Информационный
центр
Турнира Городов

Московский центр
непрерывного
математического
образования

ДЕСЯТАЯ
ЛЕТНЯЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ТУРНИРА ГОРОДОВ

▷ Задачи
▷ Решения
▷ Участники
▷ Результаты

МЦНМО Москва 1999

В сборнике рассказано о традиционной летней конференции международного математического Турнира Городов (Гамбург, 1998). Приводятся задачи, предложенные участникам, с решениями или комментариями. Каждая из этих задач состоит из множества пунктов, связанных единой темой, и намечает небольшое математическое исследование на сравнительно элементарном уровне. Темы, использованные в задачах конференции, весьма разнообразны: комбинаторика покрытий прямой одинаковыми фигурами, теорема Шарковского (элементарное введение в теорию динамических систем); гипотеза Борсука; геометрия Галилея (геометрия кинематики классической механики); ускорение сходимости степенных рядов; задачи об округлении сумм.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Московского Комитета Образования и Соросовской образовательной программы в области точных наук

Издательство Московского центра непрерывного
математического образования

Лицензия ЛР №071150 от 11.04.95 г.
Формат 60×84 1/16. Печ. л. 9. Тираж 500.

Ответственный за выпуск Вялый М.Н.

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Содержание

Введение

О конференциях Турнира Городов

Конференции Турнира Городов не похожи на научные конференции в обычном смысле слова. Здесь нет пленарных докладов, работы по секциям, официальной программы. Это, скорее, неформальные встречи, на которые приглашаются школьники — победители международного математического Турнира Городов — и сопровождающие их учителя.

Одна из целей конференции — приобщить способных школьников к решению задач исследовательского характера. Для этого организаторы предлагают им интересные трудные задачи, часто с выходом на открытые математические проблемы. Даже рассказ условий такого типа задач превращается в целую лекцию, и *презентация* задач занимает по крайней мере день работы конференции.

Решение таких задач требует больших затрат времени и значительных интеллектуальных усилий. Поэтому организационно процесс решения проходит в свободной форме: даётся много времени (несколько дней), решения могут быть как индивидуальными, так и коллективными, т. е. допускается решение от любой группы объединившихся людей. Такая группа не обязательно совпадает с «командой», приехавшей из одного города. Жюри назначает сроки сдачи письменных решений, по традиции их два, и для них прижились названия «предварительный финиш» и «окончательный финиш». Сданные решения проверяются, оценивается степень продвижения участников в той или иной задачи. Затем проводится разбор решённых задач. Некоторые пункты после первого срока сдачи снимаются с конкурса. Иногда после промежуточного разбора добавляются новые задачи. Критерии успеха также отличаются от традиционных: успешность выступления оценивается по наибольшему продвижению в *одной* из задач. Другими словами, фактически проводится одновременно несколько конкурсов (по каждой из задач в отдельности). В реальности многие участники не могут остановиться на какой-то единственной задаче и решают сразу несколько задач.

Немаловажное значение для успеха конференции имеет то, каким образом школьники приглашаются для участия в ней. Основным критерием для приглашения служат успехи в Турнире Городов. Турнир Городов — международное математическое соревнование школьников, проводящееся в более, чем ста городах мира. Ежегодно в Турнире принимают участие более трёх тысяч школьников, несколько сот из которых оказываются победителями и награждаются дипломами. Показавшие наиболее высокие результаты приглашаются на Летнюю конференцию. Приглашение на конференцию посылается также победителям других престижных соревнований, таких как Всероссийская и международная олимпиады (таким образом на конференцию попадают также школьники из тех городов, где не проводится Турнир).

Большинство участников конференций уже выбрали математику своим основным занятием. Они фактически готовы заниматься научными исследованиями. Поэтому, несмотря на очень высокий уровень предлагаемых на конференции задач, там почти не бывает «случайных» людей — тех, кому предлагаемые задачи неинтересны или непосильны.

Руководителями команд обычно бывают математики или школьные учителя, проводящие Турнир у себя в городе. На конференции они получают возможность непосредственного общения со своими коллегами. Кроме того, многие из них активно включаются в работу жюри конференции. Это приветствуется, поскольку состав жюри не фиксируется жёстко до начала конференции. Некоторые руководители сами с интересом решают предлагающиеся задачи.

Вообще все участники — как школьники, так и учителя — получают возможность активного отдыха, интенсивной творческой работы и интересного общения.

Работа Десятой конференции

X летняя конференция Турнира городов проходила в немецком городе Гамбурге с 1 по 8 августа 1998 года. На неё были приглашены 72 школьника — победители девятнадцатого Турнира Городов. Они представляли 30 городов из 7 стран — России (42 участника), Украины (13), Германии (5), Израиля (5), Сербии (4), Болгарии (2), Швеции (1).

Вместе с руководителями команд, членами оргкомитета и жюри, гостями в конференции участвовали 117 человек. Такое количество было наибольшим за всю историю конференций. Ранее количество участников никогда не превышало ста человек.

Участники жили в пригороде Гамбурга Нойграбене, на территории природного заповедника “Fischbeker Heide” в летней школе (Freilüftschule). Программа конференции была следующей.

31 июля — день заезда

1 августа — представление задач

3 августа — «предварительный финиш»

4 августа — разбор решённых задач

5 августа — экскурсионный день

7 августа — «окончательный финиш»

8 августа — разбор задач и закрытие конференции

9–12 августа — проживание в семьях, экскурсионная программа

Работа конференции фактически началась уже в день заезда 31 июля. Школьникам были предложены шесть задач. Каждая из этих задач, в отличие от тех, что обычно даются на олимпиадах, состояла из множества пунктов. Фактически это циклы задач, связанных единой темой, которые намечают небольшое математическое исследование. Первые пункты, как правило, сравнительно простые; они служат для того, чтобы освоиться в предложенной теме. Однако, каждая задача содержит очень сложные пункты, иногда их решения неизвестны даже жюри. Участникам конференции было предложено выбрать себе один из циклов и постараться продвинуться в решении его задач как можно дальше. Это и составляло основное содержание работы школьников на конференции. Циклы были подобраны на различные темы, чтобы каждый мог сделать выбор соответственно своим математическим вкусам.

Для сдачи работ были назначены два контрольных срока — 22 часа 3 августа («предварительный финиш») и 22 часа 7 августа («окончательный финиш»). Однако, можно было сдавать работы и по мере решения отдельных пунктов. В этом случае жюри старалось сразу проверять и рецензировать сдаваемые работы, чтобы облегчить школьникам дальнейшее исследование.

Открытие конференции состоялось 1 августа в 9 часов. После открытия прошло представление задач. Хотя все условия были заранее размножены и розданы участникам (каждый мог получить условия на русском или английском языке по выбору), каждую задачу представлял один из членов жюри. Это представление было чем-то вроде комментария к условиям, хотя порой оно превращалось в часовой доклад.

Ниже перечислены названия задач, предложенных на конференции. Для каждой задачи указан представлявший её член жюри, а также те члены жюри, которые помогали «вести» эту задачу. Школьники в любой момент могли задавать им возникающие по условиям вопросы. Эта же бригада проверяла работы, проводила рассказ решений и формировала предложения по награждению школьников, преуспевших в решении задачи.

- ▷ Обобщённые полимино (предложена и представлялась С. Л. Берловым, помогали К. П. Кохась и П. А. Кожевников);
- ▷ Одномерная динамика и теорема Шарковского (предложена и представлялась А. И. Буфетовым, помогали В. А. Тиморин, И. С. Рубанов, Л. Э. Медников, А. С. Штерн);
- ▷ О разбиении множеств на части меньшего диаметра (предложена и представлялась М. Л. Гервером, помогали А. Я. Канель-Белов. М. И. Малкин, М. Ю. Панов);
- ▷ Парабола как окружность (предложена С. В. Маркеловым, представлял М. Н. Вялый, помогал В. О. Бугаенко);
- ▷ Ускорение сходимости рядов (предложена и представлялась А. К. Толпыго, помогали С. А. Дориченко и М. Г. Сонкин);
- ▷ Округление сумм (предложена А. В. Шаповаловым и Д. А. Шаповаловым, представлялась А. В. Шаповаловым и С. А. Зайцевым).

2 и 3 августа школьники активно решали задачи — ведь на 22 часа 3 августа был назначен «предварительный финиш». Нужно сдать все решённые к этому моменту задачи, поскольку после проверки некоторые из пунктов, обычно более простые, разбираются и снимаются с дальнейшего конкурса. Для руководителей команд и членов

жюри эти дни самые свободные, некоторые использовали их для поездки в Любек и реализации других экскурсионных планов, тем более, что в выходные дни железнодорожные билеты в Германии относительно дешёвые.

К вечеру 3 августа вал работ, сданных к «предварительному финишу», обрушился на жюри. Жюри предстояло ночное бдение. Но к утру все работы проверены, и весь день 4 августа ушёл на разбор тех пунктов задач, которые закрываются после предварительного финиша.

5 августа — день активного отдыха. Два комфортабельных автобуса привезли всех на берег Эльбы и там высадили. Далее участникам предстояло пройти вдоль реки 15 км. Сначала все шли большой толпой, потом толпа разбилась на несколько маленьких групп, некоторые из них быстро вырвались вперед, другие то и дело обгоняя друг друга, смешивались, менялись составом, встречались, (такую встречу естественно называли «встречей на Эльбе») и снова расходились. Пошедший во время прогулки сильный ливень попытался испытать математиков на прочность, но никто не свернул с пути, все продолжили идти по маршруту. И наконец, приблизительно через три с половиной часа пути, достигнута конечная цель — пригород Гамбурга Ведель. Тут находится знаменитая пристань, где приветствуют все проходящие суда. Каждый раз, когда мимо проходит очередной корабль, флаг Гамбурга на флагштоке приспускается и играется гимн той страны, под флагом которого идёт судно. Первыми из участников конференции к цели пришли петербуржцы, и, несмотря на то, что они были без корабля, на пристани был сыгран в их честь российский гимн. Потом было купание в бассейне, точнее, это аквапарк с многочисленными водными аттракционами. На обратном пути автобус провёз всех через центр города, а также по знаменитой улице Reeperbahn, известной как средоточие ночных развлекательных заведений.

Каждый вечер устраивалось общее чаепитие, для этого разводился тридцатилитровый самовар, который является непременным участником и символом конференций Турнира Городов. Три года назад, когда конференция проходила в Югославии, таможня аэропорта Шереметьево не разрешила вывоз Самовара за границу, и часть духа конференции была утрачена. В этот раз об этой проблеме подумали заранее, все необходимые документы были оформлены. Самовар получил собственный паспорт с фотографией и благополучно прошел все необходимые при пересечении границы формальности наравне с остальными участниками конференции. Каждый вечер вокруг него собирались школьники, было чаепитие, пение песен под гитару, разговоры. Во время одной из таких бесед Николай Николаевич Константинов и Сергей Дориченко рассказывали о своей поездке в Китай на конференцию международной федерации математических соревнований.

6 августа для членов жюри и руководителей команд была устроена автобусная экскурсия по городу. Она включала в себя посещение городской ратуши и смотровой площадки на колокольне церкви святого Михаила. Школьники снова активно работали, и к вечеру 7 августа все работы сданы. Полученные результаты очень радуют жюри, некоторые из них оказываются новыми даже для представлявших задачи членов жюри. Такая ситуация является обычной для конференций Турнира Городов.

Ещё одна бессонная ночь для членов жюри — с 7 на 8 августа. Весь день 8 августа шёл разбор задач, но времени все равно не хватило, и некоторые задачи пришлось разбирать в параллель. Одновременно с этим печатались дипломы. Награждение назначено на 20 часов, но (и это тоже традиционно для конференций) оно задерживается. Константинов рассказывает об истории Турнира Городов и летних конференций. Выступают другие участники, и, наконец, около 22 часов все дипломы напечатаны и подписаны. В формулировках дипломов нет упоминания о первых, вторых и прочих местах. Там сказано, какой математический результат фактически получил его владелец. Ведь и настоящая научная работа есть не соревнование математиков друг с другом, а соревнование с теми задачами, которые ставит нам природа! Все получают призы — большие стопки книг от Московского Центра непрерывного математического образования и чертежные приборы от немецкой фирмы “ROTRING”.

Обычно конференция заканчивается своим закрытием. Но в этот раз немецкие хозяева организовали ещё несколько дополнительных экскурсионных дней для российских и украинских участников. На эти дни всех школьников расселили по семьям. 9 августа была экскурсия по Эльбе на катере для участников конференции и немецких семей, их принимающих («новых родителей», как их назвали в шутку). Дальнейшая программа зависела от принимающей семьи. Школьники смогли увидеть, как живут немцы. Некоторые из них съездили в соседние города, на Северное или Балтийское море. Отъезд из Гамбурга был 11 и 12 августа.

Организаторы конференции

Организатором конференции являлся Центральный Оргкомитет Турнира Городов во главе с Н. Н. Константиновым и Московский Центр непрерывного математического образования (МЦНМО).

Хозяевами конференции выступили власти города Гамбурга в лице департамента по делам школы, молодёжи и профессионального образования (Frei und Hansestadt Hamburg, Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung, Amt für Schule). Немецкая сторона взяла на себя бо́льшую часть расходов во время пребывания на территории Германии.

Транспортные расходы и часть организационных расходов оплатили региональные органы образования, различные фонды и организации. Вот их перечень:

1. Соросовская программа образования в области точных наук (ISSEP).
2. Управление образования администрации г. Нижнего Новгорода.
3. Московский комитет образования.
4. Отдел образования администрации Железнодорожного района г. Барнаула.
5. ЗАО «Стратиг» г. Кирова.
6. Московский районный отдел образования г. Чебоксары.
7. ФМШ №146 г. Перми.
8. Комитет по науке, образованию и делам молодежи мэрии г. Краснодара.
9. Управление образования мэрии г. Жуковского.
10. Матмех Санкт-Петербургского государственного университета совместно с Петербургским отделением Математического института РАН по гранту «Интеграция».
11. Уральский региональный экспериментальный комплекс.
12. Управление образования Вологодской области.
13. Кировский центр дополнительного обучения одарённых школьников.

14. Администрация г. Нижнего Тагила.
15. Министерство просвещения Израиля.
16. Афипский технический лицей г. Краснодара.
17. Мэрия г. Калуги.
18. Администрация Лужского района Ленинградской обл.
19. Управление администрации г. Рыбинска по делам образования и молодежи.
20. Благотворительный фонд «Ліцей» г. Львова.
21. Мэрия г. Винницы.

Призы для победителей предоставили МЦНМО и немецкая фирма “ROTRING”.

Помощь в приобретении авиабилетов оказала фирма «Бизнес и туризм интернешнл».

Участники

♡ Барнаул (Россия)

1. Исаев Вадим; 8 класс, школа 42
2. Волженин Илья; 10 класс, школа 42
3. Саженкова Елена; 10 класс, школа 42
4. Оскорбин Дмитрий Николаевич — руководитель

♡ Белорецк (Россия, Башкортостан)

1. Зиатдинов Борис; 10 класс, БКШ
2. Матвеев Артур; 10 класс, БКШ
3. Горячих Олег Викторович — руководитель

♡ Винница (Украина)

1. Пилявский Павел; 11 класс, школа 7
2. Каблучко Захар; 10 класс, школа 17

♡ Вологда (Россия)

1. Конев Илья; 10 класс, ВГЕМЛ
2. Шульман Екатерина Викторовна — руководитель

♡ Гамбург (Германия)

1. Реген Вольфрам (Wolfram Regen); 11 класс, Gelehrtenschule des Johanneums
2. Шлячков Всеволод (Waldemar Schlackow); 11 класс, Walddörfer Gymnasium
3. Сильвестр Ян Хенрик (Jan Henrik Sylvester); 12 класс, Sophie-Barat-Schule
4. Паперин Григорий (Gregory Paperin); 13 класс, Gymnasium Tonndorf

5. Кинне Ян Кристоф (Jan Christoph Kinne); 12 класс, Sophie-Barat-Schule

♡ Жуковский (Россия, Московская обл.)

1. Гайфуллин Александр; 9 класс, школа 10
2. Афанасьев Лаврентий; 10 класс, школа 14
3. Копылов Игорь Анатольевич — руководитель

♡ Иерусалим (Израиль)

1. Медведовский Александр; 12 класс, школа при Еврейском университете
2. Каневский Борис Иосифович — руководитель

♡ Иваново (Россия)

1. Филатов Евгений; 10 класс, школа 22
2. Шаповалов Александр Васильевич — руководитель, член жюри

♡ Казань (Россия, Татарстан)

1. Дмитриев Андрей; 9 класс, Академический колледж
2. Королёв Юрий Николаевич — руководитель

♡ Кармиэль (Израиль)

1. Браверман Марк; 10 класс, школа Орт Крамим

♡ Киев (Украина)

1. Гоголев Андрей; 9 класс, школа 171
2. Майданский Максим; 10 класс, школа 178
3. Примак Андрей; 10 класс, УФМЛ
4. Черкаев Глеб; 10 класс, УФМЛ
5. Толпыго Алексей Кириллович — руководитель, член жюри

♡ Киров (Россия)

1. Халявин Андрей; 7 класс, ФМЛ
2. Лузгарёв Александр; 10 класс, ФМЛ
3. Певзнер Игорь; 10 класс, ФМЛ
4. Прокушкин Иван; 10 класс, ФМЛ
5. Шадрин Владимир; 10 класс, ФМЛ

6. Рубанов Игорь Соломонович — руководитель, член жюри

- ♡ Краснодар (Россия)
  1. Зинин Евгений; 9 класс, школа 87
  2. Крамаренко Денис; 9 класс, школа 42
  3. Муханов Иван; 10 класс, Афипский технический лицей
  4. Федоренко Игорь Владимирович — руководитель
- ♡ Луга (Россия, Ленинградская обл.)
  1. Рыжков Александр; 10 класс, школа 3
- ♡ Львов (Украина)
  1. Васильев Денис; 9 класс, Львовский ФМЛ
  2. Батршин Руслан; 10 класс, Львовский ФМЛ
  3. Давыдов Максим; 10 класс, Львовский ФМЛ
  4. Пенцак Евгений Ярославович — руководитель
- ♡ Москва (Россия)
  1. Дмитревская Анна; 9 класс, школа 57
  2. Немытов Виктор; 9 класс, школа 57
  3. Евсеев Антон; 10 класс, школа 57
  4. Ершов Денис; 10 класс, школа 2
  5. Жиляев Владимир; 10 класс, школа 1543
  6. Бугаенко Вадим Олегович — руководитель, член жюри
  7. Дориченко Сергей Александрович — руководитель, член жюри
- ♡ Нижний Новгород (Россия)
  1. Колесников Андрей; 9 класс, педагогическая гимназия
  2. Жмогинов Андрей; 10 класс, школа 40
  3. Кузнецов Максим; 10 класс, школа 40
  4. Мартьянов Владимир; 10 класс, школа 40
  5. Малкин Михаил Иосифович — руководитель, член жюри
- ♡ Нижний Тагил (Россия, Свердловская обл.)
  1. Рачков Роман; 10 класс, политехническая гимназия
  2. Закарлюк Лариса Ильинична — руководитель

♡ Ниш (Югославия)

1. Павлович Весна; 11 класс, гимназия «Бора Станкович»
2. Джунич Зоран; 12 класс, гимназия «Светозар Маркович»

♡ Омск (Россия)

1. Бурцев Александр; 9 класс, школа 64
2. Красненко Екатерина; 9 класс, школа 64
3. Мещеряков Евгений; 10 класс, школа 64
4. Штерн Александр Савельевич — руководитель, член жюри

♡ Пермь (Россия)

1. Кудрин Максим; 9 класс, школа 146
2. Баяндин Константин; 10 класс, школа 146
3. Корзняков Александр Алексеевич — руководитель

♡ Ростов-на-Дону (Россия)

1. Бейлин Андрей; 10 класс, школа 58

♡ Рыбинск (Россия, Ярославская обл.)

1. Поярков Алексей; 9 класс, школа 2

♡ Санкт-Петербург (Россия)

1. Лифшиц Юрий; 9 класс, школа 239
2. Тихомиров Сергей; 9 класс, школа 239
3. Петров Фёдор; 10 класс, школа 239
4. Кохась Константин Петрович — руководитель, член жюри

♡ София (Болгария)

1. Пенев Никола; 11 класс, National Mathematics School
2. Петракиев Иван; 11 класс, National Mathematics School
3. Алексиев Хари (Златоград) — руководитель

♡ Стокгольм (Швеция)

1. Сандберг Патрик (Patrik Sundberg); 12 класс, Danderyds gymnasium

♡ Суботица (Югославия)

1. Лазич Владимир; 10 класс, Математическая гимназия

2. Месарош Карола; 10 класс, Математическая гимназия
3. Киселички Любица — руководитель

♡ Тель-Авив (Израиль)

1. Айзенбуд Авраам (Рами); 10 класс, школа Шевах Мофет
2. Мирочник Роман; 11 класс, школа Шевах Мофет
3. Гуревич Дмитрий; 12 класс, школа Ле Пандесаим
4. Шульман Анатолий Хананович — руководитель

♡ Харьков (Украина)

1. Бойко Константин; 10 класс, школа 27
2. Горшков Евгений; 10 класс, школа 27
3. Забирник Алексей; 10 класс, школа 27
4. Полякова Людмила; 9 класс, школа 27

♡ Чебоксары (Россия, Чувашия)

1. Арсютов Алексей; 10 класс, школа 34
2. Игнатьев Алексей; 10 класс, школа 34
3. Калюжный Андрей; 10 класс, школа 34
4. Петрова Светлана Семеновна — руководитель

♣ Жюри

1. Константинов Николай Николаевич (Москва) — председатель
2. Белов Алексей Яковлевич (Москва)
3. Берлов Сергей Львович (Санкт-Петербург)
4. Бугаенко Вадим Олегович (Москва)
5. Буфетов Александр Игоревич (Москва)
6. Вялый Михаил Николаевич (Москва)
7. Гервер Михаил Львович (Москва)
8. Дориченко Сергей Александрович (Москва)
9. Зайцев Сергей Александрович (Москва)
10. Кожевников Павел Александрович (Москва)
11. Кохась Константин Петрович (Санкт-Петербург)
12. Малкин Михаил Иосифович (Нижний Новгород)
13. Медников Леонид Эммануилович (Иерусалим)
14. Панов Михаил Юрьевич (Москва)

15. Рубанов Игорь Соломонович (Киров)
16. Сонкин Марк Григорьевич (Калуга)
17. Тиморин Владлен Анатольевич (Москва)
18. Толпыго Алексей Кириллович (Киев)
19. Шаповалов Александр Васильевич (Иваново)
20. Штерн Александр Савельевич (Омск)

♢ Оргкомитет

1. Мюллер Хельмут (Helmut Müller) (Гамбург)
2. Ренц Вернер (Werner Renz) (Гамбург)
3. Зилаф Клаус (Klaus Sielaff) (Гамбург)
4. Шляйхер Дирк (Dierk Schleicher) (Мюнхен)

♢ Техническое обеспечение

1. Краев Егор (Цюрих, Швейцария)
2. Фейгельман Марина Михайловна (Москва)
3. Шалунов Станислав Евсеевич (Москва)

♡ Гости

1. Шлегер Роберт Герет (Robert Gerät Schleger) (Грац, Австрия)
2. Гайфуллина Галина Ивановна (Жуковский)

Условия задач

Задача 1. Обобщённые полимино

Есть бесконечная горизонтальная клетчатая полоска $\mathbb{P}$ шириной в одну клетку. Любую фигуру в этой полоске, состоящую из нескольких клеток, будем называть (*обобщённым*) *полимино* или *n-мино*, если фигура состоит из n клеток. 2-мино также называется домино, 3-мино — тримино, 4-мино — тетрамино и т. д.

Параметрами n-мино будем называть числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}, равные расстояниям между соседними клетками (если двигаться слева направо). Например, каждое тримино задается двумя параметрами: расстоянием a между центральной и крайней левой клетками и расстоянием b между центральной и крайней правой клетками. Если параметры некоторого полимино записать в обратном порядке, то мы получим параметры зеркально симметричного полимино.

В задачах, приводимых ниже, используются наборы полимино (одинаковых, если не оговорено противное). Если зеркально симметричные полимино считаются различными, то набор называется *ориентированным*, а если одинаковыми, то *неориентированным.*

1. а) Докажите, что если полоску $1 \times n$ можно покрыть ориентированными полимино, то это можно сделать единственным способом.

б) Докажите, что если полоску $1 \times n$ можно покрыть ориентированными тримино с параметрами (a, b), то $a = b$.

2. Докажите, что если одинаковыми обобщёнными домино можно покрыть прямоугольник $m \times n$, то ими можно покрыть полоску $1 \times n$ или полоску $1 \times m$.

3. а) Докажите, что если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, то полоску $\mathbb{P}$ тогда и только тогда можно покрыть неориентированными (a_1, b_1)-тримино, когда её можно покрыть неориентированными (a_2, b_2)-тримино.

б) Докажите, что если ориентированными полимино можно замостить полоску $1 \times n$, то эти полимино — центральносимметричные.

4. а) Докажите, что при любых a и $b \in \mathbb{N}$ неориентированными (a, b)-тримино можно покрыть всю полоску $\mathbb{P}$.

б) При каких a, $b \in \mathbb{N}$ неориентированными (a, b)-тримино можно замостить хотя бы одну полоску конечной длины?

5. а) Докажите, что для всякого ориентированного тримино T_1 существует такое ориентированное тримино T_2, что ориентированными тримино этих двух видов можно покрыть конечную полоску (тримино T_1 должно быть хотя бы один раз использовано).

б) При каких a, $b \in \mathbb{N}$ полоску $\mathbb{P}$ можно покрыть ориентированными (a, b)-тримино?

6. Пусть числа a и b фиксированы. Рассмотрим полоску наименьшей длины ℓ, которую можно замостить неориентированными (a, b)-тримино.

а) Докажите, что $\ell \geqslant \ell_0 = \frac{3}{2}(a + b)$.

б) Докажите, что существует не более одного замощения полоски длины ℓ_0 тримино с параметрами (a, b).

в) Пусть $a > b$, a и b взаимно просты. Докажите, что замощение полоски длины ℓ_0 существует в том и только том случае, если a и b — соседние нечётные числа.

7. Возьмем произвольные n^2 клеток нашей полоски, обозначим через S фигуру, ими образованную. Ориентированное n-мино назовём *S-квадрируемым*, если существует замощение фигуры S

n-мино такой формы. Докажите, что при всех n и S количество S-квадрируемых n-мино чётно.

8. Тетрамино с параметрами (a, b, a) будем называть *симметричным тетрамино с параметрами* (a, b). Докажите, что симметричными тетрамино с параметрами (a, b) (a и b взаимно просты) можно замостить полоску $\mathbb{P}$ в том и только том случае, если $a(a+b)$ — чётно.

Для любого n и произвольного ориентированного n-мино T обозначим через q_k — наибольшее количество клеток, которые можно замостить непересекающимися фигурами вида T в полоске $1 \times k$. Величину $\Theta(T) = \sup\limits_k \frac{q_k}{k}$ будем называть *коэффициентом укладываемости* n-мино T. Величину $\mathfrak{Q}_n = \inf\limits_{|T|=n} \Theta(T)$ будем называть *минимальной паркетопригодностью* числа n.

9. а) Найдите $\mathfrak{Q}_3$.

б) Найдите $\mathfrak{Q}_4$.

в) Докажите, что $\mathfrak{Q}_n \geqslant \dfrac{2n}{n^2 - n + 2}$.

г) Докажите, что $\mathfrak{Q}_n \leqslant \dfrac{4}{n}$.

Задача 2. Одномерная динамика и теорема Шарковского

Введение

Мы будем изучать непрерывные отображения отрезка в себя.

Пусть $[a, b]$ — отрезок, $f\colon [a, b] \to [a, b]$ — отображение. Напомним определение непрерывности.

Определение. Пусть для любых $x_n \in [a, b]$, где $n = 1, 2, \ldots$, из условия

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Тогда f называется *непрерывным*.

В работе с непрерывными отображениями очень полезна

Теорема о промежуточном значении. *Пусть $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ непрерывна. Тогда для всякого c, лежащего на отрезке с концами $f(x)$ и $f(y)$, найдется $d \in [x, y]$, такое что $f(d) = c$.*

Мы не будем здесь доказывать эту теорему; при решении пунктов задачи на неё можно ссылаться без доказательства.

Итак, рассмотрим непрерывное отображение $f\colon [a, b] \to [a, b]$. Заметим, что область значений отображения f есть подмножество его области определения, а потому для всякого $x \in [a, b]$ определены точки

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

Для всякого целого $n \geqslant 0$ обозначим

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n \text{ раз}}(x\underbrace{)\cdots)))}_{n \text{ раз}}.$$

Замечание. $f^0(x) = x$.

Определение. *Орбитой* точки x называется множество

$$\{f^n(x) \,|\, n \geqslant 0\}.$$

Определение. Точка $x \in [a, b]$ называется *неподвижной точкой* отображения f, если $f(x) = x$.

Упражнение 1. Всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

Определение. Точка $x \in [a, b]$ называется *периодической точкой* отображения f, если существует такое $n > 0$, что $f^n(x) = x$. Всякое такое число n называется *периодом* точки x; наименьшее такое n называется *наименьшим периодом* точки x.

Упражнение 2. Все периоды периодической точки кратны наименьшему.

Определение. Число n будем называть *периодом* отображения f, если у f есть периодическая точка наименьшего периода n.

Как может быть устроено множество периодов непрерывного отображения отрезка в себя?

В 1964 году А. Н. Шарковский доказал следующий удивительный факт:

Если непрерывное отображение отрезка в себя имеет период 3, то оно имеет любой натуральный период.

В этой задаче, в числе прочего, доказывается этот факт.

В первой части задачи исследуется отображение

$$f(x) = 1 - |1 - 2x|$$

(так называемое **tent map**). Предлагается в явном виде описать периодические точки этого отображения.

Вторая часть задачи посвящена доказательству теоремы Шарковского и близких утверждений.

1. The Tent Map

1. Рассмотрим $f(x) = 1 - |1 - 2x|$ на $[0, 1]$.
   а) Покажите, что $f([0, 1]) = [0, 1]$.
   б) Постройте график f.

2. Найдите у f точку а) периода 2; б) периода 3; в) периода 5.

3. Опишите все периодические точки отображения f.

4. Покажите, что f имеет любой натуральной период.

5. Для произвольного натурального n найдите число точек периода n (не обязательно наименьшего) у отображения f.

Определение. Подмножество X отрезка $[0,1]$ называется *плотным*, если для любых $0 < a < b < 1$,

$$X \cap (a,b) \neq \varnothing.$$

6*. Покажите, что у f есть плотные орбиты.

7.** Проведите аналогичное исследование для $f(x) = 4x(1-x)$ на $[0,1]$.

2. Теорема Шарковского

8. Постройте пример непостоянного непрерывного отображения отрезка в себя, не имеющего других периодических точек, кроме неподвижной.

Пусть $f\colon [a,b] \to [a,b]$, K, L — отрезки, вложенные в $[a,b]$. Будем говорить, что отрезок K накрывает L, если $f(K) \supseteq L$; обозначение: $K \mapsto L$.

9. Пусть $K \mapsto K$. Покажите, что у f есть неподвижная точка на отрезке K.

10. Пусть $K_0 \mapsto K_1 \mapsto K_2 \mapsto \ldots \mapsto K_{n-1} \mapsto K_0$. Покажите, что найдётся точка $x \in K_0$, такая что $f(x) \in K_1$, $f^2(x) \in K_2$, …, $f^{n-1}(x) \in K_{n-1}$, $f^n(x) = x$.

11. Пусть непрерывное отображение отрезка в себя имеет период 3. Покажите, что оно имеет любой натуральный период.

12. а) Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, f—непрерывное отображение отрезка $[x_0, x_3]$ в себя, такое что $f(x_i) = x_{i+1}$ при $i = 0,1,2$, $f(x_3) = x_0$. Покажите, что f имеет любой период на $[x_0, x_3]$.

б) Та же задача с заменой 3 на произвольное n.

13.** Постройте непрерывное отображение отрезка в себя, множество периодов которого есть $\{2^n | n \geqslant 0\}$.

3. Дополнительные пункты

На самом деле, Шарковский доказал гораздо более общую теорему.

А именно, введём на множестве натуральных чисел новое отношение порядка $\triangleright$, определённое следующим образом:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \cdots$$
$$\cdots\ 2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright 2\cdot 7 \triangleright \cdots$$
$$\cdots\ 2^2\cdot 3 \triangleright 2^2\cdot 5 \triangleright \cdots$$
$$\cdots\ 2^k\cdot 3 \triangleright 2^k\cdot 5 \triangleright \cdots$$
$$\cdots \triangleright 2^{k+1} \triangleright 2^k \triangleright 2^{k-1} \triangleright \cdots \triangleright 2 \triangleright 1$$

Теорема Шарковского. *Если $p \triangleright q$, то всякое отображение отрезка в себя, имеющее период p, имеет также и период q.*

В следующих пунктах мы намечаем доказательство теоремы Шарковского.

3.1. Приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего период 2 и не имеющего других периодических точек, кроме неподвижных.

3.2. Приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего период 4 и не имеющего периода 3.

3.3. Докажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период 4, имеет также период 2.

3.4*. Приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего период 5, но не имеющего периода 3.

3.5. Покажите, что непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период 5, имеет также период 7.

3.6*. Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период $2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, имеет также период $2k+3$.

3.7*. Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее нечетный период больше 1, имеет также период 6.

3.8. Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период 2^k, имеет также период 2^{k-1}.

3.9. Выведите из предыдущих пунктов теорему Шарковского.

3.10. Для всякого натурального k приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, множество периодов которого есть $\{1, 2, \ldots, 2^k\}$.

3.11. = **13****.

4.1. Пусть отображение отрезка в себя имеет любой период и множество периодических точек всюду плотно на отрезке. Верно ли, что у него есть плотные орбиты?

4.2. Пусть отображение отрезка в себя имеет плотные орбиты. Верно ли, что

а) оно имеет любой период?

б) его периодические точки плотны?

4.3. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x(1 - x)$.

а) Опишите множество точек, орбита которых — ограниченное множество.

б) Покажите, что у f есть любой период.

4.4. Проведите аналогичное исследование для $f(x) = \lambda x(1 - x)$ при других значениях λ.

4.5. Пусть отображение $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывно. Верно ли, что множество точек, орбита которых ограничена, замкнуто?

4.6. Существует ли непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее ровно одну плотную орбиту?

Ответ: нет. Докажите.

Задача 3. О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры

Познакомившись с двумя сериями подготовительных и двумя сериями основных задач по комбинаторной геометрии и теории графов, вы узнаете драматическую историю одной гипотезы, выдвинутой 65 лет назад, доказанной при дополнительных предположениях в сороковых–пятидесятых и опровергнутой в 1993 году. Вслед за основными задачами формулируется ряд трудных вопросов, ответы на которые пока неизвестны.

Все рассматриваемые ниже множества предполагаются *ограниченными*.

Диаметром множества M называется *наименьшее* число D, обладающее тем свойством, что *для любых двух точек* M *расстояние между ними не превосходит* D.

В частности, для множеств M, состоящих из конечного числа точек, диаметр D равен *наибольшему из попарных расстояний между точками* M.

Подготовительные задачи (первая серия)

1. Докажите, что любое множество на плоскости можно разбить на три части меньшего диаметра.

2. a) Приведите пример плоского множества, которое нельзя разбить на две части меньшего диаметра.

b) Приведите пример множества в трёхмерном пространстве, которое нельзя разбить на три части меньшего диаметра.

3. Докажите, что a) окружность нельзя разбить на 2 части меньшего диаметра,

b**) трёхмерный шар нельзя разбить на 3 части меньшего диаметра.

c) Разбейте трёхмерный шар на 4 части меньшего диаметра.

Гипотеза Борсука и некоторые теоремы о разбиении

В 1933 г. известный польский математик Карел Борсук высказал гипотезу:

Любое ограниченное множество в трёхмерном пространстве можно разбить на четыре части меньшего диаметра. И вообще: любое ограниченное множество в d-мерном пространстве можно разбить на $d+1$ частей меньшего диаметра (необходимые сведения о многомерных пространствах будут приведены ниже).

Решение задачи 1 подтверждает гипотезу Борсука при $d = 2$.

В 1955 г. Х. Эгглстон и в 1957 г. Б. Грюнбаум и А. Хеппеш доказали её при $d = 3$. А ещё раньше гипотеза Борсука нашла подтверждение для всех центрально симметричных множеств и всех гладких тел (Г. Хадвигер, 1946 г.) [1].

Основные задачи (первая серия)

4. Докажите, что любое центрально симметричное множество в трёхмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.

5. Докажите, что гипотезу Борсука достаточно проверить для *выпуклых* множеств (то есть для множеств, которые вместе с каждой парой точек содержат весь отрезок с концами в этих точках).

Определения

Через каждую граничную точку выпуклого множества V в трёхмерном пространстве можно провести *хотя бы одну опорную плоскость* (т. е. такую плоскость, что V лежит по одну сторону от неё). Через вершину выпуклого многогранника (например, через вершину куба) проходит бесконечно много опорных плоскостей. Выпуклое множество (или выпуклое тело) V называется *гладким*, если через каждую граничную точку V проходит *единственная* опорная плоскость.

6**. Докажите, что любое *гладкое* выпуклое тело в трёхмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.

Контрпримеры к гипотезе Борсука

В 1993 г. случилось неожиданное: Д. Кан и Г. Калаи построили контрпример к гипотезе Борсука при $d = 1\,325$ и для всех $d > 2\,014$ [2]. В [3] и [4] были построены новые контрпримеры – при $d = 946$ и $d = 561$. Ниже предлагаются задачи, которые приведут к модификациям этих контрпримеров.

Многомерный куб

Введем прямоугольные системы координат x_1, x_2 на плоскости и x_1, x_2, x_3 в трёхмерном пространстве. 4 точки $(1,1), (1,-1)$, $(-1,1)$ и $(-1,-1)$ на плоскости служат вершинами квадрата, 8 точек (x_1, x_2, x_3) в трёхмерном пространстве, где каждая из координат x_j равна 1 или -1, являются вершинами куба.

Аналогично, 16 точек (x_1, x_2, x_3, x_4), где каждая из координат x_j равна 1 или -1, являются вершинами *четырёхмерного* куба; 32 точки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где каждая из координат x_j равна 1 или -1, являются вершинами *пятимерного* куба и т. д.

Для n-мерного куба (для множества точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $|x_j| \leqslant 1$) будем использовать обозначение $[-1,1]^n$.

Расстояние $r = |xx'|$ между точками

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \tag{1}$$

определяется формулой

$$r^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2. \tag{2}$$

Соединив начало координат $0 = (0, 0, \dots, 0)$ с точкой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим вектор $0x$; скалярным произведением векторов $0x$ и $0x'$ называется число

$$(x, x') = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \dots + x_nx'_n. \tag{3}$$

При $n = 2$ и $n = 3$ это — привычные формулы для расстояний и для скалярных произведений на плоскости и в трёхмерном пространстве.

Подготовительные задачи (вторая серия)

7. Пусть (1) – вершины n–мерного куба $[-1,1]^n$: каждая из координат x_j и каждая из координат x'_j равна 1 или -1, $j = 1, 2, \ldots, n$.

a) Пусть $x_j = x'_j$ для s значений индекса j и $x_j \neq x'_j$ для t значений индекса j, $s + t = n$. Чему равен тогда квадрат расстояния (2) между точками (1)?

b) Сколько имеется различных попарных расстояний между вершинами куба $[-1,1]^n$? Сколько вершин лежит на каждом из этих расстояний от данной вершины?

Указание

Для квадрата имеется 2 различных ненулевых попарных расстояния: длина стороны и длина диагонали; если фиксировать одну вершину квадрата $(1,1)$, то — по расстояниям от неё — все 4 вершины квадрата разбиваются на 3 группы:

$$4 = 1 + 2 + 1$$

(в первой группе – сама вершина $(1,1)$, во второй – вершины $(1,-1)$ и $(-1,1)$, в третьей – $(-1,-1)$). Для трёхмерного куба соответствующее разбиение имеет вид

$$8 = 1 + 3 + 3 + 1.$$

Продолжите: $16 = ?$, $32 = ?$, $64 = ?$, $128 = ?$, $256 = ?$, $512 = ?$, $1024 = ?$, …, $2^n = ?$

c) Чему равен диаметр куба $[-1,1]^n$?

8. Какие значения принимает скалярное произведение (3), если (1) — вершины n-мерного куба $[-1,1]^n$?

Определение

Векторы $0x$ и $0x'$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

9. При каких n среди векторов, соединяющих центр 0 куба $[-1,1]^n$ с его вершинами, имеются ортогональные? Фиксируем вершину куба x; для скольких вершин x' векторы $0x'$ ортогональны вектору $0x$?

Идея контрпримера

Будут построены два конечных множества X и Y (X будет подмножеством вершин n-мерного куба, Y — подмножеством вершин d-мерного куба: $X \subset [-1,1]^n$, $Y \subset [-1,1]^d$, $d = C^2_{n+1}$), состоящие из одного и того же числа точек: $|X| = |Y| = N$.

Между X и Y будет установлено такое взаимно однозначное соответствие

$$x \longleftrightarrow y, \quad x' \longleftrightarrow y', \tag{4}$$

что *максимально удаленным друг от друга точкам* y, y' будут соответствовать *ортогональные* $0x, 0x'$, т. е., если D — диаметр Y, то

$$(x, x') = 0 \longleftrightarrow |y, y'| = D. \tag{5}$$

Затем Y превращается в *граф* Γ: вершины y, y' соединяются ребром тогда и только тогда, когда $|yy'| < D$, и исследуются *полные подграфы* графа Γ (т. е. такие подграфы, в которых каждые 2 вершины соединены ребром); вычисляется число q вершин *максимального* (содержащего наибольшее возможное число вершин) полного подграфа Π графа Γ и устанавливается неравенство

$$N/q > d + 1. \tag{6}$$

10. Докажите что из (6) следует, что минимальное число частей диаметра $< D$, на которые можно разбить множество Y, больше $d + 1$ (так что (6) дает контрпример к гипотезе Борсука).

Ввиду (4), (5) все построения фактически проводятся не в Y, а в X: именно X превращается в граф Γ и вершины x, x' соединяются ребром тогда и только тогда, когда $(x, x') \neq 0$.

Основные задачи (вторая серия)

11. Положим $n = 43$ и вложим n–мерный куб $[-1,1]^n$ в $(n+1)$-мерное пространство с координатами $\{x_j\}_{j=0}^n$. Иными словами, $[-1,1]^{43}$ трактуется как 43–мерная грань $x_0 = 1$ куба $[-1,1]^{44}$. Определим X как следующее подмножество вершин куба. Вершина $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X, если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^n$ четно. Проверьте, что X содержит $N = 2^{n-1}$ точек: $|X| = N = 2^{42}$.

12. Теперь положим $d = C_{44}^2 = 946$ и отобразим X на следующее подмножество Y вершин d-мерного куба $[-1, 1]^d$.

Рассмотрим множество P всех пар (i, j), $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n = 43$ (проверьте, что число таких пар равно d, так что их можно перенумеровать числами $k = k(i, j)$, $1 \leqslant k \leqslant d$) и вершине $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ сопоставим точку $y = y(x) \in Y$ с координатами

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j, \quad (i, j) \in P, \quad 1 \leqslant k = k(i, j) \leqslant d.$$

Докажите, что построенное отображение $y = y(x)$ является взаимно однозначным и, следовательно, Y (как и X) содержит N точек:

$$|Y| = |X| = N = 2^{42} = 4\,398\,046\,411\,104.$$

Граф Γ и его максимальный полный подграф Π

Пусть D – диаметр Y. Превратим Y в граф Γ, соединив ребрами все пары вершин y, $y' \in Y$, расстояние $|yy'|$ между которыми меньше D. Пусть Π – максимальный полный подграф Γ, т.е. такой (содержащий наибольшее возможное число вершин) подграф, что любые две его вершины соединены ребром. Решив задачи 14–18, вы увидите, что верна

Теорема. *Число* $|\Pi|$ *вершин подграфа* Π *не превосходит*

$$\sum_{k=0}^{10} C_{43}^k = 2\,665\,685\,155.$$

Считая, что эта теорема верна, решите задачу 13.

13. Проверьте неравенство $N/|\Pi| > 1\,649$ и объясните, почему из него следует, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $946 \leqslant d \leqslant 1\,648$.

14. Докажите, что для различных $x, x' \in X$ скалярное произведение $(x, x') = \sum_{j=0}^n x_j x'_j$ может принимать значения $0, \pm 4k$, $1 \leqslant k \leqslant 10$, и не принимает никаких других значений; $(x, x) = 44$.

15. Докажите, что расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D, когда скалярное произведение $(x, x') = 0$.

16. Теперь граф Г можно получить по–новому, соединив ребрами все пары вершин x, $x' \in X$, для которых $(x, x') \neq 0$. Выведите отсюда, что число вершин |П| максимального полного подграфа П графа Г не меньше, чем $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$.

Многочлены $F_a(x)$ и $G_a(x)$

Каждому $a \in X$ сопоставим многочлен

$$F_a(x) = ((a,x)+1)((a,x)-1)((a,x)+2)((a,x)-2) \times \ldots \\ \cdots \times ((a,x)+5)((a,x)-5). \tag{7}$$

Записав (7) в виде линейной комбинации мономов и последовательно применяя соотношение $x_j^2 = 1$, получаем новый, равный $F_a(x)$ на X, многочлен $G_a(x)$ с мономами $cx_{j_1}^{s_1} x_{j_2}^{s_2} \ldots x_{j_{10}}^{s_{10}}$, c – целые, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_{10} \leqslant n = 43$, $s_k = 0$ или 1.

17. Докажите, что при всех $a, x \in X$ верны следующие соотношения. Если $a \neq x$ и $(a,x) \neq 0$, то $F_a(x) \equiv 0 \pmod{11}$. Если $a = x$, то $F_a(x) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

18. Пусть $\{a_j\}_{j=1}^q \in X$ попарно неортогональны: скалярное произведение любых двух из них не равно нулю. Многочлены $G_a(x)$ при $a = a_j$ обозначим через $g_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Докажите, что $g_j(x)$ *линейно независимы над кольцом целых чисел*: если

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_q g_q(x) \equiv 0, \text{ где } c_1, \ldots, c_q \text{ – целые числа,}$$

то $c_1 = \cdots = c_q = 0$. Выведите отсюда теорему о числе вершин |П| максимального полного подграфа П графа Г: докажите, что |П| не больше, чем $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$.

Новые контрпримеры

Задачи 11–18 приводят к выводу: *гипотеза Борсука неверна при всех d*, $946 \leqslant d \leqslant 1\,648$. Задачи 19–21 приводят к аналогичному выводу для $860 \leqslant d \leqslant 2\,319$ и $561 \leqslant d \leqslant 757$.

19. Положим

$$n = 41,\ \ N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776,\ \ q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^{k} = 473\,732\,328.$$

a) Вложим n-мерный куб $[-1,1]^n$ в $(n+1)$-мерное пространство с координатами $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, и, трактуя $[-1,1]^{41}$ как 41-мерную грань $x_0 = 1$ куба $[-1,1]^{42}$, определим X подобно тому, как это было сделано в задаче 11: вершина $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X, если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ четно.

Проверьте, что X содержит $N = 2^{n-1}$ точек: $|X| = N = 2^{40}$.

b) Так же, как в задаче 12, отобразим X на подмножество Y вершин d-мерного куба $[-1,1]^d$, $d = C_{42}^{2} = 861$.

Рассмотрим множество P всех пар (i,j), $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n = 41$ (число таких пар равно d, так что их можно перенумеровать числами $k = k(i,j)$, $1 \leqslant k \leqslant d$) и вершине $x = \{x_j\}_{j=0}^{n} \in X$ сопоставим точку $y = y(x) \in Y$ с координатами

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j, \quad (i,j) \in P, \quad 1 \leqslant k = k(i,j) \leqslant d.$$

Докажите, что Y, как и X, содержит N точек: $|Y| = |X| = N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$.

c) Какие значения принимает скалярное произведение $(x,x') = \sum_{j=0}^{n} x_j x'_j$ для x, $x' \in X$?

d) Докажите, что расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y, когда скалярное произведение $(x,x') = \pm 2$.

e*) Превратим X в граф Γ, соединив ребрами все пары вершин x, $x' \in X$, для которых $(x,x') \neq \pm 2$. Докажите, что число вершин $|\Pi|$ максимального полного подграфа Π графа Γ равно $q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^{k}$.

f) Из неравенства

$$\frac{N}{q} = \frac{1\,099\,511\,627\,776}{473\,732\,328} > 2\,320 \tag{8}$$

выведите, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $861 \leqslant d \leqslant 2\,319$.

20. Выведите из неравенства (8), что *гипотеза Борсука неверна при* $d = 860$.

21. Положив $n = 33$, $d = C_{34}^2 = 561$, $N = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ и $q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^k = 5\,663\,890$, выведите из неравенства $N/q > 758$, что *гипотеза Борсука неверна всех* d, $561 \leqslant d \leqslant 757$.

Нерешённые вопросы

Сопоставляя полученные выше результаты с [2]–[4], видим, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $561 \leqslant d \leqslant 757$ и $d \geqslant 860$.

22. Верна ли гипотеза Борсука при $3 < d < 561$? Что верно – теорема или контрпример – при $757 < d < 860$?

Ответить на часть этих вопросов, возможно, удастся, решив следующие задачи. Для перехода от этих задач к геометрическим нужно заменить нули и единицы на $+1$ и -1 соответственно.

А. Рассмотрим $2^{10} = 1024$ точки, занумеруем их числами 0, 1, 2, 3, ..., 1023.

Каждое из этих чисел запишем в двоичной форме (в виде 10-разрядного числа):

$$0)\ 000\,0000\,000,\ 1)\ 000\,0000\,001,\ 2)\ 000\,0000\,010,\ \ldots,$$
$$1\,023)\ 111\,1111\,111.$$

Слева к каждому числу допишем 0, справа – 0 или 1 – так, чтобы число единиц (как и число нулей) стало четным:

$$0)\ 0000\,0000\,0000,\ 1)\ 0000\,0000\,0011,\ 2)\ 0000\,0000\,0101,\ \ldots,$$
$$1\ 023)\ 0111\,1111\,1110.$$

Любой паре полученных (12-разрядных) чисел a, b сопоставим число $a*b$, имеющее в i–м разряде 0, если цифры a, b в i–м разряде совпадают, и имеющее в i–м разряде 1, если цифры a, b в i–м разряде не совпадают.

Построим граф Г, соединив часть точек ребрами по следующему правилу: точки с номерами a, b *не соединяются*, если $a * b$

имеет поровну (по 6) нулей и единиц, и *соединяются* во всех остальных случаях.

a) Сколько вершин имеет максимальный полный подграф графа Г?

b) На какое *минимальное* число полных подграфов можно разбить граф Г?

B. Обобщите задачу A на случай 2^{4k-2} точек.

C. Обобщите задачу A на случай 2^{4k} точек (в этом случае при построении графа Г точки с номерами a, b *не соединяются*, если $a * b$ имеет *почти поровну* нулей и единиц ($k+2$ одних и k других), и *соединяются*, если число нулей и единиц в $a * b$ различается больше, чем на 2).

23. Гипотезу Борсука можно сформулировать следующим образом:

Обозначим через $f(d)$ минимальное из таких чисел m, что любое ограниченное множество в d—мерном пространстве можно разбить на m частей меньшего диаметра. Тогда $f(d) = d + 1$.

В [2] получена оценка $f(d) \geqslant (1.2)^{\sqrt{d}}$. Как на самом деле растет $f(d)$ с ростом d?

Список литературы

[1] Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц. // Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука. 1965.

[2] Kahn J., Kalai G. // Bull. AMS (N.S.) 1993. V.29. N.1. P.60-62.

[3] Nilli A. // Contemp. Math. 1994. V.178. P.209-210.

[4] Райгородский А. // УМН. 1997. Т.52. Вып.6. С.181-182.

[5] Гервер М. Л. О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры // Математическое просвещение. Сер. 3, №3. С. 168–183.

Задача 4. Парабола как окружность

Определения

Окружность — множество точек плоскости, равноудаленных от данной (*центра* окружности). *Парабола* — множество точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от данной точки (*фокуса* параболы) и данной прямой (*директрисы* параболы). Прямая, проходящая через фокус перпендикулярно директрисе, является осью симметрии параболы и называется *осью* параболы.

Выберем декартову систему координат Oxy с осью Ox параллельной директрисе параболы и осью Oy параллельной оси параболы. Тогда парабола задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, b, c — некоторые числа, т. е. является графиком квадратного трехчлена. Прямая $y = kx + r$ либо пересекает параболу в двух точках, либо пересекает в одной точке, либо не пересекает параболу. Если имеет место второй случай, прямая называется *касательной* к параболе в точке. Можно дать геометрическое определение касательной к параболе. Пусть X — точка на параболе, F — фокус параболы, D — основание перпендикуляра, опущенного из X на директрису. Касательная к параболе в точке X будет биссектрисой угла FXD.

Геометрические наблюдения

Докажите следующие утверждения.

1. а) Прямая пересекает две концентрические окружности в точках A, B, B', A'. Точки расположены на прямой в указанном порядке. (См. рис. 1а.) Тогда $AB = B'A'$.

б) Прямая пересекает две параболы, совмещающиеся сдвигом вдоль их общей оси, в точках A, B, B', A'. Точки расположены на прямой в указанном порядке. (См. рис. 1б.) Тогда $AB = B'A'$.

2. а) Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.

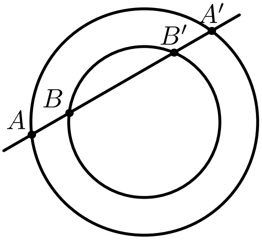


Рис. 1а

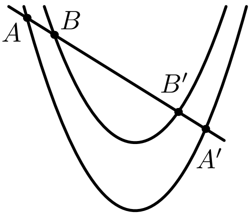


Рис. 1б

б) Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.

3. а) Фигура C_M ограничена дугой окружности C и касательными к C, проведенными из точки M. (См. рис. 3а.) Площадь C_M одинакова для всех точек M, лежащих на окружности, концентрической C.

б) Фигура P_M ограничена параболой P и касательными к P, проведенными из точки M. (См. рис. 3б.) Площадь P_M одинакова для всех точек M, лежащих на параболе, полученной из P параллельным переносом вдоль оси.

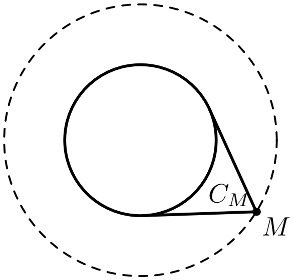


Рис. 3а

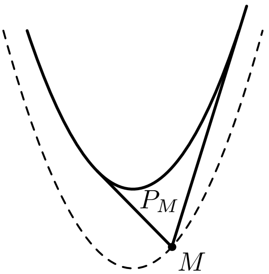


Рис. 3б

4. а) Возьмём точки A и B вне окружности. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей окружность в точках M, N, построим окружность, описанную вокруг BNM. Либо все эти окружности имеют помимо B ещё одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

б) Возьмем точки A и B вне параболы. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей параболу в точках M, N, построим параболу с осью, параллельной оси исходной параболы и проходящую через B, N, M. Либо все эти параболы имеют помимо B ещё одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

5. а) **(Теорема Фейербаха.)** Проведём к окружности три касательные, через середины сторон образованного ими треугольника проведем вторую окружность. Она будет касаться первой.

б) Проведём к параболе три касательные, на серединах сторон образованного ими треугольника построим параболу с осью, параллельной оси первой параболы. Она будет касаться первой параболы.

6. а) На сторонах треугольника ABC (или на их продолжениях) отмечены точки, не совпадающие с вершинами треугольника: A' на BC, B' на AC, C' на AB. Точка C'' — вторая точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников $AB'C'$ и $A'BC'$. Тогда и окружность, описанная вокруг треугольника $A'B'C$, проходит через C''.

б) На сторонах треугольника ABC (или на их продолжениях) отмечены точки, не совпадающие с вершинами треугольника: A' на BC, B' на AC, C' на AB. Пусть через каждую тройку точек A, B', C'; A', B, C'; A', B', C проведены параболы с параллельными осями. Если первые две из них пересекаются в точке C'', отличной от C', то и третья парабола проходит через C''.

7. Попытайтесь понять, что общего в приведенных выше задачах. Найдите примеры, аналогичные задачам 1–6, и докажите соответствующие утверждения.

8*. Опишите наблюдаемое явление, т. е. сформулируйте как можно более широкий класс теорем, которые остаются верными после переформулировок, аналогичных тем, что сделаны в задачах 1–6 («парабола» вместо «окружность», «параболы, совмещающиеся параллельным переносом вдоль общей оси» вместо «концентрические окружности» и т. д.)

9.** Объясните наблюдаемое явление, т. е. докажите, что истинность теорем об окружностях, которые являются ответом в задаче 8, влечет истинность аналогов этих теорем о параболах.

Аффинные свойства

Аффинные преобразования задаются в координатах линейными выражениями. Это означает, что координаты $(x';y')$ образа точки $(x;y)$ при аффинном преобразовании равны

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' & = & a_{21}x + a_{22}y + y_0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Аффинная инвариантность некоторого условия означает, что оно не нарушается при аффинных преобразованиях плоскости. Аффинные преобразования переводят прямые в прямые; сохраняют касательные; отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых; пропорционально изменяют площади всех фигур.

Замечание. Аффинное преобразование переводит окружность в *эллипс*, поэтому окружность нельзя определить аффинно-инвариантным образом.

Будем рассматривать теоремы такого вида: для конфигурации точек, прямых и некоторых кривых, описанной *аффинно-инвариантными* условиями, утверждается выполнение некоторых *аффинно-инвариантных* утверждений о точках, прямых и кривых этой конфигурации. Назовем эти теоремы аффинными свойствами конфигураций.

Все кривые в условиях интересующих нас теорем будут либо окружностями (и тогда такую теорему будем называть евклидовой), либо параболами с параллельными осями (такую теорему будем называть параболической).

Гипотеза 1. Из справедливости евклидовой теоремы об аффинном свойстве некоторой конфигурации следует справедливость параболической теоремы для этой конфигурации.

10. Опровергните гипотезу 1.

В параболическом случае имеется особое семейство прямых, параллельных осям парабол. Будем считать конфигурацию невырожденной, если в конфигурации нет прямых из особого семейства и ни одна пара точек из конфигурации не лежит на прямой из особого семейства.

Гипотеза 2. Из справедливости евклидовой теоремы об аффинном свойстве некоторой конфигурации следует справедливость параболической теоремы для этой конфигурации в предположении, что она — неособая.

11.** Докажите или опровергните гипотезу 2.

12. Приведите пример аффинного свойства (-в), справедливого в параболическом случае для неособых конфигураций, но неверного (-ых) в евклидовом случае.

Дополнительные примеры

13. Дайте аффинное определение биссектрисы угла, докажите или опровергните теорему о пересечении биссектрис треугольника в параболическом случае.

14. (*Ф. Петров, С. Тихомиров*) Дайте аффинное определение ортогональности двух прямых, докажите или опровергните теорему о пересечении высот треугольника в параболическом случае.

15. а) На сторонах AB; BC; CD; DA четырехугольника $ABCD$ отмечены точки A_B, B_A; B_C, C_B; C_D, D_C; D_A, A_D соответственно. (См. рис. на след. странице.) Если в четырехугольники, образованные прямыми

$$\begin{array}{ll} AB, AD, A_DB_C, A_BD_C; & AB, B_AC_D, A_DB_C, BC; \\ BC, C_BD_A, B_AC_D, CD; & CD, D_CA_B, C_BD_A, DA; \\ A_BD_C, D_AC_B, C_DB_A, B_CA_D; & \end{array}$$

можно вписать окружности, то и в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) О восьми прямых l_1, l_2, l_3, l_4, l'_1, l'_2, l'_3, l'_4, находящихся в общем положении, известно, что каждая из четверок прямых

$$l_1, l_2, l'_1, l'_2;\ l_1, l_2, l'_3, l'_4;\ l_3, l_4, l'_1, l'_2;\ l_3, l_4, l'_3, l'_4;\ l_2, l_3, l'_2, l'_3;$$

касается некоторой параболы с осью, параллельной данной прямой l (см. рисунок). Тогда и прямые l_1, l_4, l'_1, l'_4 касаются некоторой параболы с осью, параллельной l.

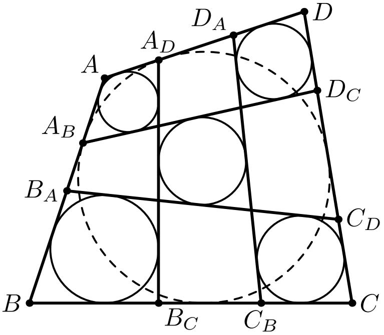


Рис. 15а

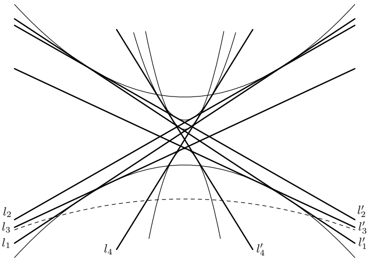


Рис. 15б

16*. Останется ли верным утверждение 15б), если заменить параболы (графики квадратных трехчленов) на графики дробно-линейных функций (гиперболы)?

17. (*Ф. Петров, С. Тихомиров*) Рассмотрите такую теорему: даны три окружности; к каждой паре проведены внешние касательные, тогда точки пересечения этих пар касательных лежат на одной прямой.

Является ли эта теорема аффинной? Верен ли её параболический аналог?

Не аффинные аналоги

18. (Теорема о произведении длин секущих) а) Даны парабола и точка A вне неё. Через A проведена прямая, пересекающая параболу. Докажите, что произведение проекций длин секущих на директрису параболы не зависит от выбора прямой.

б) Можно ли сформулировать эту теорему как аффинное свойство?

19. Придумайте определение равенства углов для «параболической» геометрии так, чтобы оно было согласовано с аффинным определением биссектрисы.

Существуют ли параболические многоугольники с равными углами?

20. (*А. Гоголев*) а) Докажите теорему Кези (обобщённая теорема Птолемея): назовем расстоянием между окружностями длину отрезка общей внешней касательной, обозначать его будем $d(\omega_1, \omega_2)$. Тогда для четырех окружностей есть общая касающаяся их окружность в том, и только том случае, когда выполнено равенство

$$d(\omega_2, \omega_4)d(\omega_3, \omega_1) = d(\omega_2, \omega_1)d(\omega_3, \omega_4) + d(\omega_2, \omega_3)d(\omega_1, \omega_4).$$

б) Верен ли параболический аналог теоремы Кези? (Вместо расстояния будем брать длину проекции общей касательной на директрису.)

Задача 5. Ускорение сходимости рядов

1. Вычислить суммы:

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

в) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

г) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

д) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$.

2. Ускорить сходимость ряда $\sum\frac{1}{n^2}$, сведя его:

а) к ряду, члены которого убывают как n^{-3};

б) к ряду, члены которого убывают как n^{-4}.

Указание. Использовать формулу $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}$.

3. Ускорить сходимость ряда $\sum\frac{1}{n^3}$.

Мы используем ставшее стандартным обозначение для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}.$$

Читателю может быть привычнее обозначение C_n^k. В этом случае просим обратить особое внимание на порядок индексов.

4. Доказать $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$.

5. Доказать $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{5}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$.

6*. Доказать $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{36}{17}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$.

7. Ускорить сходимость комплексного ряда $\sum{}'\frac{1}{\omega^4}$, где штрих означает: что суммирование производится по $\omega = a + bi \neq 0$, a, b — целые.

8. Найти какую-нибудь аналогичную формулу для суммы обратных 6-х степеней (комплексных).

Задача 6. Округление сумм

Округление — это замена нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), целое число при округлении не меняется.

1. а) Докажите, что в равенстве $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ всегда можно округлить все слагаемые и сумму так, что равенство не нарушится.

б) Дан набор равенств для всех i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

$$s_{ij} = a_i + a_{i+1} + \dots + a_j.$$

Докажите, что можно округлить все a_k и все s_{ij} так, чтобы равенства не нарушились.

б$'$) В условиях пункта б) выберем произвольное число x_0 и построим числа $x_1 = x_0 + a_1$, $x_2 = x_1 + a_2$, …, $x_n = x_{n-1} + a_n$. Округлим $a_1, \dots, a_n$: округляем a_i до 0, если на полуинтервале $[x_{i-1}, x_i)$ нет целых точек, и до 1 в противном случае. Докажите, что тогда можно округлить и все s_{ij} так, чтобы равенства не нарушились.

б$''$) Докажите, что любое округление в пункте б) можно осуществить с помощью алгоритма из пункта б$'$), выбрав подходящее x_0.

Пусть в некотором конечном множестве переменных выделены несколько подмножеств, и для каждого подмножества S_i выписано равенство вида

$$s_i = x(S_i) = \sum_{x \in S_i} x.$$

Назовём такую структуру *округляемой*, если при любых значениях переменных можно округлить все эти значения и соответствующие суммы так, чтобы равенства не нарушились.

1. в) Верно ли, что любую структуру можно округлить?

2. В вершинах многоугольника выписаны числа, а на каждой стороне — сумма чисел в ее концах.

Является ли такая структура округляемой для а) квадрата; б) 5-угольника; в) n-угольника?

г) Будет ли округляемой структура n-угольника, если кроме сумм на сторонах выписана еще сумма во всех вершинах?

3. Р-структура многогранника. В вершинах многогранника выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах.

Покажите, что Р-структура не округляема а) для тетраэдра и б) для октаэдра, но округляема в) для куба.

4. Р-структура графа. В вершинах графа выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах.

а) Докажите, что Р-структура графа округляема тогда и только тогда, когда вершины графа можно покрасить в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разного цвета (такой граф называется двудольным).

б) Докажите, что Р-структура выпуклого многогранника округляема тогда и только тогда, когда все грани многогранника имеют чётное число вершин.

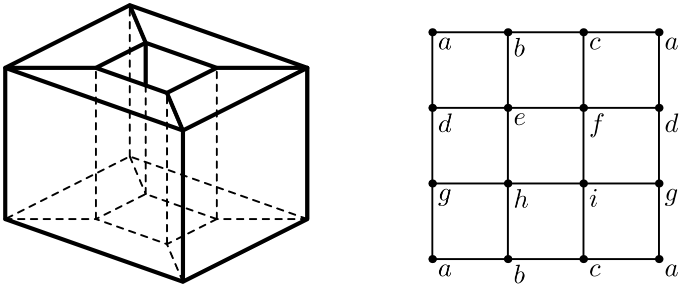
в) Добавим к округляемой Р-структуре графа сумму всех его элементов. Может ли при этом получиться не округляемая структура?

5. Г-структура многогранника. В вершинах многогранника выписаны числа, а на каждой грани — сумма чисел в её вершинах.

Является ли Г-структура округляемой а) для тетраэдра; б) октаэдра; в) куба; г) n-угольной пирамиды без нижней грани?

д) Склеим из квадрата 4×4 тор с 16 гранями, см. рис. 1а). Докажите, что его Г-структура не округляема.

Другими словами, нужно рассмотреть решётку 4×4, у которой отождествлены противоположные стороны. В узлах решётки выписаны числа (на рис. 1б отмечено, какие из них стали одинаковыми при склейке), а в каждой клетке написана суммы чисел,



а) б)

Рис. 1.

стоящих в узлах, прилегающих к этой клетке. Например, в верхней левой клетке написана сумма $a + b + d + e$.

е) Докажите, что Г-структура любого выпуклого многогранника не округляема.

ж) Существует ли многогранник с округляемой Г-структурой?

6. Прямоугольные таблицы.

а) В прямоугольной таблице выписаны числа, а для каждой строки и столбца — их суммы. Докажите, что такая структура округляема.

б) Докажите, что если к суммам строк и столбцов таблицы добавить сумму всех ее элементов, структура останется округляемой.

в) В прямоугольной таблице $m \times n$ выписаны числа, а для каждого квадрата 2×2 — их суммы. Округляема ли эта структура?

г) В трехмерной прямоугольной таблице $l \times m \times n$ выписаны числа, а для каждого одномерного ряда $l \times 1 \times 1$, $1 \times m \times 1$ и $1 \times 1 \times n$ — их суммы. Округляема ли эта структура?

7. Двойственная структура. Пусть у нас есть некоторая структура S. Составим для каждой её переменной список тех подмножеств структуры, которым она принадлежит. Построим теперь новую, двойственную к S структуру: для каждого старого подмножества выпишем новую переменную, а для каждой старой переменной — список новых переменных, соответствующий списку подмножеств.

Пример. Структуре $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $s_2 = x_2 + x_3 + x_4$ соответствует двойственная структура $S_1 = y_1$, $S_2 = y_1 + y_2$, $S_3 = y_1 + y_2$, $S_4 = y_2$.

а) Покажите, что структуры пунктов 2г и 5г — двойственны.

б) Впишем по одной переменной в клетки квадрата $n \times n$, расположенные выше главной диагонали; выпишем суммы для каждого прямоугольника, чья правая верхняя клетка совпадает с правой верхней клеткой квадрата, а левая нижняя лежит на главной диагонали. Проверьте, что эта структура двойственна к структуре пункта 1б. Округляема ли она?

в) Покажите, что Р-структура двудольного графа двойственна подмножеству двумерной таблицы (пункт 6а).

г*) Покажите, что структура, двойственная к округляемой, тоже округляема.

8. Свобода первого округления. Пусть среди заданных значений переменных округляемой структуры выбрано одно не целое. Тогда можно округлить выбранное значение как с недостатком, так и с избытком — в обоих случаях округление структуры доводится до конца.

а) Проверьте принцип свободы первого округления для округляемых структур из предыдущих пунктов.

б*) верен ли этот принцип в общем случае?

9. Необходимое условие округляемости. Назовем нечётным циклом выписанные по кругу нечётное число (большее двух) переменных структуры, где между любыми двумя соседними переменными вписано подмножество структуры, причем каждая переменная принадлежит только двум соседним с нею подмножествам из числа вписанных.

а) Докажите, что если структура округляема, то в ней нет нечётных циклов.

б*) Верно ли, что всякая структура без нечётных циклов округляема?

10. Матрица структуры и критерий округляемости.

Рассмотрим матрицу, чьи строки соответствуют суммам, а столбцы — переменным. Если переменная входит в сумму, то на пересечение соответствующей строки и столбца ставим 1, иначе — 0.

а) Необходимое условие. В матрице округляемой структуры все миноры по модулю не больше 1.

б) Докажите, что это условие является достаточным.

Результаты участников

Обобщённые полимино

	1		2	3		4		5		6			7	8	9			
	a	b		a	b	a	b	a	b	a	b	c			a	b	c	d
А. Евсеев	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Ю. Лифшиц	+	+	+	+	+			+	∓	+	+	+	+	+	+	±	+	+
А. Рыжков	+	+						+			$\underset{\cdot}{-}$		±					
Е. Зинин, Д. Крамаренко, И. Муханов	+	+	+	+	+	+	$\underset{\cdot}{-}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
К. Месарош	+	+		−	−			+		+		$\underset{\cdot}{-}$	+					
Р. Рачков	+	+						+		+	+	+						
В. Немытов	+	+	+					+										
А. Медведовский, Р. Мирочник, З. Джунич, В. Павлович, Н. Пенев	+	+	+	$+_{\cdot}$	∓	$\frac{+}{2}$	∓	+	∓	+		$\underset{\cdot}{-}$	+	∓	+			
И. Прокушкин, А. Халявин	+	+	+	+														

Одномерная динамика и теорема Шарковского

	1		2			3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	a	b	a	b	c											
А. Евсеев	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	
З. Каблучко, А. Примак, М. Майданский	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
И. Петракиев	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
В. Мартьянов, М. Кузнецов, А. Колесников, А. Жмогинов	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
А. Поярков, А. Бурцев, Е. Мещеряков	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	
А. Лузгарёв, И. Певзнер, И. Прокушин, В. Шадрин, А. Халявин	+	+	+	+	+	+	+	+	+.		+	+	+.	+	+	
J. C. Kinne, J. H. Sylvester, G. Paperin, W. Regen, W. Schlackow, В. Жиляев	+	+	+	+	+	∓	+				+	+	+	+	+	
И. Конев	+	+	+	+	+		+	+			+					
В. Лазич	+	+	+	+	+						+	$\frac{+}{2}$				
А. Дмитриев	+	+	+	+		∓	∓									

	3.*												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
А. Евсеев	+	+	+		∓			+	∓				
З. Каблучко, А. Примак, М. Майданский	+	+	+	+	+			+	+	+	+		
И. Петракиев	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+		
В. Мартьянов, М. Кузнецов, А. Колесников, А. Жмогинов	+	+	+	+				+		+	+		
А. Поярков, А. Бурцев, Е. Мещеряков	+	+	+	+	+			+		+	+	+	
А. Лузгарёв, И. Певзнер, И. Прокушин, В. Шадрин, А. Халявин	+	+	+	+	+			+		+			
J. C. Kinne, J. H. Sylvester, G. Paperin, W. Regen, W. Schlackow, В. Жиляев	+	+		+									
В. Лазич	+	+											

	4.1	4.2a	4.2b	4.3a	4.3b	4.4	4.5	4.6
З. Каблучко, А. Примак, М. Майданский	+	+		+	+	+		
И. Петракиев	+			+	+			
В. Мартьянов, М. Кузнецов, А. Колесников, А. Жмогинов	+	+		+	+			
А. Поярков, А. Бурцев, Е. Мещеряков	+	+	+		+	+		
А. Лузгарёв, И. Певзнер, И. Прокушин, В. Шадрин, А. Халявин	+							
А. Дмитриев				$\frac{+}{2}$				

О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры

	1	2		3			4	5	6	7			8	9	10
		a	b	a	b	c				a	b	c			
А. Айзенбурд, М. Браверман, Д. Гуревич	+	+	+	+	+	+	+	+	+.	+	+	+	+	+	+
Р. Батршин, М. Давыдов	+	+	+	+		+	+	+	+!	+	+	+	+	+	+
P. Sundberg	+	+	+	+	∓!	+	+	$\frac{+}{2}$	−	+	+	+	+	+	+
А. Бейлин, А. Гайфуллин	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Д. Ершов	+	+	+	+		+	+			+	+	+	+	+	+
В. Лазич, К. Месарош	+	+	+	+		+	+	−	−	+	+	+	+	+	+
В. Исаев		+	+	−		+	+	∓							
Е. Зинин, Д. Крамаренко, И. Муханов		+	+	+		+	+	∓		+	+	+	+	+	+

	11	12	13	14	15	16	17	18	19						20	21
									a	b	c	d	e	f		
А. Айзенбурд, М. Браверман, Д. Гуревич	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+
Р. Батршин, М. Давыдов	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
P. Sundberg	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
А. Бейлин, А. Гайфуллин	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Д. Ершов	+	+	+	+	+				+	+	+					
В. Лазич, К. Месарош	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		$\underset{\cdot}{-}$
В. Исаев	+															
Е. Зинин, Д. Крамаренко, И. Муханов	+	+	+	+			+		+	+	+					

Парабола как окружность

	1		2		3		4		5		6		7	8	9
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b			
С. Тихомиров, Ф. Петров	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$12\left\|\frac{6}{4}\right.$	A	wA$\frac{+}{2}$
А. Лузгарёв, А. Халявин, И. Певзнер, И. Прокушкин, В. Шадрин	+	+	+	+	+	+	+								
А. Лузгарёв, И. Прокушкин	См. рез. пред. команды								+						
А. Арсютов, А. Игнатьев, А. Калюжный	+	+	+	$\frac{+}{2}$	+		−		$\underset{\cdot}{-}$		+				
П. Пилявский	+	+	+	+	+	+	+	+							
А. Гоголев	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+		$8\left\|\frac{7}{7}\right.$		
А. Дмитревская, Е. Саженкова	+	+	+	+	+				+	+	+				
G. Paperin, W. Regen, W. Schlackow	+	+			+	+									

	10	11	12	13	14	15		16	17	18		19	20	
						a	b			a	b		a	b
С. Тихомиров, Ф. Петров	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
А. Арсютов, А. Игнатьев, А. Калюжный	−								±	+	−			
А. Гоголев	∓			±	±	+			±	+	−			
А. Дмитревская, Е. Саженкова	−								±	+	∓			

Ускорение сходимости рядов

	1					2		3	4	5	6	7	8
	a	b	c	d	e	a	b						
Д. Васильев, М. Давыдов, Р. Батршин	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
Р. Рачков		+	$\underset{\cdot}{+}$	+	+	$\underset{\cdot}{+}$	+	+	+ совместно				
В. Немытов	+	+	+	$\underset{\cdot}{+}$	+	+	$\underset{\cdot}{+}$	+					
Н. Новгород	+	+	+!	$\underset{\cdot}{+}$	$\underset{\cdot}{+}$	+	±	+					
Д. Крамаренко, И. Муханов, Е. Зинин	+	$\underset{\text{mod 1e}}{+}$	$\underset{\cdot}{+}$	$\underset{\text{mod 1e}}{+}$	±	+	$\underset{\cdot}{+}$	$\underset{\cdot}{+}$					
Г. Черкаев	+	+	+	+	$\underset{\cdot}{+}$	+	+	+	$\underset{\cdot}{+}$				
А. Поярков, А. Бурцев, Е. Мещеряков	+	+	±	+	+	±	∓	∓				−	
Л. Афанасьев	+	+	±	$\underset{\cdot}{+}$	$\frac{+}{2}$	+	+	∓	±			±	
А. Матвеев, Б. Зиатдинов	$\underset{\cdot}{+}$	+	+	$\underset{\text{mod 1e}}{+}$	$\frac{+}{2}$	+	+	+	∓			+	
К. Баяндин	+	+	+	$\underset{\text{mod 1e}}{+}$	+	+	−	−					
Е. Филатов		+	+	+	∓	+	+	±					−
И. Конев		+	+	+		+	+	+					
А. Забирник, К. Бойко, Е. Горшков	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			

Округление сумм

	1					2				3			4		
	a	b	b′	b″	c	a	b	c	d	a	b	c	a	b	c
Е. Красненко	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+!	+
Д. Васильев, Р. Батршин, М. Давыдов	+		+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	±	+
И. Волженин	+		+			+	+	+		+	+	+	+		+
Л. Полякова	+		+			+	+	+		+	+	+	+		+
М. Кудрин	+		+			+	+	+		+	+	+	+	±	+
Б. Зиатдинов	+									+	+	+	+	±	+
К. Баяндин	+		+			+	+	+	+	+	+	+	+	+!	+
И. Певзнер & Co	+		+	+		+	+	+		+	+	+	+	+!	+

	5							6				7				8		9		10	
	a	b	c	d	e	f	g	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	a	b	a	b
Е. Красненко	+	+	+		+	+				$\frac{+}{2}$	+	+	$\frac{+}{}$	+				+	+		
Д. Васильев, Р. Батршин, М. Давыдов	+	+	+		+	+	$\underset{\cdot}{-}$				±	+	$\frac{}{\mp}$	+		±		+			
И. Волженин	+											−									
Л. Полякова	+	+	+		+	$\underset{\cdot}{-}$						+		+				+			
М. Кудрин	+	+	+		+					∓	±	+	$\frac{+}{}$	−				+			
Б. Зиатдинов	+	+	+		+	∓				∓		+	−	±				+			
К. Баяндин	+	+	+		+	+	+			±	+	+	$\frac{+}{}$	+				+	−		
И. Певзнер & Co	+	+	+	+	+	+	$\underset{\cdot}{-}$			+	+	+	$\frac{+}{}$	+		−	−	+	+		

Список дипломантов конференции

Рами Айзенбуд, ученик 10 класса школы Shevah-Mofet г. Тель-Авив, награжден дипломом конференции ***за существенное продвижение в задаче о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с Д. Гуревичем и М. Браверманом).

Алексей Арсютов, ученик 11 класса школы-гимназии 34 г. Чебоксары, награжден дипломом конференции ***за успехи в решении задачи «Парабола как окружность»*** (совместно с А. Игнатьевым и А. Калюжным).

Лаврентий Афанасьев, ученик 11 класса школы №14 г. Жуковский, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для комплексного ряда обратных четвертых степеней***.

Руслан Батршин, ученик 11 класса Львовского Физико-математического лицея г. Львова, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных кубов*** (совместно с Д. Васильевым и М. Давыдовым) и за новое доказательство гипотезы Борсука в $\mathbf{R}^3$ (совместно с М. Давыдовым).

Константин Баяндин, ученик 11 класса школы №146 г. Перми, награжден дипломом конференции ***за успешное округление грань-структур выпуклых и невыпуклых многогранников***.

Андрей Бейлин, ученик 11 класса школы №58 г. Ростова-на-Дону, награжден дипломом конференции ***за решение всех задач о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с А. Гайфуллиным).

Константин Бойко, ученик 11 класса физико-математического лицея №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных кубов*** (совместно с Е. Горшковым и А. Забирником).

Марк Браверман, ученик 10 класса школы Ort Kramim г. Кармиэл, награжден дипломом конференции ***за существенное продвижение в задаче о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с Д. Гуревичем и Р. Айзенбудом).

Александр Бурцев, ученик 10 класса Физико-математической школы №64 г. Омска, награжден дипломом конференции ***за доказательство плотности множества периодических орбит транзитивных одномерных динамических систем, за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, а также за глубокое исследование квадратичного семейства*** (совместно с Е. Мещеряковым и А. Поярковым).

Денис Васильев, ученик 10 класса Львовского Физико-математического лицея г. Львова, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных кубов*** (совместно с Р. Батршиным и М. Давыдовым).

Илья Волженин, ученик 11 класса школы №42 г. Барнаула, награжден дипломом конференции ***за успехи в задаче о округляемых структурах.***

Александр Гайфуллин, ученик 10 класса школы №10 г. Жуковский, награжден дипломом конференции ***за решение всех задач о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с А. Бейлиным).

Андрей Гоголев, ученик 10 класса школы №171 г. Киева, награжден дипломом конференции ***за подробное исследование аналогий между окружностями и параболами.***

Евгений Горшков, ученик 11 класса физико-математического лицея №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных кубов*** (совместно с К. Бойко и А. Забирником).

Дмитрий Гуревич, ученик 12 класса школы Handesaim г. Тель-Авив, награжден дипломом конференции ***за существенное продвижение в задаче о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с Р. Айзенбудом и М. Браверманом).

Максим Давыдов, ученик 11 класса Львовского Физико-математического лицея г. Львова, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных кубов*** (совместно с Р. Батршиным и Д. Васильевым) ***и за новое доказательство гипотезы Борсука в*** $\mathbf{R}^3$ (совместно с Р. Батршиным).

Зоран Джунич, ученик 12 класса гимназии «Светозар Маркович» г. Ниша, награжден дипломом конференции ***за значительные плодотворные усилия, приложенные к задаче об обобщённых полимино*** (совместно с А. Медведовским, Р. Мирочником, В. Павлович и Н. Пеневым).

Анна Дмитревская, ученица 10 класса школы №57 г. Москвы, награждена дипломом конференции ***за успехи в решении задачи «Парабола как окружность»*** (совместно с Е. Саженковой).

Андрей Дмитриев, ученик 10 класса Академического колледжа г. Казани, награжден дипломом конференции ***за продвижение в исследовании квадратичного семейства и орбит tent map.***

Антон Евсеев, ученик 11 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции ***за глубокое и подробное исследование свойств обобщённых полимино.***

Денис Ершов, ученик 11 класса школы №2 г. Москвы, награжден дипломом конференции ***за продвижение в задаче о разбиении множеств на части меньшего диаметра.***

Владимир Жиляев, ученик 11 класса гимназии №1543 г. Москвы, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map и продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с В. Регеном, В. Шлячковым, Я. Х. Сильвестром, Г. Папериным и Я. К. Кинне).

Андрей Жмогинов, ученик 11 класса Физико-математического лицея №40 г. Нижнего Новгорода, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за глубокое исследование квадратичного семейства, а также за продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с А. Колесниковым, М. Кузнецовым и В. Мартьяновым).

Алексей Забирник, ученик 11 класса физико-математического лицея №27 г. Харькова, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных кубов*** (совместно с К. Бойко и Е. Горшковым).

Борис Зиатдинов, ученик 11 класса Белорецкой компьютерной школы г. Белорецка, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для комплексного ряда обратных четвертых степеней*** (совместно с А. Матвеевым).

Евгений Зинин, ученик 10 класса школы №87 г. Краснодара, награжден дипломом конференции ***за глубокое и подробное исследование свойств обобщённых полимино*** (совместно с А. Крамаренко и И. Мухановым).

Алексей Игнатьев, ученик 11 класса школы-гимназии 34 г. Чебоксары, награжден дипломом конференции ***за успехи в решении задачи «Парабола как окружность»*** (совместно с А. Арсютовым и А. Калюжным).

Вадим Исаев, ученик 9 класса школы №42 г. Барнаула, награжден дипломом конференции ***за участие в решении задачи о разбиении множеств на части меньшего диаметра.***

Захар Каблучко, ученик класса выпускника физико-математической гимназии №17 г. Винницы, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за существенное продвижение в доказательстве существования порядка Шарковского на нечетных числах, а также за глубокое исследование квадратичного семейства*** (совместно с М. Майданским и А. Примаком).

Андрей Калюжный, ученик 11 класса школы-гимназии 34 г. Чебоксары, награжден дипломом конференции ***за успехи в решении задачи «Парабола как окружность»*** (совместно с А. Арсютовым и А. Игнатьевым).

Ян Кристоф Кинне (Jan Christoph Kinne), ученик 12 класса Sophie-Barat-Schule г. Гамбурга, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map и продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с В. Шлячковым, В. Регеном, Я. Х. Сильвестром, Г. Папериным и В. Жиляевым).

Андрей Колесников, ученик 10 класса педагогической гимназии г. Нижнего Новгорода, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за глубокое исследование квадратичного семейства, а также за продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с А. Жмогиновым, М. Кузнецовым и В. Марьяновым).

Илья Конев, ученик 11 класса Вологодского государственного естественно-математического лицея г. Вологды, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map.***

Денис Крамаренко, ученик 10 класса школы №42 г. Краснодара, награжден дипломом конференции ***за глубокое и подробное исследование свойств обобщённых полимино*** (совместно с Е. Зининым и И. Мухановым).

Екатерина Красненко, ученица 10 класса Физико-математической школы №64 г. Омска, награждена дипломом конференции ***за глубокое исследование округляемых структур и понимание роли нечетных циклов.***

Максим Кудрин, ученик 10 класса школы №146 г. Перми, награжден дипломом конференции ***за содержательное продвижение в задаче об округляемых структурах.***

Максим Кузнецов, ученик 11 класса Физико-математического лицея №40 г. Нижнего Новгорода, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за глубокое исследование квадратичного семейства, а также за продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с А. Жмогиновым, А. Колесниковым и В. Мартьяновым).

Владимир Лазич, ученик 10 класса Математическая гимназия г. Суботицы, награжден дипломом конференции ***за успехи в решении задачи о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с К. Месарош).

Юрий Лифшиц, ученик 10 класса Физико-математического лицея №239 г. Санкт-Петербурга, награжден дипломом конференции ***за глубокое исследование некоторых свойств обобщённых полимино, особенно на конечных досках.***

Александр Лузгарёв, ученик 11 класса Физико-математического лицея г. Кирова, награжден дипломом конференции ***за глубокое продвижение в доказательстве теоремы Шарковского и полное исследование орбит tent map*** (совместно с И. Певзнером, И. Прокушкиным, А. Халявиным, В. Шадриным).

Максим Майданский, ученик 11 класса школы №178 г. Киева, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за существенное продвижение в доказательстве существования порядка Шарковского на нечетных числах, а также за глубокое исследование квадратичного семейства*** (совместно с З. Каблучко и А. Примаком).

Владимир Мартьянов, ученик 11 класса Физико-математического лицея №40 г. Нижнего Новгорода, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за глубокое исследование квадратичного семейства, а также за продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с А. Колесниковым, А. Жмогиновым и М. Кузнецовым).

