Драгољуб Милошевиќ
Прањани

ЕДНО СВОЈСТВО НА СИМЕТРАЛАТА НА ВНАТРЕШНИОТ АГОЛ ВО ТРИАГОЛНИКОТ И НЕГОВАТА ПРИМЕНА

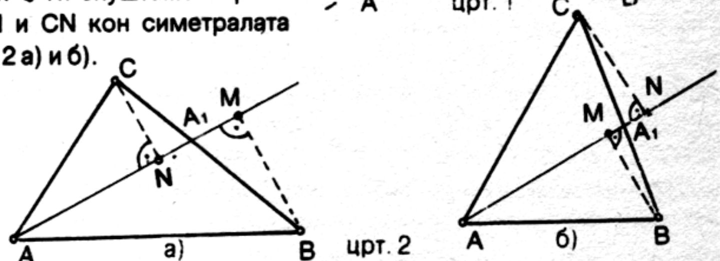
Познато ви е дека симетрала на агол е права што минува низ темето на аголот и што аголот го дели на два складни агли. Тука имаме за цел да докажеме едно својство на симетралата на внатрешниот агол во триаголникот, а потоа да покажеме на две примени на тоа својство.

Теорема: Секоја симетрала на аголот во зададен триаголник спротивната страна од темето ја дели во однос еднаков на односот од другите две соодветни страни на тој триаголник.

Доказ: Ако $\overline{AB} = \overline{AC}$ и AA_1 е симетрала на аголот α, тогаш теоремата е евидентна поради својствата на рамнокракиот триаголник, црт. 1.

црт. 1

Нека $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Од темињата B и C ги спуштаме нормалите BM и CN кон симетралата AA_1 црт. 2 а) и б).



црт. 2

Правоаголните триаголници ABM и ACN се слични (Зошто!), според кое е: $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BM} : \overline{CN}$ . . . . (1)

Исто така триаголниците BMA_1 и CNA_1 се слични (Зошто!), од каде што следува: $\overline{BM} : \overline{CN} = \overline{BA_1} : \overline{CA_1}$ . . . . (2)

Поради транзитивноста на релацијата „ = “, од (1) и (2) се добива:

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BA_1} : \overline{CA_1}$, односно:

$\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = \overline{AB} : \overline{AC}$

што требаше и да се докаже.

Пример 1. Во триаголникот ABC симетралата на $\sphericalangle BAC$, спротивната страна од A ја дели на две отсечки со должина 6 *cm* и 9 *cm*. Определи ги страните на тој триаголник, ако неговиот периметар изнесува 45 *cm*.

Решение: $\overline{AC} : \overline{AB} = 6 : 9$ (црт. 3.)

$\overline{AC} : \overline{AB} = 2 : 3$

$\overline{AB} = 1{,}5 \cdot \overline{AC}$ .... (3)

Бидејќи е $\overline{BC} = 6 + 9 = 15\ cm$, тогаш

$\overline{AB} + \overline{AC} = 30\ cm$. $(45 - 15 = 30)$

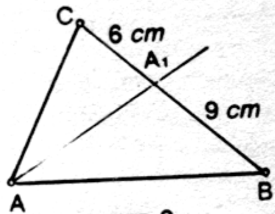
$1{,}5\overline{AC} + \overline{AC} = 30$

$2{,}5\overline{AC} = 30$

$\overline{AC} = 12\ cm.$

Оттука $\overline{AB} = 1{,}5\overline{AC}$

$\overline{AB} = 18\ cm.$



црт. 3

Одговор: Страните на триаголникот ABC се: $\overline{AB} = 18\ cm$, $\overline{BC} = 15\ cm$ и $\overline{AC} = 12\ cm$.

Пример 2. Определи го односот (размерот) на страните од правоаголниот триаголник ако половината од хипотенузата на тој триаголник од центарот на впишаната кружница во него, се гледа под агол од 90^0.

Решение: Нека AK е симетрала на аголот α, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = a$, (црт. 4.).

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \sphericalangle BOM + 90^0 = 180^0$$

$\sphericalangle BOM = 45^0$

$\sphericalangle BOK = 90^0 - \sphericalangle BOM$

$\sphericalangle BOK = 45^0$

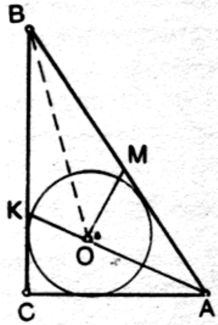
$\sphericalangle KBO = \sphericalangle MBO = \frac{\beta}{2}$ и

$\overline{OB} = \overline{OB}$, од каде што следува:

$\Delta\ OBK \cong \Delta\ OBM$ (ACA), односно: $\overline{BM} = \overline{BK}$.

Според докажаната теорема се добива: $\overline{CK} : \overline{KB} = \overline{AC} : \overline{AB}$, т.е.

$(a - \frac{c}{2}) : \frac{c}{2} = b : c$ од каде што е:



црт. 4

$2a - c = b$ .... (4)

Од друга страна, според Питагоровата теорема имаме

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Со решавање на равенките (4) и (5) се добива:

$$a : b : c = 4 : 3 : 5$$

а тоа е познатиот Александриски триаголник.

Задача:

1. Во триаголникот ABC конструирани се симетралите AA_1 и CC_1. Во кој однос (размер) се наоѓаат плоштините на триаголниците ABC и AC_1A_1 ако е $\overline{AB} = 6\ cm$, $\overline{AC} = 8\ cm$ и $\overline{BC} = 5\ cm$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус