots(2p^n+p^2)\cdots(2p^n+p^{n-1})\dots(3p^n)\\ \cdots((p-1)p^n+p)\cdots((p-1)p^n+p^2)\cdots((p-1)p^n+p^{n-1})\dots(p^{n+1})\\ = k!p^{p^{n-1}}s_np^{p^{n-1}(p-1)}r_n = k!p^{p^n}q_n,\end{aligned}$$

s_n, r_n, q_n su pozitivni cijeli brojevi, $q_n = s_nr_n$. Iz posljednje jednakosti zaključujemo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Dakle Lema(4) vrijedi za svaki prirodan broj n i $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$.

□

Sada možemo formulirati i dokazati teorem.

Teorem 6. *Broj e^p je iracionalan broj za svaki prost broj p.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $e^p = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$. Odaberimo prirodan broj n tako da vrijedi $\frac{bp^2}{p^n - p + 1} < \frac{1}{2}$. Primjenom Taylorove formule za funkciju e^p dobivamo jednakost

$$\frac{a}{b} = 1 + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots \frac{p^{p^n}}{(p^n)!} + \frac{p^{p^n+1}}{(p^n+1)!} + \frac{p^{p^n+2}}{(p^n+2)!} + \dots$$

Množenjem jednakosti sa $(bp^n)!$ dobivamo da je

$$(p^n)!a = b[(p^n)! + p(p^n)! + \frac{p^2(p^n)!}{2!} + \frac{p^3(p^n)!}{3!} + \dots + p^{p^n}]$$

$$bp^{p^n+1}[\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \cdot]$$

Na osnovi Leme 3 postoji prirodan broj c, takav da je $(p^n)! = p^{p^n-1} \cdot c$. Slično, koristeći Lemu 4 dobivamo da postoji prirodan broj d takav da je

$$[(p^n)! + p(p^n)! + \frac{p^2(p^n)!}{2!} + \frac{p^3(p^n)!}{3!} + \dots + p^{p^n}] = p^{p^n-1}d.$$

Na osnovu toga imamo jednakost

$$p^{p^{n-1}}ac - p^{p^{n-1}}bd = bpp^{n+1}[\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots]$$

Odnosno

$$ac - bd = bp^2[\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots]$$

Kako je

$$\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)^2} + \frac{p^2}{(p^n+1)^3} + \dots + = \frac{1}{p^n - p + 1}$$

nalazimo da je $0 < ac - bd < \frac{bp^2}{p^n - p + 1} < \frac{1}{2}$. To je kontradikcija s pretpostavkom da su a, b, c, d prirodni brojevi. Primijetimo, kao što čini i W. Ramasinghe, da se kao posljedica teorema dobiva iracionalnost broja e, jer ako bi e bio racionalan onda bi takvi bili primjerice i $e^2, e^3, e^5, e^7, \dots$ to nije moguće.

Literatura

[1] K. CONRAD, *Irrationality of π and e*, Math 121, 2005.

[2] S.S. DEMIDOV, *Problemi Hilberta*, Znanje, Moskva, 1969.

[3] N.I. FELDMAN SHIDLOVSKI, *Razvoj i trenutno stanje teorije transcendentnih brojeva*, Uspjeh Matematičke znanosti, XXII, N.3(135), 1967.

[4] O. HADŽIĆ, Đ. TAKAČI, *Matematičke metode*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2000.

[5] A. IVIĆ, *Uvod u analitičku teoriju brojeva*, Novi Sad, 1996.

[6] Đ. KUREPA, *Viša Algebra*, Knjiga 1, Školska knjiga Zagreb, 1965.

[7] A. NIVEN, *Racionalni i iracionalni brojevi*, Mir, Moskva, 1966.

[8] W. RAMASINGHE, *A simple proff e^2 is irrational*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **36**(2005), No. 4, 407–410.