Артур Матвеев, ученик 11 класса Белорецкой компьютерной школы г. Белорецка, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для комплексного ряда обратных четвертых степеней*** (совместно с Б. Зиатдиновым).

Александр Медведовский, ученик 12 класса High school affiliated with Hebrew University г. Иерусалим, награжден дипломом конференции ***за значительные плодотворные усилия, приложенные к задаче об обобщённых полимино*** (совместно с Р. Мирочником).

Карола Месарош, ученица 10 класса Математическая гимназия г. Суботицы, награждена дипломом конференции ***за успехи в решении задачи о разбиении множеств на части меньшего диаметра*** (совместно с В. Лазичем).

Евгений Мещеряков, ученик 11 класса Физико-математической школы №64 г. Омска, награжден дипломом конференции ***за доказательство плотности множества периодических орбит транзитивных одномерных динамических систем, за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, а также за глубокое исследование квадратичного семейства*** (совместно с А. Бурцевым и А. Поярковым).

Роман Мирочник, ученик 11 класса school Shevah-Mofet г. Тель-Авив, награжден дипломом конференции ***за значительные плодотворные усилия, приложенные к задаче об обобщённых полимино*** (совместно с А. Медведовским).

Иван Муханов, ученик 10 класса Афипского технического лицея г. Краснодара, награжден дипломом конференции ***за глубокое и подробное исследование свойств обобщённых полимино*** (совместно с Е. Зининым и А. Крамаренко).

Виктор Немытов, ученик 10 класса школы №57 г. Москвы, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных квадратов*** (совместно с Р. Рачковым).

Весна Павлович, ученица 11 класса гимназии «Бора Стаанкович» г. Ниша, награждена дипломом конференции ***за значительные плодотворные усилия, приложенные к задаче об обобщённых полимино*** (совместно с З. Джуничем, А. Медведовским, Р. Мирочником и Н. Пеневым).

Григорий Паперин (Gregory Paperin), ученик 13 класса Gymnasium Tonndorf г. Гамбурга, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map и продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с В. Шлячковым, В. Регеном, Я. Х. Сильвестром, Я. К. Кинне и В. Жиляевым).

Игорь Певзнер, ученик 11 класса Физико-математического лицея г. Кирова, награжден дипломом конференции ***за глубокое продвижение в доказательстве теоремы Шарковского и полное исследование орбит tent map*** (совместно с А. Лузгаревым, И. Прокушкиным, А. Халявиным, В. Шадриным).

Фёдор Петров, ученик 11 класса Физико-математического лицея №239 г. Санкт-Петербурга, награжден дипломом конференции ***за наиболее полное исследование аналогий между окружностями и параболами*** (совместно с С. Тихомировым).

Павел Пилявский, ученик 11 класса школы-лицея №7 г. Винницы, награжден дипломом конференции ***за работу над задачей «Парабола как окружность»***.

Людмила Полякова, ученица 10 класса физико-математического лицея №27 г. Харькова, награждена дипломом конференции ***за содержательное продвижение в задаче об округляемых структурах***.

Алексей Поярков, ученик 10 класса многопрофильного лицея №2 г. Рыбинска, награжден дипломом конференции ***за доказательство плотности множества периодических орбит транзитивных одномерных динамических систем, за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, а также за глубокое исследование квадратичного семейства*** (совместно с А. Бурцевым и Е. Мещеряковым).

Андрей Примак, ученик 11 класса Украинского физико-математического лицея г. Киева, награжден дипломом конференции ***за конструкцию отображения, множество периодов которого есть множество степеней двойки, за существенное продвижение в доказательстве существования порядка Шарковского на нечетных числах, а также за глубокое исследование квадратичного семейства*** (совместно с З. Каблучко и М. Майданским).

Иван Прокушкин, ученик 11 класса Физико-математического лицея г. Кирова, награжден дипломом конференции ***за глубокое продвижение в доказательстве теоремы Шарковского и полное исследование орбит tent map*** (совместно с А. Лузгаревым, И. Певзнером, А. Халявиным, В. Шадриным).

Роман Рачков, ученик 11 класса политехнической гимназии г. Нижнего Тагила, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных квадратов*** (совместно с В. Немытовым), а также за значительные плодотворные усилия, приложенные к задаче об обобщённых полимино.

Вольфрам Реген (Wolfram Regen), ученик 11 класса Gelehrtenschule Johanneums г. Гамбурга, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map и продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с В. Шлячковым, Я. Х. Сильвестром, Г. Папериным, Я. К. Кинне и В. Жиляевым).

Александр Рыжков, ученик 11 класса школы №3 г. Луги, награжден дипломом конференции ***за успехи в задаче об обобщённых полимино***.

Елена Саженкова, ученица 11 класса школы №42 г. Барнаула, награждена дипломом конференции ***за успехи в решении задачи «Парабола как окружность»*** (совместно с А. Дмитревской).

Патрик Сандберг (Patrik Sundberg), ученик 12 класса Danderyds gymnasium г. Стокгольма, награжден дипломом конференции ***за существенное продвижение в задаче о разбиении множеств на части меньшего диаметра***.

Ян Хенрик Сильвестр (Jan Henrik Sylvester), ученик 12 класса Sophie-Barat-Schule г. Гамбурга, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map и продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с В. Шлячковым, В. Регеном, Г. Папериным, Я. К. Кинне и В. Жиляевым).

Сергей Тихомиров, ученик 10 класса Физико-математического лицея №239 г. Санкт-Петербурга, награжден дипломом конференции ***за наиболее полное исследование аналогий между окружностями и параболами*** (совместно с Ф. Петровым).

Евгений Филатов, ученик 11 класса школы-лицея №22 г. Иваново, награжден дипломом конференции ***за успехи в задаче об ускорении сходимости рядов***.

Андрей Халявин, ученик 8 класса Физико-математического лицея г. Кирова, награжден дипломом конференции ***за глубокое продвижение в доказательстве теоремы Шарковского и полное исследование орбит tent map*** (совместно с А. Лузгаревым, И. Певзнером, И. Прокушкиным, В. Шадриным).

Глеб Черкаев, ученик 11 класса Украинского физико-математического лицея г. Киева, награжден дипломом конференции ***за вывод формулы ускорения сходимости для суммы обратных квадратов***.

Владимир Шадрин, ученик 11 класса Физико-математического лицея г. Кирова, награжден дипломом конференции ***за глубокое продвижение в доказательстве теоремы Шарковского и полное исследование орбит tent map*** (совместно с А. Лузгаревым, И. Певзнером, И. Прокушкиным, А. Халявиным).

Всеволод Шлячков (Waldemar Schlackow), ученик 11 класса Wolddörfer Gymnazium г. Гамбурга, награжден дипломом конференции ***за исследование орбит tent map и продвижение в доказательстве теоремы Шарковского*** (совместно с В. Регеном, Я. Х. Сильвестром, Г. Папериным, Я. К. Кинне и В. Жиляевым).

Решения задач и комментарии

Задача 1.

1. а), б) Очевидно. Будем выкладывать полимино слева направо. Каждое следующее полимино должно покрывать самую левую непокрытую клетку.

2. Пусть данное домино имеет параметр k. Раскрасим прямоугольник в k^2 цветов так, чтобы клетки одного цвета образовывали решётку с шагом k, параллельную сторонам квадрата. Пронумеруем строки и столбцы по порядку. Рассмотрим цвета четырёх клеток, стоящих на пересечении 1-го и k-го столбцов и 1-й и k-й строки. Нетрудно проверить, что если ни одна из сторон прямоугольника не делится на $2k$, прямоугольник содержит нечётное число клеток одного из этих цветов.

3. а) Если параметры тримино имеют вид (na, nb), то полоска $\mathbb{P}$ представляется в виде объединения n «подполосок», состоящих из клеток исходной полоски взятых с шагом n. Каждое тримино, очевидно, расположено целиком в одной такой подполоске. Ясно, что возможность замощения исходной полоски тримино с параметрами (na, nb) равносильна возможности замощения подполоски теми же тримино, что в свою эквивалентно возможности замощения полоски $\mathbb{P}$ тримино с параметрами (a, b). Отсюда с очевидностью следует утверждение задачи.

б) Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — параметры данного полимино. Докажем, что все параметры a_i делятся на a_1. Пронумеруем клетки данной полоски числами от 1 до n слева направо. Заметим, что на полях 1, 2, ..., a_1 должны находиться крайние левые клетки (разных) полимино. Выложим эти полимино на полоску. Их объединение представляет собой несколько «сплошных кусков», в каждом из которых количество клеток делится на a_1. Рассмотрим самую левую из незаполненных клеток. Она должна быть накрыта крайней левой клеткой очередного полимино. Между первой и второй слева клетками этого полимино должно быть незаполненное пространство (так как между этими клетками расположено $a_1 - 1$ клеток). Эти клетки должны быть заполнены крайними левыми клетками других полимино. Выложим все эти полимино. Мы добавили на доску кратное a_1 количество полимино, лежащих подряд. По-прежнему все «сплошные куски» состоят из кратного a_1 числа клеток. Проводя дальнейшие выкладывания, мы когда-нибудь замостим всю полоску $1 \times n$.

Допустим, что какие-то из параметров a_i не делятся на a_1, пусть j — наименьший из номеров этих параметров. Заметим, что при каждом выкладывании число свободных клеток среди первых $a_1 + a_2 + \dots + a_j$ клеток полоски уменьшалось на кратное a_1 количество. Поскольку в конце вся полоска заполнена, а числа a_1, ..., a_{j-1} делятся на a_1, то и a_j делится на a_1. Полученное противоречие показывает, что все параметры делятся на a_1.

Без ограничения общности (см. пункт 3а) можно считать, что $a_1 = 1$.

Теперь изучим структуру нашего полимино более детально. Оно состоит из нескольких «кусков», разделенных между собой пустыми клетками. Каждый из таких кусков назовем *блоком*. Пусть самый левый блок имеет длину p (это значит, что $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = 1$, $a_p \neq 1$). Докажем, что длины всех блоков равны p. Рассмотрим опять крайнее левое полимино в нашей полоске. Самая левая не принадлежащая ему клетка имеет номер $p+1$. Она должна быть покрыта другим полимино, которое, естественно, получается из первого сдвигом на p вправо. Так как эти два полимино не пересекаются, то длины всех блоков исходного полимино не превосходят p. Допустим, что длина какого-то из блоков меньше p, рассмотрим самый левый из таких блоков в первом и втором полимино. Заметим, что между этими блоками есть несколько (меньше p) свободных клеток. Эти клетки невозможно будет покрыть, поскольку все блоки, расположенные левее, имеют длину p.

Итак, длины всех блоков нашего полимино делятся на p. Тогда нетрудно сообразить, что длины промежутков между блоками также делятся на p. Теперь мы имеем счастливую возможность сократить всё на p (что именно, читатель давно уже догадался).

4. а) Благодаря утверждению задачи 3а) мы можем считать, что a и b взаимно просты. Тогда среди чисел a, b и $a+b$ — ровно одно чётное. Чтобы не разбирать разные случаи, назовем его m.

Намотаем нашу полоску $\mathbb{P}$ по спирали на цилиндр так, чтобы отстоящие на m друг от друга клетки стали соседними по вертикали. Тогда данное тримино на этом цилиндре будет выглядеть как «вертикальная обычная доминошка плюс ещё одна клетка». Мы можем добавить к нашему тримино ещё одно (в противоположной ориентации), так что вместе они будут заполнять два вертикальных блока по три клетки. Следовательно, такими тримино можно полностью покрыть на цилиндре два вертикальных столбца. Заметим, что расстояние между этими столбцами по горизонтали взаимно просто с m. Поскольку m чётно, сдвигами этих пар столбцов можно покрыть весь цилиндр.

б) Решение жюри неизвестно.

5. а) Приведём один из возможных ответов. Для T_1 с параметрами (a, b) в качестве T_2 можно взять тримино с параметрами $(2a + b, 2a + b)$.

б) В силу результата задачи 3а), достаточно рассмотреть случай взаимно простых a и b. В этом случае $a - b$ должно делиться на 3.

Будем использовать конструкцию из задачи 4а). Рассмотрим цилиндр, в котором клетки, отстоящие на a вдоль полоски, оказываются соседними по вертикали. Рассмотрим произвольное тримино T_1. Оно выглядит как «вертикальная доминошка D_1 плюс ещё одна клетка K_1». Клетку, расположенную по вертикали сверху от K_1, назовём L_1. Заметим, что L_1 может быть покрыта единственным способом, а именно: её покрывает тримино, у которого L_1 — нижняя клетка доминошки. Рассмотрим эту доминошку D_2 (вместе с клеткой L_1 она образует вертикальный блок из трёх клеток) и оставшуюся клетку L_2. Клетку, расположенную сверху от L_2 также можно покрыть единственным способом … и т. д. Любой вертикальный столбец нашего цилиндра окажется, таким образом, разбитым на вертикальные блоки по 3 клетки. Рассмотрим тогда тримино $\{D_m, L_m\}$ (с наименьшим $m > 1$), у которого клетка L_m расположена в том же столбце, что и L_1. Расстояние по вертикали между клетками L_1 и L_m должно делиться на 3. Заметим, что расстояние вдоль полоски между клетками L_i и L_{i+1} равно $2a+b$. Поскольку a и b взаимно просты, $m = a+1$. Тогда расстояние вдоль полоски между L_1 и L_m равно $a(2a+b)$, а расстояние по вертикали равно $2a+b \equiv b-a \pmod 3$. Осталось заметить, что в случае, когда это условие выполняется, полоску очевидным образом можно разбить на тримино.

6. а) Между крайними клетками любого тримино с параметрами (a, b) содержится $a+b-2$ свободных клеток. Каждое из остальных тримино может закрывать не более двух из них. Следовательно, всего имеется не менее $(a+b)/2$ тримино. Они покрывают не менее $3(a+b)/2$ клеток.

б, в) Разобьём полоску длины ℓ_0 на три равные части длины $(a+b)/2$. Заметим, что левые концы всех тримино расположены в левой части (так как в двух оставшихся частях всего содержится $a+b$ клеток). Значит, вся левая часть состоит из левых крайних клеток тримино, самая правая — из крайних правых клеток, а средняя — из средних клеток тримино.

Сдвинем мысленно левую часть на $(a+b)/2$ вправо, так, чтобы она совпала со средней частью, и каждой клетке C в средней части, которая является средней клеткой какого-нибудь тримино

T, сопоставим ту клетку C' (опять же в средней части), в которую переместилась левая клетка тримино T при нашем сдвиге. Очевидно, что расстояние между клетками C и C' равно $|a-b|/2$. Мы определили, таким образом, взаимно однозначное отображение средней части в себя. Отметим, что если клетке C в построенном соответствии сопоставлена клетка C', то клетке C' должна быть сопоставлена клетка C. Действительно, если это не так, и клетка C' расположена, к примеру, правее на $|a-b|/2$ клетки C, то клетке C' должна соответствовать клетка, скажем C'', расположенная на $|a-b|/2$ правее клетки C'. Тогда клетке C'' соответствует клетка расположенная ещё на $|a-b|/2$ правее её (потому что клетка, расположенная левее на $|a-b|/2$ — это клетка C') и т. д. Двигаясь по цепочке этих сопоставленных друг другу клеток, мы когда-нибудь окажемся за пределами средней части, что невозможно. Таким образом, построенное соответствие разбивает клетки средней части на пары.

Заметим теперь, что левым $(a-b)/2$ клеткам средней части должны соответствовать клетки, расположенные правее них, т. е. следующие $(a-b)/2$ клеток. Аналогично, следующим за ними слева $(a-b)/2$ клеткам соответствуют те $(a-b)/2$ клеток, которые расположены правее них, и т. д. (Вот она, единственность замощения!) Таким образом, число клеток в средней части должно делиться на $a-b$. Мы доказали, что $(a+b)/2$ делится на $a-b$. Читатель без труда установит, что для взаимно простых a и b это бывает лишь в том случае, когда a и b — соседние нечётные числа.

7. Фиксируем фигуру S. Каждому S-квадрируемому n-мино T сопоставим другое S-квадрируемое n-мино T', которое состоит из всех крайних клеток полимино формы T в замощении фигуры S (таких клеток как раз n). Полимино T', определённое таким способом, действительно является S-квадрируемым, так как вторые слева клетки всех полимино формы T в замощении фигуры S, также образуют n-мино формы T', третьи слева клетки —

тоже и т. д. Вместе эти n-мино формы T' образуют замощение фигуры S. Кроме того, полимино T и T' должны быть различными, поскольку ровно у одного из них первый параметр равен 1. Наконец, отметим, что полимино, построенное указанным способом для T' — это в точности T! Таким образом, мы разбили множество S-квадрируемых n-мино на непересекающиеся пары.

8. Заметим, что если a или $a + b$ чётно, то пользуясь спиралью с этим чётным параметром (конструкция из задачи 4а), легко построить пример.

Пусть a и $a + b$ нечётны. Опять рассмотрим спираль с параметром a. Рассматриваемое тетрамино выглядит на цилиндре как пара обычных вертикальных домино. Пронумеруем столбцы таким образом, чтобы каждое тетрамино занимало столбцы с соседними номерами (или первый и последний). Пусть какое-нибудь тетрамино T расположено в k-м и $(k+1)$-м столбцах, тогда обязательно найдется тетрамино, расположенное в $(k+1)$-м и $(k+2)$-м столбцах. Действительно, иначе бы k-й и $(k + 1)$-й столбцы оказались бы целиком покрыты вертикальными сдвигами T. Тогда $(k + 2)$-й и $(k + 3)$-й столбцы тоже целиком окажутся покрыты вертикальными сдвигами одного и того же тетрамино. Аналогично замощены $(k+4)$-й и $(k+5)$-й столбцы и т. д. Мы получаем противоречие с нечётностью a.

Итак, найдутся тетрамино, лежащие в первом и втором, втором и третьем и т. д. столбцах. Отметим по одному такому тетрамино, пусть это будут тетрамино $T_{1,2}$, $T_{2,3}$, и т. д. Отметим в каждом тетрамино $T_{i,i+1}$ самую левую (на полоске) клетку — $L_{i,i+1}$, и клетку, на расстоянии $a + b$ от нее — $R_{i,i+1}$. Отметим, что $R_{i,i+1}$ и $L_{i+1,i+2}$ — это нижние клетки доминошек, лежащих в одном столбце цилиндра. Поскольку каждый такой столбец разбит на доминошки, расстояние вдоль полоски между клетками $R_{i,i+1}$ и $L_{i+1,i+2}$ чётно, следовательно, расстояние между $L_{i,i+1}$ и $L_{i+1,i+2}$ нечётно (так как $a + b$ нечётно). Но тогда нулевое расстояние между точками $L_{1,2}$ и $L_{1,2}$ равно сумме расстояний (со знаками) между $L_{1,2}$ и $L_{2,3}$, $L_{2,3}$ и $L_{3,4}$, $\ldots$, т. е., равно сумме a нечётных чисел, а значит, нечётно. Полученное противоречие показывает, что a и $a+b$ одновременно не могут быть нечётными.

9. Сначала докажем утверждение пункта в).

Пусть d — диаметр n-мино T, то есть расстояние между центрами его крайних клеток. Построим следующее покрытие полоски длины md, $m \in \mathbb{N}$: накроем самую левую клетку этой полоски нашим полимино T. Заметим, что при этом на полоске появилось не более $n(n-1)/2+1$ клеток, на которых не может находиться крайняя левая клетка другого полимино. Действительно, два полимино пересекаются, когда второе полимино сдвинуто относительно первого на расстояние, равное расстоянию между какими-то клетками первого полимино, это даёт $n(n-1)/2$ клеток, кроме того, нужно учесть самую левую клетку. Самую левую из незапрещённых клеток накроем вторым полимино, это создаст еще не более $n(n-1)/2+1$ новых запретов. Так мы сможем класть полимино до тех пор, пока самые левые $(m-1)d+1$ клеток нашей полоски не окажутся запрещёнными. Если к этому времени мы положили k полимино, то $k\cdot\bigl(n(n-1)/2+1\bigr) \geqslant (m-1)d+1$. Отсюда

$$\frac{kn}{md+1} \geqslant \frac{2n\bigl((m-1)d+1\bigr)}{(md+1)(n^2-n+2)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{2n}{n^2-n+2}$$

Таким образом, для всех n-мино доля покрытых клеток в подходящей полоске не меньше $\dfrac{2n}{n^2-n+2} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует утверждение задачи.

а, б, г) *Выпуклой оболочкой* полимино, как обычно, будем называть фигуру, образованную двумя его крайними клетками и всеми клетками между ними. Полимино назовем *плотным*, если из того, что два экземпляра такого полимино не пересекаются, следует, что их выпуклые оболочки не пересекаются. Рассмотрим произвольное плотное n-мино диаметра d. Коэффициент укладываемости такого n-мино не превосходит $\dfrac{n}{d+1}$. Примером плотного тримино является тримино с параметрами $(1,2)$. Это даёт оценку $\mathfrak{Q}_3 \leqslant \frac{3}{4}$. Примером плотного тетрамино является тетрамино с параметрами $(1,3,2)$. Это дает оценку $\mathfrak{Q}_4 \leqslant \frac{4}{7}$. В силу пункта в) вместо неравенств здесь имеют место равенства. Для произвольного n рассмотрим n-мино с параметрами

$$\Bigl(\underbrace{1,\,1,\,\ldots,\,1,}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\ \underbrace{\left[\frac{n}{2}\right],\ \left[\frac{n}{2}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\Bigr).$$

Это полимино будет плотным, что дает оценку пункта г).

Задача 2.

Решения задач написаны В. А. Тимориным и А. И. Буфетовым. При написании решений авторы использовали книгу A. Katok, B. Hasselblatt «Introduction to the modern theory of dynamical systems», Cambridge University Press, 1997.

Предупреждение. Решения содержат пробелы. Авторы надеются, что читатель сможет восполнить их.

Решения упражнений

1. Пусть отображение $f\colon [a,b] \to [a,b]$ непрерывно. Тогда отображение $\varphi(x) = f(x) - x$ также непрерывно, причем $\varphi(a) \geqslant 0$, $\varphi(b) \leqslant 0$. По теореме о промежуточном значении, найдется число $c \in [a,b]$, такое что $\varphi(c) = 0$, то есть $f(c) = c$.

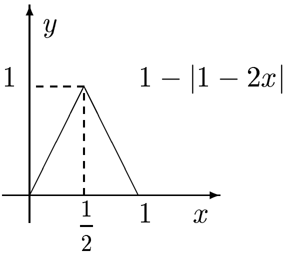
2. Пусть k — наименьший период точки x, m — произвольный период точки x. Пусть $m = ak + b$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant b < k$. Тогда $f^b(x) = x$, и b есть также период точки x, откуда $b = 0$ и, следовательно, m делится на k.

1. The tent map

1а). Докажем, что из $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует $0 \leqslant 1 - |1 - 2x| \leqslant 1$:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant 2x \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant 2x - 1 \leqslant 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant |2x - 1| \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant 1 - |1 - 2x| \leqslant 1.$$

1б). График $f(x)$:



2. Ответы: а) $\frac{2}{5}$, б) $\frac{2}{9}$, в) $\frac{2}{33}$.

3. Ответ: Рациональные точки отрезка с чётным числителем и нечётным знаменателем.

Лемма 1. *Все периодические точки отображения f рациональны.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$f^n(x) - x = 0. \tag{1}$$

После раскрытия всех модулей оно превратится в линейное уравнение с целыми коэффициентами, причем если $n > 0$, то коэффициент при x нечётен и, в частности, отличен от нуля. Итак, при $n > 0$ уравнение (1) может иметь только рациональные решения.

Лемма 2. *Если x рационально, то $f(x)$ тоже рационально.*

Лемма 3. *Пусть*

$$x = \frac{p}{q},\ f(x) = \frac{p_1}{q_1}, \quad p, p_1 \in \mathbf{Z},\ q, q_1 \in \mathbf{N},$$
$$\text{НОД}(p, q) = \text{НОД}(p_1, q_1) = 1.$$

Тогда если q чётно, то $q_1 \leqslant \frac{q}{2}$, а если q нечётно, то $q = q_1$ и p_1 чётно.

Доказательство лемм 2, 3 предоставляется читателю.

Из лемм 1, 2, 3 следует, что всякая периодическая точка отображения f обязана быть рациональной с нечётным знаменателем и чётным числителем. Будем называть такие точки *чётно-рациональными* (это не общепринятый термин). Заметим, что сумма, разность и произведение двух чётно-рациональных чисел вновь является чётно-рациональным числом. Покажем, что всякая чётно-рациональная точка — периодическая.

Лемма 4. *Пусть x, y — чётно-рациональные числа и $f(x) = f(y)$. Тогда $x = y$.*

Доказательство. Действительно, если $1 - |1 - 2x| = 1 - |1 - 2y|$, то либо $x = y$, либо $x + y = 1$. Последнее невозможно, так как x, y чётно-рациональны, а 1 — нет. Лемма доказана.

Теперь пусть число $x = \frac{p}{q}$, НОД$(p, q) = 1$, чётно-рационально. Рассмотрим орбиту точки x. По лемме 3, все точки орбиты чётно рациональны со знаменателем q, поэтому орбита точки x есть конечное множество. Отсюда получаем, что найдутся такие натуральные числа k, m, $k < m$, что $f^k(x) = f^m(x)$. По лемме 4, $x = f^{m-k}(x)$.

4. Заметим, что точка
$$x = \frac{2}{2^n + 1}$$
есть точка наименьшего периода n.

5. Ответ: 2^n.

Закодируем точки отрезка $[0, 1]$ следующим образом: точке $x \in [0, 1]$ соответствует последовательность $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ из нулей и единиц, в которой на месте с номером n стоит 0, если $f^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, и 1, если $f^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Такая кодировка неоднозначна только для чисел, которые при итерациях f попадают в $\frac{1}{2}$. Из леммы 3 следует, что такие точки имеют вид $x = \frac{a}{2^s}$, где a, s — целые. Такие числа называются *двоично рациональными*.

Итак, для всякой точки отрезка $[0, 1]$, не являющейся двоично рациональной, однозначно определён её код. Покажем также, что *любому* коду однозначно соответствует точка. Коду $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ соответствует точка
$$\bigcap_{n \geqslant 0} I_n,$$
где $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ — система вложенных отрезков, которую мы строим ниже. Длина отрезка I_n будет равна 2^{-n-1}, так что в пересечении эти отрезки дадут ровно одну точку, соответствующую коду.

Опишем построение отрезков I_n. Если $\varepsilon_0 = 0$, то точка лежит на отрезке $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$; если $\varepsilon_0 = 1$, то — на $I_0 = [\frac{1}{2}, 1]$. В обоих случаях функция $f = f^1$, ограниченная на отрезок I_0, — линейная функция с областью значений $[0, 1]$. Дальнейшее построение индуктивное. Пусть построен отрезок I_{n-1} и функция f^n, ограниченная на I_{n-1}, — линейная с областью значений $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon_n = 0$ отрезок I_n — это та часть отрезка I_{n-1}, которая отображается функцией f^n в $[0, \frac{1}{2}]$; а при $\varepsilon_n = 1$ — та часть, которая отображается в $[\frac{1}{2}, 1]$. Ограничение f^{n+1} на I_n в обоих случаях — линейная функция с областью значений $[0, 1]$, так что по индукции получаем отрезки I_n для любого n.

По построению кода ясно, что код $f(x)$ получается из кода x сдвигом влево: $f\colon (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \mapsto (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$. Поэтому периодической точке соответствует периодический код.

Заметим, что двоично рациональные точки не могут быть периодическими: $f^n(\frac{a}{2^s}) = 0$ при достаточно большом n. Поэтому число периодических точек периода n совпадает с числом периодических кодировок периода n, которое равно 2^n.

6. Мы будем пользоваться кодировкой, введённой в решении предыдущей задачи.

Заметим, что точки, не являющиеся двоично рациональными, близки тогда и только тогда, когда совпадают достаточно большие начальные отрезки их кодировок.

Код точки, порождающей всюду плотную орбиту, может выглядеть, например, следующим образом: сначала записываем все комбинации из нулей и единиц длины 1, потом все комбинации длины 2, потом — длины 3 и т. д.

Полученный двоичный код можно сдвинуть таким образом, чтобы начальный отрезок результата совпал с любой наперёд заданной комбинацией нулей и единиц. Поэтому закодированная точка порождает всюду плотную орбиту.

2. Теорема Шарковского

8. $f(x) = \frac{x}{2}$ на $[0, 1]$. Заметим, что $f(x) < x$ при $x \neq 0$, поэтому других периодических точек нет.

9. Пусть $K = [a, b]$. Из условия $K \to K$ следует, что найдётся такая точка $x \in K$, что $f(x) = a$ и такая точка $y \in K$, что $f(y) = b$. Обозначим $\varphi(x) = f(x) - x$. Так как $b \geqslant x, y \geqslant a$, имеем: $\varphi(x) \leqslant 0$, $\varphi(y) \geqslant 0$, откуда по теореме о промежуточном значении получаем, что существует такая точка $z \in [a, b]$, что $\varphi(z) = 0$, т.е. $f(z) = z$.

10. Лемма. *Пусть отрезок J накрывает отрезок $K = [a, b]$. Тогда J содержит такой отрезок I, что $f(I) = K$.*

Доказательство. Обозначим через $f^{-1}(a)$ множество всех прообразов точки a, т.е. $\{x : f(x) = a\}$, через $\min X$ — точную нижнюю, а через $\max X$ — точную верхнюю грань множества X.

Пусть $\min f^{-1}(a) < \min f^{-1}(b)$. Обозначим $d = \min f^{-1}(b)$, $c = \max f^{-1}(a) \cap (-\infty, d)$. Тогда отрезок $I = [c, d]$ — искомый. Случай $\min f^{-1}(a) > \min f^{-1}(b)$ разбирается аналогично. □

Рассмотрим теперь *петлю* — последовательность отрезков, циклически накрывающих друг друга:

$$K_0 \mapsto K_1 \mapsto \cdots \mapsto K_{n-1} \mapsto K_0.$$

По доказанной лемме, в K_0 найдётся отрезок I_1, такой что $f(I_1) = K_1$. Очевидно, I_1 накрывает K_2 при отображении f^2. Следовательно, в I_1 найдётся отрезок I_2, такой что $f^2(I_2) = K_2$. Рассуждая дальше таким же образом, построим отрезок I_n, такой что $f^n(I_n) = K_0$ и $f^i(I_n) \subseteq K_i$, $1 \leqslant i < n$. Поскольку отрезок I_n накрывает сам себя при отображении f^n, он содержит неподвижную точку x_0 отображения f^n. Точка x_0 имеет период n относительно отображения f и удовлетворяет условию $f^i(x_0) \in K_i$.

11, 12a. Рассмотрим орбиту точки наименьшего периода 3. Обозначим через x_1 наименьшую точку этой орбиты. Пусть $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f^2(x_1)$. Предположим, что $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда петля
$$[x_1, x_2] \mapsto \underbrace{[x_2, x_3] \mapsto \cdots \mapsto [x_2, x_3]}_{k-2 \text{ раза}} \mapsto [x_1, x_2].$$
даёт такую точку y периода $k \geqslant 2$, что образ y при i-ой итерации отображения f лежит в i-ом отрезке выписанной петли. Либо

точка y имеет минимальный период k, либо $y \in [x_1, x_2] \cap [x_2, x_3]$, т. е. $y = x_2$. Второй случай не реализуется, поскольку x_2 переходит при отображении f в точку x_3, которая не принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$. Случай $x_1 < x_3 < x_2$ разбирается аналогично.

12б. Будем вести индукцию по n. За основание индукции примем $n = 3$. Этот случай соответствует задаче 11. Обозначим $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Петля $I_1 \mapsto I_2 \mapsto \cdots \mapsto I_n \mapsto I_1$ даёт нам точку y_0 периода n, такую что

$$y_0 \in I_1,\ y_1 = f(y_0) \in I_2, \ldots,\ y_{n-1} = f^{n-1}(y_0) \in I_n.$$

Таким образом, $y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1}$. Теперь осталось воспользоваться предположением индукции.

3. Общая теорема Шарковского.

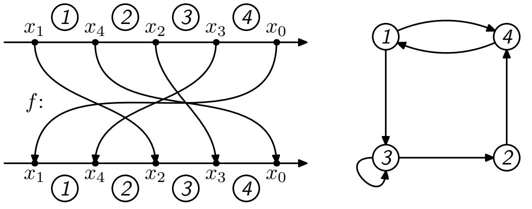
Напомним, что порядок Шарковского $\rhd$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}
3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \\
\cdots \rhd 2{\cdot}3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd \cdots \\
\cdots \rhd 2^2{\cdot}3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots \\
\cdots \rhd 2^k{\cdot}3 \rhd 2^k \cdot 5 \rhd \cdots \\
\cdots \rhd 2^{k+1} \rhd 2^k \rhd 2^{k-1} \rhd \cdots \rhd 2 \rhd 1
\end{gathered}$$

Теорема. *Пусть I — отрезок на числовой прямой, а $f\colon I \to I$ — непрерывное отображение. Если f имеет точку минимального периода p и $p \rhd q$, то найдётся точка минимального периода q.*

Пусть $x \in I$ — периодическая точка минимального периода p. Орбиту точки x при отображении f будем обозначать $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geqslant 0\}$; будем также использовать обозначение $x_k = f^k(x)$. *Маленьким отрезком* будем называть отрезок, соединяющий две соседние точки орбиты $\mathcal{O}(x)$.

В дальнейшем будем использовать *граф накрытий*, вершины которого помечены маленькими отрезками и соединены направленными дугами, обозначающими накрытие отрезков.



Орбита периода 5 Граф накрытий

Рис. 1.

Отрезок $\mathbf{I_1}$. На рисунке видно, что бывают маленькие отрезки, которые накрывают сами себя. На самом деле такие отрезки есть всегда. Пусть a — максимальная точка орбиты точки x, для которой выполнено неравенство $f(a) > a$. Пусть теперь b — ближайшая к a справа точка орбиты. Положим $I_1 = [a, b]$. Тогда $f(a) \geqslant b$ и $f(b) \leqslant a$. Так что отрезок I_1 накрывает сам себя.

Любой маленький отрезок накрывает все маленькие отрезки, которые лежат между его образами его концов. Поэтому если маленький отрезок J содержится в $f^k(I_1)$, то в графе накрытий можно пройти от I_1 к J по направлениям дуг. Поскольку отрезок I_1 накрывает сам себя, $I_1 \subseteq f(I_1)$. Следовательно, $f(I_1) \subseteq f(f(I_1))$ и далее по индукции

$$I_1 \subseteq f(I_1) \subseteq \cdots \subseteq f^p(I_1).$$

Поэтому отрезок $f^p(I_1)$ содержит всю орбиту $\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(x)$. Значит, в графе накрытий из вершины I_1 достижима любая другая вершина.

Лемма 5. *Пусть $p > 1$ — нечётное число, $x \in I$ — периодическая точка минимального периода p, причём не существует точек никакого меньшего нечётного периода. Тогда маленькие отрезки могут быть перенумерованы таким образом, что*

$$I_1 \mapsto I_1 \mapsto I_2 \mapsto \cdots \mapsto I_{p-1}$$

и $I_{p-1} \mapsto I_k$ для всякого нечётного $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Доказательство. **Предложение 5.1.** *Существует маленький отрезок $J \neq I_1$, накрывающий I_1.*

Доказательство. Обозначим через l число точек орбиты $\mathcal{O}(x)$, лежащих левее a, а через r — число точек орбиты $\mathcal{O}(x)$, лежащих правее b. Заметим, что отношения «левее» и «правее» понимаются здесь и далее в нестрогом смысле. Другими словами, мы считаем, что точка a лежит левее отрезка I_1, а точка b лежит правее отрезка I_1. Тогда $l+r=p$. Отсюда следует, что $l \neq r$ (поскольку число p нечётно). Следовательно, вне отрезка I_1 найдётся точка орбиты $\mathcal{O}(x)$, образ которой лежит с той же стороны от I_1.

Однако по обе стороны отрезка I_1 есть точки орбиты, которые при действии отображения f перескакивают с одной стороны на другую (в противном случае вся орбита лежала бы по одну сторону от I_1).

Следовательно, по одну сторону от отрезка I_1 найдутся соседние точки $c, d \in \mathcal{O}(x)$, из которых ровно одна перескакивает на другую сторону. Рассмотрим отрезок $J=[c,d]$. Этот отрезок накрывает отрезок I_1. □

Предложение 5.2. *Существует нетривиальная* (*состоящая из различных маленьких отрезков, за исключением концов*) *петля* $I_1 \mapsto \cdots \mapsto I_k \mapsto I_1$.

Доказательство. Выберем отрезок $J \neq I_1$, накрывающий I_1. Пойдём по кратчайшему пути в графе накрытий из I_1 в J и дополним его до петли дугой $J \mapsto I_1$. Выбор кратчайшего пути гарантирует, что все отрезки вдоль этой петли различны. □

Предложение 5.3. *Есть нетривиальная петля, содержащая все отрезки.*

Доказательство. Рассмотрим кратчайшую нетривиальную петлю, включающую отрезок I_1:

$$I_1 \mapsto I_2 \mapsto \ldots \mapsto I_k \mapsto I_1.$$

Докажем, что $k=p-1$. Из условия минимальности получаем, что $k \leqslant p-1$ (ни один отрезок, кроме I_1, в минимальной петле не может встречаться дважды). Осталось доказать, что $k \geqslant p-1$. Пусть q — нечётное число, равное либо k, либо $k+1$. Согласно результату задачи 10, одна из двух петель

$$I_1 \mapsto \ldots \mapsto I_k \mapsto I_1$$
$$\text{или } I_1 \mapsto \ldots \mapsto I_k \mapsto I_1 \mapsto I_1$$

влечёт существование точки наименьшего периода q. Так как p — наименьший нечётный период, $q \geqslant p$, откуда $k \geqslant p-1$. □

Осталось доказать, что $I_{p-1} \mapsto I_k$ для всякого нечётного k.

Предложение 5.4. *С точностью до ориентации, маленькие отрезки располагаются на прямой в следующем порядке:*

$$I_{p-1}, I_{p-3}, \ldots, I_2, I_1, I_3, \ldots, I_{p-2}.$$

Иначе говоря, слева от I_1 располагаются все отрезки с чётными номерами в порядке убывания номеров, а справа — все отрезки с нечётными номерами в порядке возрастания номеров (или наоборот, слева от I_1 — чётные отрезки по убыванию номеров, а справа — нечётные отрезки по возрастанию номеров).

Доказательство. Поскольку петля $I_1 \mapsto \cdots \mapsto I_{p-1} \mapsto I_1$ кратчайшая, из $I_k \mapsto I_j$ вытекает, что $j \leqslant k+1$. Таким образом, отрезок I_1 накрывает только отрезки I_1 и I_2. Следовательно, отрезок I_2 граничит с $I_1 = [a, b]$. Таким образом, с точностью до смены ориентации, $I_2 = [c, a]$ и $f(a) = b$, $f(b) = c$. Определим теперь $f(I_2)$. Поскольку $f(a) = b$ и I_2 не накрывает I_1, $f(I_2)$ целиком лежит справа от отрезка I_1. Однако I_2 накрывает I_3, а значит $I_3 = [b, d]$. Поскольку I_2 не накрывает никаких других отрезков, кроме указанных выше, на самом деле $d = f^2(b)$. Аналогично мы получаем, что $I_4 = [e, c]$ и далее точно так же. □

Обозначим $a_i = f^i(a)$. Мы только что показали, что

$$a_{p-1} < a_{p-3} < \cdots < a_2 < a < a_1 < a_3 < \cdots < a_{p-2}.$$

Отсюда видно, что $I_{p-1} = [a_{p-1}, a_{p-3}] \mapsto I_k$ для всякого нечётного k. Лемма 5 теперь полностью доказана. □

Лемма 6. *Если отображение f имеет чётный период, то оно имеет период 2.*

Доказательство. Пусть p — наименьший чётный период, x — точка минимального периода p. Если $p = 2$, то все доказано.

Пусть $p > 2$. Рассмотрим 2 случая:

1) *Найдётся маленький отрезок J, отличный от I_1, который накрывает I_1.*

В этом случае рассуждение аналогично доказательству леммы 5. Существует нетривиальная петля, содержащая I_1 и J, для кратчайшей из таких петель $I_1 \mapsto I_2 \mapsto \cdots \mapsto I_k \mapsto I_1$ выполнено $k \leqslant p - 1$.

Пусть q — чётное число, совпадающее либо с k, либо с $k + 1$. Тогда $q \leqslant p$. Согласно результату задачи 10 одна из двух петель

$$I_1 \mapsto \ldots \mapsto I_k \mapsto I_1$$
$$\text{или } I_1 \mapsto \ldots \mapsto I_k \mapsto I_1 \mapsto I_1$$

обеспечивает существование периодической точки y периода q. Допустим, что точка y неподвижна. Тогда

$$y \in I_1 \cap \cdots \cap I_k \subseteq I_1 \cap I_2 \subset \mathcal{O}(x),$$

что невозможно. Так как p — наименьший чётный период, мы получаем $q = p$, следовательно, $k \geqslant p - 1$.

Рассуждая аналогично доказательству предложения 5.4, можно показать, что отрезки I_i с точностью до ориентации расположены следующим образом:

$$I_{p-2}, \ldots, I_2, I_1, I_3, \ldots, I_{p-1}.$$

Кроме того, $I_{p-1} \mapsto I_k$ для чётных k. Согласно задаче 10, петля $I_{p-1} \mapsto I_{p-2} \mapsto I_{p-1}$ обеспечивает существование точки наименьшего периода 2.

2) *Не существует маленького отрезка, накрывающего I_1.*

Пусть $x_{\min}$ — наименьшая точка $\mathcal{O}(x)$, $x_{\max}$ — наибольшая точка $\mathcal{O}(x)$. Покажем, что

$$[x_{\min}, a] \mapsto [b, x_{\max}] \mapsto [x_{\min}, a].$$

Заметим, что $f(a) \geqslant b$, то есть $f([x_{\min}, a])$ содержит точки справа от I_1. Если отрезок $[x_{\min}, a]$ накрывает I_1, то I_1 накрывается некоторым маленьким отрезком, лежащим левее I_1, что противоречит нашему предположению. Итак, $[x_{\min}, a]$ не накрывает I_1, а значит, $f([x_{\min}, a])$ лежит справа от b. По тем же причинам отрезок $[b, x_{\max}]$ лежит слева от a. Заметим, что отображение f переставляет точки орбиты, а значит, устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками орбиты, лежащими слева от I_1 и справа от I_1. Следовательно,

$$[x_{\min}, a] \mapsto [b, x_{\max}] \mapsto [x_{\min}, a]$$

Согласно результату задачи 10, получаем точку периода 2. □

Лемма 7. *Если непрерывное отображение отрезка в себя имеет период 2^k, то оно также имеет период 2^l для всякого $l < k$.*

Доказательство. Неподвижная точка существует всегда. Рассмотрим случай $l > 0$. Если x — периодическая точка минимального периода 2^k, то тогда она же является периодической точкой отображения $f^{2^{l-1}}$ минимального периода 2^{k-l+1}, а следовательно, $f^{2^{l-1}}$ имеет периодическую точку наименьшего периода 2 по лемме 6. Эта точка имеет минимальный период 2^l относительно отображения f. □

Доказательство теоремы Шарковского.

Пусть $p \triangleright q$. Случай $p = 2^k$ разобран в лемме 7. Пусть $p = r \cdot 2^k$, где $r > 1$ — нечётно. Мы можем считать без ограничения общности, что r минимально, т.е. у отображения f нет точек минимального периода $t \cdot 2^k$ для нечётного $t < r$.

Рассмотрим три случая:

(1) $q = 2^l$, $l \leqslant k$,

(2) $q = s \cdot 2^k$, s чётно,

(3) $q = s \cdot 2^k$, $s > r$ и нечётно.

Сведём случай (1) к случаю (2). Если в случае (2) положить $s = 2$, мы получим существование точки минимального периода 2^{k+1}. Но тогда по лемме 7 найдутся и точки периодов 2^l, $l \leqslant k$.

Разберёмся теперь со случаем (2). В силу сделанного предположения, r — минимальный нечётный период отображения f^{2^k}. Отображение f^{2^k} имеет точку минимального периода s. Она получается применением результата задачи 10 к петле длины s, построенной из петли, описанной в лемме 5, по правилу:

$$I_{r-1} \mapsto I_{r-s} \mapsto I_{r-s+1} \mapsto \ldots \mapsto I_{r-2} \mapsto I_{r-1} \text{ при } s < r$$
$$\text{или } I_1 \mapsto I_2 \mapsto \ldots \mapsto I_{r-1} \mapsto I_1 \mapsto \ldots \mapsto I_1 \text{при } s \geqslant r.$$

Точка минимального периода s для отображения f^{2^k} является точкой минимального периода $s \cdot 2^k = q$ для отображения f (минимального, потому что иначе отображение f^{2^k} будет иметь точку периода $\frac{s}{2}$).

Наконец, в случае (3) петля

$$I_1 \mapsto I_2 \mapsto \cdots \mapsto I_{r-1} \mapsto I_1 \mapsto \cdots \mapsto I_1$$

даёт точку минимального периода s для отображения f^{2^k}. Если минимальный период этой точки при отображении f равен $s \cdot 2^k$, все доказано. В противном случае период рассматриваемой точки равен $s \cdot 2^t$ для некоторого $t < k$. Но тогда мы положим $p' = s \cdot 2^t$, $s' = s \cdot 2^{k-t}$, и согласно случаю (2) существует периодическая точка минимального периода $s' \cdot 2^t = s \cdot 2^k = q$.

Тем самым теорема Шарковского полностью доказана. □

3.10. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$, такое что $f(0) \neq 0$ или $f(1) \neq 1$. Сейчас мы опишем процедуру удвоения периодов:

Лемма. *Найдётся непрерывное отображение $\tilde{f}\colon [0,1] \to [0,1]$, периоды которого — это удвоенные периоды отображения f и ещё период 1.*

Доказательство. Определим отображение $\tilde{f}$ следующей формулой

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{2+f(3x)}{3}, & \text{если} \quad x \in [0, \frac{1}{3}], \\ x - \dfrac{2}{3}, & \text{если} \quad x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Продолжим это отображение на отрезок $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ линейным образом. Заметим, что $f(x) = 3\tilde{f}^2(\frac{x}{3})$, так что любой n-периодической точке отображения f соответствует $2n$-периодическая точка отображения $\tilde{f}$. Кроме того, ограничение отображения f на отрезок $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, как легко проверить, не имеет других периодических точек, кроме единственной неподвижной. Таким образом, отображение $\tilde{f}$ имеет удвоенные периоды отображения f и ещё период 1, что и требовалось доказать.

Теперь для решения задачи достаточно взять отображение, не имеющее других периодических точек, кроме неподвижных. После применения к этому отображению n раз описанной процедуры получим отображение с периодами $1, 2, \ldots, 2^n$.

3.11. Чтобы получить непрерывное отображение отрезка в себя, периоды которого — степени двойки и только они, нужно «применить описанную процедуру бесконечно много раз». Пусть f_n — результат n-кратного удвоения периодов. Можно доказать, для всякого $x \in (0, 1)$ последовательность $f_n(x)$ с некоторого момента стабилизируется. Положим теперь

$$g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{если} \quad x \in (0, 1) \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ 1, & \text{если} \quad x = 1 \end{cases}$$

Читателю предоставляется проверить, что отображение g непрерывно и множество его периодов совпадает с множеством степеней двойки.

Задача 3.

Подготовительные задачи (первая серия)

1. Пусть M – произвольное множество диаметра D на плоскости. Проведем горизонтальную прямую L_1, содержащую хоть одну граничную точку M и такую, что *над* L_1 нет точек M.

Под L_1 параллельно L_1 проведем прямую L_1' на расстоянии D от L_1. Под L_1', очевидно, нет точек M, т. е. мы заключили M в полосу P_1 ширины D.

Построив так же еще 2 полосы P_2 и P_3 ширины D, расположенные под углом 60° к P_1, заключим M в 6–угольник S (являющийся пересечением трёх полос ширины D).

У такого 6–угольника S противоположные стороны попарно параллельны, а длины сторон a и b $(a \leqslant b)$ чередуются: $a - b - a - b - a - b$. Опуская из центра S перпендикуляры на стороны длины b, мы разбиваем S (а значит, и M) на три части диаметра меньше D, рис. 1.

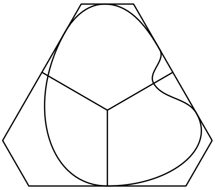


Рис. 1

Замечание. Стандартное решение этой задачи содержит дополнительный шаг: вращая 6–угольник S, добиваются, чтобы он стал правильным. Для разбиения S и M на три части диаметра меньше D этот шаг не нужен.

2. а) Простейший пример плоского множества, которое нельзя разбить на две части меньшего диаметра, – это множество, состоящее из трёх точек – трёх вершин правильного треугольника.

b) Множество, состоящее из четырёх вершин правильного тетраэдра, нельзя разбить на три части меньшего диаметра.

3. Допустим, что окружность L диаметра D можно разбить на 2 части L_1, L_2 меньшего диаметра. Добавим к L_1, L_2 все их граничные точки – т. е. рассмотрим *замыкания* F_1, F_2 множеств L_1, L_2. Проверьте, что диаметр при этом не увеличится:

$$\operatorname{diam} F_1 = \operatorname{diam} L_1 < D; \quad \operatorname{diam} F_2 = \operatorname{diam} L_2 < D,$$

и окружность L окажется объединением двух замкнутых (содержащих все свои граничные точки) множеств F_1, F_2 диаметра меньше D.

Пусть A и B – концы диаметра L. Пусть для определенности $A \in F_1$, тогда $B \in F_2$. Будем двигаться по L от A к B. Последнюю встретившуюся при этом точку F_1 обозначим через T. Вследствие замкнутости F_1 она принадлежит F_1, а вследствие замкнутости F_2 – принадлежит F_2. Диаметрально противоположная T точка T' не принадлежит ни F_1 (т.к. $T \in F_1$ и $\operatorname{diam} F_1 < D$), ни F_2 (т.к. $T \in F_2$ и $\operatorname{diam} F_2 < D$). Полученное противоречие доказывает невозможность разбиения L на 2 части меньшего диаметра.

b) Предположим, что шар диаметра D можно разбить на 3 части меньшего диаметра. Соответственно сфера S тоже разобьётся тогда на 3 части S_1, S_2, S_3 диаметра меньше D. В частности, диаметр D_1 части S_1 меньше D и, значит, при малом $h > 0$

$$D_1 + 2h < D. \tag{1}$$

Выберем на сфере 2 полюса: P и Q. Пересечем сферу несколькими «параллелями» (параллельными плоскостями, перпендикулярными отрезку PQ). Сфера разобьется при этом на 2 «полярные шапочки» и несколько поясов. Дугами меридианов разделим каждый пояс на части так, чтобы разбиение сферы напоминало «кирпичную кладку» (рис 2). Число параллелей и меридианов выберем столь большим, чтобы каждая из этих частей (каждый кирпичик и каждая полярная шапочка) имела диаметр $< h$, где h удовлетворяет (1).

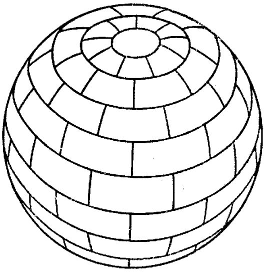


Рис. 2

Все части, имеющие хоть одну общую точку с S_1, образуют фигуру, которую мы обозначим G_1. Ввиду (1), диаметр G_1 меньше D:

$$\operatorname{diam} G_1 < D_1 + 2h < D. \tag{2}$$

Легко проверить (см. [1]), что граница G_1 состоит из конечного числа замкнутых линий L_1, L_2, $\ldots$, L_k, которые не пересекают сами себя и друг друга.

Отразив G_1 относительно центра сферы (рассмотрев множество всех точек, диаметрально противоположных точкам G_1), получим множество G_1', граница которого состоит из замкнутых линий L_1', L_2', $\ldots, L_k'$, симметричных линиям L_1, L_2, $\ldots, L_k$. Так как, ввиду (2), множества G_1 и G_1' не имеют общих точек, то замкнутые линии

$$L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_k,\ L_1',\ L_2',\ \ldots,\ L_k'$$

попарно не пересекаются друг с другом и, значит, разбивают сферу на $2k+1$ частей, т. е. на *нечётное* число частей. Эти части будем называть *странами*. Каждая страна либо целиком принадлежит G_1, либо целиком принадлежит G_1', либо лежит вне обоих множеств G_1 и G_1'.

Так как линии $L'_1, L'_2, \ldots, L'_k$, симметричны линиям $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_k$, то каждая страна либо имеет симметричную ей, либо симметрична сама себе. Число стран, попарно симметричных друг другу, чётно. Значит, найдётся страна H, *симметричная сама себе.*

Пусть A – произвольная точка внутри H. Симметричная ей точка A' тоже лежит внутри H. Следовательно, диаметр H равен D, так что H лежит вне обоих множеств G_1 и G'_1. Соединим A и A' линией L, лежащей внутри H. Линия L', симметричная L, тоже лежит внутри H. Поэтому линии L и L' не имеют общих точек с S_1, и каждая точка на этих линиях принадлежит либо S_2, либо S_3. В частности, это относится к точкам A и A'. При этом (поскольку $|AA'| = D$) одна из них принадлежит S_2, а другая – S_3. Последующие рассуждения, по сути, повторяют решение задачи 3a.

Пусть для определённости $A \in S_2$, $A' \in S_3$. Будем считать, что и S_2, и S_3 – *замкнутые* множества, т. е. содержат все свои граничные точки (если это не так, добавим к ним все их граничные точки – диаметр при этом не увеличится). Будем двигаться по L от A к A'. Последнюю встретившуюся при этом граничную точку S_2 обозначим через T. Вследствие замкнутости S_2 она принадлежит S_2, а вследствие замкнутости S_3 – принадлежит S_3. Диаметрально противоположная T точка T' не принадлежит ни S_2 (т.к. $T \in S_2$ и $\operatorname{diam} S_2 < D$), ни S_3 (т.к. $T \in S_3$ и $\operatorname{diam} S_3 < D$).

Полученное противоречие доказывает невозможность разбиения шара на 3 части меньшего диаметра.

c) Одно нужное разбиение шара показано на рис. 3a. Другое (более симметричное) можно получить так: впишем в шар с центром O правильный тетраэдр ABCD; четыре трёхгранных угла OBCD, OACD, OABD и OABC, под которыми видны из центра грани тетраэдра, рассекают шар на 4 части меньшего диаметра (рис. 3b).

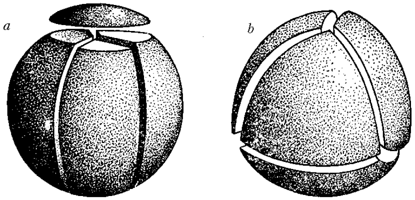


Рис. 3

Основные задачи (первая серия)

4. Центрально симметричное множество M с центром C диаметра D лежит в шаре с центром C диаметра D. Разбив этот шар на 4 части меньшего диаметра, мы одновременно разобьём и M на 4 части меньшего диаметра.

5. Если множество M невыпукло, можно взять его *выпуклую оболочку*, т.е. наименьшее выпуклое множество V, содержащее M (такое V существует: это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M). Докажем, что

$$\operatorname{diam} V = \operatorname{diam} M. \qquad (3)$$

Если это не так и $\operatorname{diam} V > \operatorname{diam} M$, то найдутся 2 граничные точки V – назовём их A и B – такие, что

$$|AB| > D. \qquad (4)$$

Так же, как при решении задачи 1, построим полосу P ширины $\leqslant D$, перпендикулярную AB и содержащую M. Поскольку P – выпуклое множество, содержащее M, то (по определению V) $P \supset V$. Но это противоречит (4) и, значит, доказывает (3).

Ввиду (3) гипотезу Борсука достаточно проверить для выпуклых множеств.

6. Следуя [1], докажем, что любое *гладкое* выпуклое тело V диаметра D в трёхмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра. Разобьём шар U диаметра D на 4 части U_1, U_2, U_3, U_4 меньшего диаметра. Каждой граничной точке $v \in V$ сопоставим такую граничную точку $u = u(v) \in U$, что опорная плоскость к V в точке v параллельна касательной плоскости к U в точке u (при этом u выбирается так, чтобы U и V лежали по одну сторону от этих плоскостей). Точку v на границе V отнесем к V_j, если $u(v) \in U_j$, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Докажем, что

$$\operatorname{diam} V_j < D, \quad 1 \leqslant j \leqslant 4. \tag{5}$$

Допустим, что при каком–нибудь j это не так и $\operatorname{diam} V_j = D$. Пусть A и B – две граничные точки V_j, для которых $|AB| = D$. Проведем через A и B две плоскости, перпендикулярные отрезку AB. Ясно, что V лежит в полосе между ними (иначе $\operatorname{diam} V > D$). Поэтому проведенные плоскости являются *опорными* к V. Значит, касательные плоскости к шару в точках $u(A)$ и $u(B)$ (параллельные проведенным опорным плоскостям) *параллельны* друг другу, т.е. $u(A)$ и $u(B)$ – диаметрально противоположные точки шара U. Поэтому расстояние между ними равно D. С другой стороны, по построению $u(A)$ и $u(B)$ принадлежат U_j, так что расстояние между ними меньше D. Полученное противоречие доказывает (5).

Пусть теперь O – любая внутренняя точка V. Соединим O отрезками со всеми точками $v \in V_j$ и объединение этих отрезков обозначим через W_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Ясно, что, ввиду (5), $\operatorname{diam} W_j < D$. Построенные «конусы» W_j заполняют все выпуклое тело V, т.е. образуют разбиение V на 4 части диаметра $< D$.

Подготовительные задачи (вторая серия)

7. a) Если $x_j = x_j'$ для s значений индекса j и $x_j \neq x_j'$ для t значений индекса j, $s + t = n$, то квадрат расстояния между точками x и x' равен $4t$.

b) Добавляя к указанным в условии равенствам *нульмерное* и *одномерное*, получаем (в правых частях) строки *треугольника Паскаля*:

$$\begin{gathered}
1\\
1+1\\
1+2+1\\
1+3+3+1\\
1+4+6+4+1\\
1+5+10+10+5+1\\
1+6+15+20+15+6+1\\
1+7+21+35+35+21+7+1\\
1+8+28+56+70+56+28+8+1\\
1+9+36+84+126+126+84+36+9+1\\
1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1
\end{gathered}$$

В n–й строке стоят *биномиальные коэффициенты*:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-3}+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n,$$

их число равно $n+1$, а их сумма равна 2^n.

Итак, имеется $n+1$ различных попарных расстояний между вершинами куба $[-1,1]^n$. Число вершин, лежащих на каждом из этих расстояний от данной вершины, равно одному из биномиальных коэффициентов.

c) Ввиду 7а (случай $t=n$), диаметр куба $[-1,1]^n$ равен $2\sqrt{n}$.

8. Пусть x и x' – вершины n–мерного куба $[-1,1]^n$.

Если $x_j=x'_j$ при всех j, $1\leqslant j\leqslant n$, то скалярное произведение векторов $0x$ и $0x'$ равно n: $(x,x')=n$; если $x_j=x'_j$ при всех j, кроме одного, то $(x,x')=n-2$; если $x_j=x'_j$ при всех j, кроме двух, то $(x,x')=n-4$ и т. д.

9. При чётных n (см. решение задачи 8) среди векторов, соединяющих центр 0 куба $[-1,1]^n$ с его вершинами, имеются ортогональные, т. е. $(x,x')=0$, если $n=2k$. При этом (для фиксированной вершины куба x) векторы $0x'$ ортогональны вектору $0x$ для C_{2k}^k вершин x' – столькими способами можно выбрать k

из $2k$ индексов j, для которых x_j *не совпадает с* x'_j (и, значит, $x_jx'_j = -1$, а $(x, x') = 0$).

10. Если разбить множество Y на $d{+}1$ частей Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_{d+1}, то, ввиду неравенства $N/q > d+1$, хотя бы в одной из них (обозначим ее Y_j) окажется больше, чем q вершин графа Г. Значит, хотя бы две из этих вершин не соединены ребром. Но вершины y, y' соединяются ребром тогда и только тогда, когда $|yy'| < D$. Отсюда следует, что диаметр Y_j не меньше D (и, тем самым, равен D). Итак, минимальное число частей диаметра $< D$, на которые можно разбить множество Y, больше $d+1$ (так что неравенство $N/q > d+1$ даёт контрпример к гипотезе Борсука).

Основные задачи (вторая серия)

11. Так как знаки $\{x_j\}_{j=1}^{n-1} = \pm 1$ можно выбрать произвольно (а потом сделать число минус единиц чётным, подобрав нужный знак x_n), то X содержит $N = 2^{n-1}$ точек: $|X| = N = 2^{42} = 4\,398\,046\,511\,104$.

12. Так как $x_0 = 1$, то $y_{1,j} = x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Значит, построенное отображение $y = y(x)$ является взаимно однозначным и, тем самым, число вершин $y \in Y$ равно $|Y| = |X| = N = 2^{42}$.

13. Так как (см. решение задач 11 и 12)

$$|Y| = |X| = N = 2^{42} = 4\,398\,046\,511\,104$$

и так как (по теореме о числе вершин $|\Pi|$ подграфа Π)

$$|\Pi| \leqslant \sum_{k=0}^{10} C_{43}^k = 2\,665\,685\,155,$$

то $N/|\Pi| > 1\,649$. Поскольку Y можно трактовать как подмножество d–мерного пространства при $946 \leqslant d \leqslant 1\,648$, то отсюда (см. решение задачи 10) следует, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $946 \leqslant d \leqslant 1\,648$.

14. Так как $x_0 = 1$ и число *минус единиц* чётно для всех $x \in X$, то (см. решение задачи 8) для различных x, $x' \in X$ скалярное произведение $(x,x') = \sum_{j=0}^{n} x_j x'_j$ может принимать значения 0, $\pm 4k$, $1 \leqslant k \leqslant 10$, и не принимает никаких других значений; $(x,x) = 44$.

15. Начертим нечто вроде турнирной таблицы. «Участниками турнира» будут x_0, x_1, ..., x_n. На пересечении строки с номером $i-1$ и столбца с номером j поместим произведение $x_{i-1}x_j$, т. е. число $y_{k(i,j)}$. Таким образом, все координаты точки y заполнят верхнюю половину таблицы (над диагональю, идущей из левого верхнего в правый нижний угол).

То же построение проведем для точки y'. Квадрат расстояния между y и y' равен сумме квадратов разностей $y_k - y'_k$, $1 \leqslant k \leqslant d$. Каждое слагаемое в этой сумме равно либо 0 (если $y_k = y'_k$), либо 4 (если $y_k \neq y'_k$). Таким образом, расстояние между y и y' тем больше, чем больше несовпадающих y_k и y'_k.

Без ограничения общности можно считать (объясните, почему), что первые s координат x_j и x'_j совпадают (включая $x_0 = x'_0 = 1$), а остальные $n+1-s$ координат различны.

Эквивалентное допущение (объясните, почему эквивалентное):

a) все x_j (а значит, и все y_k) равны 1,

b) первые s координат x'_j равны 1, а остальные $n+1-s$ координат x'_j равны -1.

Тогда расстояние между y и y' тем больше, чем больше координат y'_k равны -1.

При условиях a) и b) координаты $y'_k = -1$ заполняют прямоугольник в верхней половине нашей «турнирной таблицы». «Площадь» этого прямоугольника (число *минус единиц* в нем) тем больше, чем больше он похож на квадрат. В точности квадрат получается, если $s = n+1-s = 22$ (т. е. если $(x,x') = 0$).

Тем самым, расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D, когда скалярное произведение $(x,x') = 0$.

16. Из того, что граф Г можно получить, соединив ребрами все пары вершин x, $x' \in X$, для которых $(x, x') \neq 0$, выведем, что число вершин $|\Pi|$ максимального полного подграфа П графа Г не меньше, чем $q = \sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$.

Для этого просто предъявим полный подграф П графа Г, содержащий q вершин.

Для каждой точки $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ среди x_j имеется p координат, равных $+1$, и m координат, равных -1, где $p > 0$ и $m \geqslant 0$ – чётные числа, $p + m = n + 1$, так что

$$m = 0,\ 2,\ \ldots,\ n - 1 = 42. \tag{6}$$

В соответствии с (6) рассмотрим подмножества X_m множества X, $m = 0,\ 2,\ \ldots,\ 42$. К X_0 относится одна точка: все $x_j = 1$; к X_2 относятся C_{43}^2 точек: все x_j, кроме двух, равны 1; к X_4 относятся C_{43}^4 точек: все x_j, кроме четырёх, равны 1 и т. д.

Нетрудно проверить, что подграф П, содержащий все вершины

$$x \in X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_8 \cup X_{10} \cup X_{34} \cup X_{36} \cup X_{38} \cup X_{40} \cup X_{42},$$

является полным: $(x, x') \neq 0$ для любых x, $x' \in \Pi$.

При этом $|\Pi| = \sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$ (поскольку $C_{43}^k = C_{43}^{43-k}$, $k = 42,\ 40,\ 38,\ 36,\ 34$).

17. При делении на 11 целые числа, не кратные 11, дают остатки

$$\pm k,\ 1 \leqslant k \leqslant 5. \tag{7}$$

При $a, x \in X$, $a \neq x$ и $(a, x) \neq 0$ скалярное произведение (a, x) может принимать (см. решение задачи 14) значения $\pm 4k$, $1 \leqslant k \leqslant 10$, и не принимает никаких других значений; числа $\pm 4k$ $(\mathrm{mod}\ 11)$ – или, попросту, остатки от деления на 11 чисел

$$\pm 40,\ \pm 36,\ \pm 32,\ \pm 28,\ \pm 24,\ \pm 20,\ \pm 16,\ \pm 12,\ \pm 8,\ \pm 4$$

– это числа (7), *только в другом порядке*, а именно:

$$\mp 4,\ \pm 3,\ \mp 1,\ \mp 5,\ \pm 2,\ \mp 2,\ \pm 5,\ \pm 1,\ \mp 3,\ \pm 4.$$

Поэтому, если $a \neq x$ и $(a,x) \neq 0$, то

$$F_a(x) = ((a,x)+1)((a,x)-1)((a,x)+2)((a,x)-2) \times \ldots \\ \cdots \times ((a,x)+5)((a,x)-5)$$

делится на 11 без остатка: $F_a(x) \equiv 0 \pmod{11}$.

При $a = x$ скалярное произведение $(a,x) = 44 \equiv 0 \pmod{11}$, так что остаток от деления $F_a(x)$ на 11 не равен нулю: $F_a(x) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

18. Докажем: *если*

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_q g_q(x) \equiv 0, \text{ где } c_1, \ldots, c_q \text{ – целые числа,} \tag{8}$$

то $c_1 = \cdots = c_q = 0$. Допустив, что это не так, можем дополнительно предположить, что не все c_j кратны 11 (иначе можно было бы поделить их на общий множитель). Из (8) следует

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_q g_q(x) \equiv 0 \pmod{11}. \tag{9}$$

При этом (см. решение задачи 17) $g_j(a_j) \not\equiv 0 \pmod{11}$ и $g_j(a_k) \equiv 0 \pmod{11}$, если $j \neq k$. Поэтому, поочередно подставляя в (9) $x = a_1$, $x = a_2$, $\ldots x = a_q$, получаем, что все $c_j \equiv 0 \pmod{11}$. Полученное противоречие доказывает, что $c_1 = \cdots = c_q = 0$.

Каждый из многочленов $g_j(x)$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами одночленов

$$1,\ x_r\ (1 \leqslant r \leqslant n),\ x_r x_s\ (1 \leqslant r < s \leqslant n),\ x_r x_s x_t\ (1 \leqslant r < s < t \leqslant n),\ \ldots$$

Обозначим эти одночлены $e_1, e_2, \ldots, e_Q$, где $Q = \sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$. Смысл каждого слагаемого в последней сумме таков: имеется $C_{43}^0 = 1$ одночлен, равный 1; $C_{43}^1 = 43$ одночлена являются линейными функциями; C_{43}^2 одночленов – попарные произведения $x_r x_s$, $1 \leqslant r < s \leqslant n$; C_{43}^3 одночленов – произведения $x_r x_s x_t$, $1 \leqslant r < s < t \leqslant n$; и т. д.

В этих обозначениях

$$g_j(x) = K_{1,j} e_1 + \cdots + K_{Q,j} e_Q,$$

$K_{1,j}, \ldots, K_{Q,j}$ – целые числа, $1 \leqslant j \leqslant q$. Теорема о числе вершин максимального полного подграфа графа Г будет доказана, если установить, что $q \leqslant Q$.

Для тех, кто немного знает линейную алгебру, неравенство $q \leqslant Q$ очевидно: e_1, e_2, …, e_Q образуют базис из Q элементов, и число элементов q в системе линейно независимых g_1, g_2, …, g_q не может быть больше Q.

Докажем неравенство $q \leqslant Q$, не опираясь на этот факт.

Переписывая равенство (8) в виде

$$c_1(K_{1,1}e_1 + \dots + K_{Q,1}e_Q) + \dots + c_q(K_{1,q}e_1 + \dots + K_{Q,q}e_Q) = 0,$$

видим, что оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$c_1K_{i,1} + \dots + c_qK_{i,q} = 0 \ \text{ при всех } i,\ 1 \leqslant i \leqslant Q. \tag{10}$$

Будем трактовать (10) как систему Q линейных уравнений с целыми коэффициентами $K_{i,j}$ относительно q неизвестных $c_1, \dots, c_q$. Задача будет решена, если показать, что при условии $q > Q$ (т. е. при условии, что неизвестных больше, чем уравнений) система (10) имеет ненулевое целочисленное решение $c_1, \dots, c_q$.

А это, действительно, так, поскольку для любой совместной (имеющей хоть одно решение) системы уравнений верно следующее более общее

Утверждение. *Совместная система Q линейных уравнений с рациональными коэффициентами и рациональными правыми частями имеет ненулевое решение в рациональных числах, если неизвестных больше, чем уравнений.*

При $Q = 1$ утверждение очевидно, и остается доказать его по индукции при $Q > 1$.

Рассмотрим систему Q уравнений относительно неизвестных $X_1, \dots, X_q$, $q > Q$, с рациональными коэффициентами $R_{i,j}$ и рациональными правыми частями R_i, $1 \leqslant i \leqslant Q$, $1 \leqslant j \leqslant q$:

$$\begin{gathered}
R_{1,1}X_1 + \dots + R_{1,q}X_q = R_1,\\
R_{2,1}X_1 + \dots + R_{2,q}X_q = R_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
R_{Q,1}X_1 + \dots + R_{Q,q}X_q = R_Q.
\end{gathered}$$

Пусть система совместна и не все $R_{i,j}$ равны 0 (случай $R_{i,j} \equiv 0$ и $R_i \equiv 0$ тривиален). Можно считать (если нужно, изменив нумерацию уравнений и неизвестных), что $R_{1,1} \neq 0$. Вычитая первое уравнение, умноженное на $R_{i,1}/R_{1,1}$ из уравнения с номером i, $2 \leqslant i \leqslant Q$, исключим X_1 из всех уравнений, кроме первого, и перейдём к системе

$$\begin{aligned} R_{1,1}X_1 + R_{1,2}X_2 + \dots + R_{1,q}X_q &= R_1, \\ r_{2,2}X_2 + \dots + r_{2,q}X_q &= r_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ r_{Q,2}X_2 + \dots + r_{Q,q}X_q &= r_Q. \end{aligned}$$

По предположению индукции существуют рациональные, не все равные нулю, числа $X_2, \dots, X_q$, $q > Q$, удовлетворяющие всем уравнениям, кроме первого; подставляя их в первое уравнение, находим также и X_1.

Для однородных (с правыми частями $R_i = 0$) уравнений из доказанного утверждения следует существование ненулевого *целочисленного* решения.

19. a) Так как знаки $\{x_j\}_{j=1}^{n-1} = \pm 1$ можно выбрать произвольно (а потом сделать число минус единиц чётным, подобрав нужный знак x_n), то X содержит $N = 2^{n-1}$ точек: $|X| = N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$.

b) Так как $x_0 = 1$, то $y_{1,j} = x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Значит, построенное отображение $y = y(x)$ является взаимно однозначным и, тем самым, число вершин $y \in Y$ равно $|Y| = |X| = N = 2^{40}$.

c) Скалярное произведение $(x, x') = \sum_{j=0}^{n} x_j x'_j$ для x, $x' \in X$ принимает значения

$$42,\ \pm 38,\ \pm 34,\ \pm 30,\ \pm 26,\ \pm 22,\ \pm 18,\ \pm 14,\ \pm 10,\ \pm 6\ \pm 2.$$

d) Построим такую же таблицу, как в решении задачи 15.

Без ограничения общности можно допустить (сравним с решением задачи 15), что

1) все x_j (а значит, и все y_k) равны 1,

2) первые s координат x'_j равны 1, а остальные $n+1-s$ координат x'_j равны -1.

При этом допущении координаты $y'_k=-1$ заполняют прямоугольник в верхней половине таблицы. «Площадь» этого прямоугольника (число *минус единиц* в нем) тем больше, чем больше он похож на квадрат, т. е. максимальна, если $(x,x')=\pm 2$.

Значит, расстояние $|yy'|$ между вершинами $y=y(x)$, $y'=y(x')\in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y, когда скалярное произведение $(x,x')=\pm 2$.

е) Сначала построим граф Г, соединив рёбрами все пары вершин x, $x'\in X$, для которых $(x,x')\neq\pm 2$, и (так же, как при решении задачи 16) предъявим полный подграф П графа Г, содержащий q вершин, где

$$q=\sum_{k=0}^{9} C_{41}^{k}=473\,732\,328,$$

а потом докажем, что в максимальном полном подграфе Г не более q вершин.

Для каждой точки $x=\{x_j\}_{j=0}^{n}\in X$ среди x_j имеется p координат, равных $+1$, и m координат, равных -1, где $p>0$ и $m\geqslant 0$ – чётные числа, $p+m=n+1$, так что

$$m=0,\ 2,\ \ldots,\ n-1=40. \qquad (11)$$

В соответствии с (11) рассмотрим подмножества X_m множества X, $m=0,\ 2,\ \ldots,\ 40$. К X_0 относится одна точка: все $x_j=1$; к X_2 относятся C_{41}^{2} точек: все x_j, кроме двух, равны 1; к X_4 относятся C_{41}^{4} точек: все x_j, кроме четырёх, равны 1 и т. д.

Подграф П, содержащий все вершины

$$x\in X_0\cup X_2\cup X_4\cup X_6\cup X_8\cup X_{32}\cup X_{34}\cup X_{36}\cup X_{38}\cup X_{40},$$

является полным: $(x,x')\neq\pm 2$ для любых x, $x'\in$ П.

При этом $|\text{П}|=\sum_{k=0}^{9} C_{41}^{k}$ (поскольку $C_{41}^{k}=C_{41}^{41-k}$, $k=40$, 38, 36, 34, 32).

Теперь докажем, что в максимальном полном подграфе Γ не более q вершин.

Многочлены $F_a(x)$

Положив $t = (a, x)$, сопоставим каждому $a \in X$ многочлен

$$F_a(x) = P(t) = (t+6)(t+10)(t+14)(t+18)\times \\ \times(t+22)(t+26)(t+30)(t+34)(t+38). \quad (12)$$

Докажем (сравним с задачей 17), что

$$F_a(x) \equiv 0 \pmod{11}, \text{ если } a \neq x \text{ и } (a,x) \neq \pm 2.$$

$$F_a(x) \not\equiv 0 \pmod{11}, \text{ если } a = x. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $a \neq x$ и $(a, x) \neq \pm 2$, тогда (согласно 19c)

$$t = \pm 38, \pm 34, \pm 30, \pm 26, \pm 22, \pm 18, \pm 14, \pm 10, \pm 6.$$

При любом из этих t число $P(t)$ кратно 11 — при всех $t < 0$ (при $t = -6, -10, \ldots, -38$) $P(t) = 0$, при каждом $t > 0$ (при $t = 6, 10, \ldots, 38$) один сомножитель в (12) равен 44 (см. таблицу 1 Приложения 1), так что $P(t)$ делится на 11. Напротив, при $a = x$ (при $t = 42$) ни один сомножитель в (12) не делится на 11, так что $P(t) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

Многочлены $G_a(x)$

Записав (12) в виде линейной комбинации одночленов и последовательно применяя соотношение $x_j^2 = 1$, получаем новый, равный $F_a(x)$ на X, многочлен $G_a(x)$ с мономами $c\,x_{j_1}^{s_1} x_{j_2}^{s_2} \ldots x_{j_9}^{s_9}$, c – целые, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_9 \leqslant n = 41$, $s_k = 0$ или 1.

Пусть (сравним с задачей 18) $\{a_j\}_{j=1}^q \in X$ – вершины максимального полного подграфе Γ. Тогда скалярное произведение любых двух из них не равно ±2. Многочлены $G_a(x)$ при $a = a_j$ обозначим через $g_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Докажем: если

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_q g_q(x) \equiv 0, \text{ где } c_1, \ldots, c_q \text{ – целые числа}, \quad (14)$$

то $c_1 = \cdots = c_q = 0$.

Доказательство. Допустив, что это не так, можем дополнительно предположить, что не все c_j кратны 11 (иначе можно было бы поделить их на общий множитель). Из (14) следует

$$c_1 g_1(x) + \dots + c_q g_q(x) \equiv 0 \pmod{11}. \tag{15}$$

При этом (см. (13)) $g_j(a_j) \not\equiv 0 \pmod{11}$ и $g_j(a_k) \equiv 0 \pmod{11}$, если $j \neq k$. Поэтому, поочередно подставляя в (15) $x = a_1$, $x = a_2$, $\dots x = a_q$, получаем, что все c_j делятся на 11. Полученное противоречие доказывает, что $c_1 = \dots = c_q = 0$.

Каждый из многочленов $g_j(x)$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами одночленов

$$1,\ x_r\ (1 \leqslant r \leqslant n),\ x_r x_s\ (1 \leqslant r < s \leqslant n),\ x_r x_s x_t\ (1 \leqslant r < s < t \leqslant n),\ \dots$$

Как и в решении задачи 18, обозначим их e_1, e_2, …, e_Q, только теперь $Q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^k$. В этих обозначениях

$$g_j(x) = K_{1,j} e_1 + \dots + K_{Q,j} e_Q,$$

$K_{1,j}$, …, $K_{Q,j}$ – целые числа, $1 \leqslant j \leqslant q$, и остаётся установить, что $q \leqslant Q$. Доказательство этого неравенства дословно повторяет конец решения задачи 18.

f) Поскольку Y можно трактовать как подмножество d–мерного пространства при $861 \leqslant d \leqslant 2\,319$, то (сравним с решениями задач 10 и 13) из неравенства

$$\frac{N}{q} = \frac{1\,099\,511\,627\,776}{473\,732\,328} > 2\,320$$

следует, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $861 \leqslant d \leqslant 2\,319$.

20. Фиксируя любую из координат y_k, получаем разбиение Y из задачи 19 на два подмножества Y^+ и Y^- размерности 860 (на которых $y_k = +1$ и $y_k = -1$). Хоть одно из них нельзя разбить на 861 часть диаметра меньше D – иначе (вопреки 19 f) Y разбилось бы на 1 722 таких части.

Это даёт контрпример (Y^+ или Y^-) к гипотезе Борсука для $d = 860$.

21. Схема решения – та же, что для задачи 19.

a) К X относятся точки $x = \{x_j\}_{j=0}^{33}$ с $x_0 = 1$ и чётным числом *минус единиц* среди координат x_j, так что $|X| = N = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$.

b) Формулами $y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j$ устанавливается взаимно однозначное отображение X на d–мерное множество Y (где $d = C_{34}^2 = 561$), так что $|Y| = |X| = N = 2^{32}$.

c) Скалярное произведение $(x, x') = \sum_{j=0}^{33} x_j x_j'$ для x, $x' \in X$ принимает значения

$$34,\ \pm 30,\ \pm 26,\ \pm 22,\ \pm 18,\ \pm 14,\ \pm 10,\ \pm 6 \pm 2.$$

d) Расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y, когда скалярное произведение $(x, x') = \pm 2$.

e) Строим граф Г, соединяя все пары x, $x' \in X$, для которых $(x, x') \neq \pm 2$.

Нетрудно предъявить полный подграф П графа Г, содержащий

$$q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^k = 5\,663\,890$$

вершин: к П относятся (в обозначениях из решения задачи 19e) точки

$$x \in X_0 \cup X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_{26} \cup X_{28} \cup X_{30} \cup X_{32}.$$

Многочлены $F_a(x)$

Положив $t = (a, x)$, сопоставляем каждому $a \in X$ многочлен

$$F_a(x) = P(t) = (t+6)(t+10)(t+14)(t+18)(t+22)(t+26)(t+30).$$

Верны (проверьте с помощью таблицы 2 Приложения 1) соотношения

$$F_a(x) \equiv 0 \pmod{27},\ \text{если}\ a \neq x\ \text{и}\ (a, x) \neq \pm 2.$$
$$F_a(x) \not\equiv 0 \pmod{27},\ \text{если}\ a = x. \qquad (16)$$

Из (16) можно вывести, что в максимальном полном подграфе Γ не более q вершин.

f) Тем самым в максимальном полном подграфе Γ ровно q вершин, так что

$$\frac{N}{q} = \frac{4\,294\,967\,296}{5\,663\,890} > 758.$$

Трактуя Y как подмножество d–мерного пространства при $561 \leqslant d \leqslant 757$, получаем отсюда, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $561 \leqslant d \leqslant 757$.

Приложение 1. Таблицы 1–2.

t	$t+6$	$t+10$	$t+14$	$t+18$	$t+22$	$t+26$	$t+30$	$t+34$	$t+38$
6									44
10								44	
14							44		
18						44			
22					44				
26				44					
30			44						
34		44							
38	44								
42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1

t	$t+6$	$t+10$	$t+14$	$t+18$	$t+22$	$t+26$	$t+30$
6	12			24			**36**
10			24			**36**	
14		24			**36**		
18	24			**36**			48
22			**36**			48	
26		**36**			48		
30	**36**			48			60
34			48			60	

2

Приложение 2.

Вскоре после конференции школьники Дима Гуревич (г. Тель-Авив, Израиль) и Саша Гайфуллин (г. Жуковский, Россия) независимо друг от друга получили ответ на вопрос о размерностях d, $757 < d < 860$: для всех этих d они построили *контрпримеры* к гипотезе Борсука. Их построение базируется на следующей, совсем простой, лемме:

Лемма. *Пусть в прямоугольном треугольнике* ABC *гипотенуза* AB ($|AB| = D$) *и катеты* AC *и* BC ($|AC| = r, |BC| = R$) *связаны соотношением* $r \leqslant R$, *или, что то же самое,* $2r^2 \leqslant D^2$. *Пусть точка* T *катета* BC *такова, что* $|TA| = |TB| = \rho$. *Тогда* $2\rho^2 \leqslant D^2$.

Лемма сразу следует из подобия треугольников ABC и TBS, где S — середина AB (рис. 4), а применение её основано на том, что Y (наш 561-мерный контрпример к гипотезе Борсука) лежит на 560-мерной сфере радиуса r ($r^2 = 561$), его диаметр $D = \mathrm{d}iam\, Y = 24\sqrt{2}$, так что r и D связаны соотношением $2r^2 \leqslant D^2$ ($r^2 = 561 = 17 \cdot 33 < 18 \cdot 32 = D^2/2$).

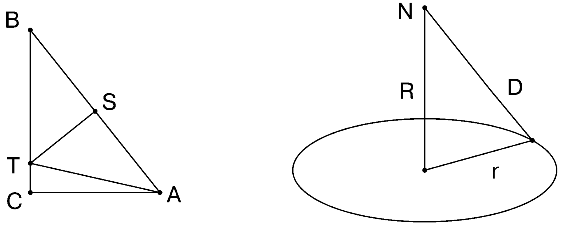


Рис. 4

Точная формулировка утверждения Д. Гуревича–А. Гайфуллина такова:

Утверждение. *Пусть множество* M *диаметра* D *лежит в* k*-мерном пространстве на* $(k-1)$*-мерной сфере* s *радиуса* r, *причём*

$$r^2 \leqslant D^2/2, \tag{17}$$

и пусть M является контрпримером к гипотезе Борсука: M нельзя разбить на $k+1$ частей, диаметр каждой из которых меньше D. Тогда контрпример к гипотезе Борсука в $\mathbb{R}^d$ можно построить при любом $d > k$.

Доказательство утверждения. На рис. 4 $(k-1)$-мерная сфера s условно изображена в виде окружности радиуса r. Множество $M = M_1$ диаметра D (контрпример к гипотезе Борсука в $\mathbb{R}^k$) лежит на s, причем $2r^2 \leqslant D^2$. Добавляя одну размерность и добавляя к M_1 одну точку N, расположенную на расстоянии D от всех точек s, получаем множество $M_2 \in \mathbb{R}^{k+1}$, которое по-прежнему имеет диаметр D и которое, очевидно, нельзя разбить на $k+2$ части диаметра меньше D.

Тем самым, M_2 является контрпримером к гипотезе Борсука в $\mathbb{R}^{k+1}$.

Так как (по лемме) M_2 лежит на k-мерной сфере, для радиуса которой выполняется (17), то добавление — по одной — новых точек (с увеличением размерности на единицу) можно продолжить по индукции.

А. Гайфуллин доказал также, что доказанное утверждение остается верным, если заменить в нем (17) неравенством

$$r^2 \leqslant 3D^2/4. \tag{18}$$

Задача 4.

Об истории задачи. Эта задача возникла из наблюдений С. Маркелова. Он составил впечатляющий список геометрических теорем, которые сохраняют истинность при замене слова «окружность» на слово «парабола» и некоторых других аналогичных заменах (*словарь Маркелова*).

Понимание задачи перед конференцией было весьма приблизительным. Это проявилось в неудачных формулировках вопросов, особенно во второй части задачи.

На конференции этой задачей активно занималось несколько групп, из которых следует выделить Ф. Петрова и С. Тихомирова. Они не только придумали достаточно простые «прямые» решения предложенных задач, но и научились переводить утверждения о *расстояниях* в параболический случай. Кроме того и они, и, независимо, А. Гоголев, предложили много своих наблюдений исследуемой аналогии. Из бесед со взрослыми участниками конференции родилось также несколько интересных вопросов (наиболее полезным оказалось предложение И. Рубанова о введении углов в параболический случай).

На конференции и за время, прошедшее с тех пор, удалось до некоторой степени понять *формулировку* основного вопроса этой задачи. Однако по-прежнему остаётся неясной формулировка достаточно полного *ответа* на него.

О литературе. Разумеется, в элементарной геометрии не бывает ничего нового. В книге И. М. Яглома «Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия» (Библиотека математического кружка, вып. 11. М.: Наука, 1969) даётся подробное изложение «параболической геометрии» (у И. М. Яглома — геометрии Галилея), приводится обширный список литературы. Там можно найти решения параболических вариантов для почти всех предлагавшихся на конференции задач. (Евклидовы варианты являются, как правило, хорошо известными теоремами.)

Заинтересованному читателю советуем обратить особое внимание на приложения к книге И. М. Яглома. В них изложено построение 9 геометрий Кэли–Клейна, которые помимо геометрии Галилея включают общеизвестные евклидову геометрию и геометрию Лобачевского. Приведены также числовые модели этих геометрий, использующие наряду со стандартными комплексными числами менее известные двойные и дуальные числа.

Предупреждения и разъяснения. Мы не приводим решений большинства из предлагавшихся задач. Комментарии, которые собраны здесь, не всегда опираются только на стандартные школьные знания по геометрии. Не все рассуждения достаточно строгие. И (это уж наверняка!) в комментариях есть ошибки.

За всё это составитель настоящего текста приносит заранее свои глубокие извинения возможному читателю.

Следуя Яглому, в приводимых ниже комментариях мы используем слово «цикл» для обозначения окружности или параболы с заданным направлением оси. В рассматриваемых задачах эти кривые никогда не встречаются вместе, так что это не должно приводить к путанице.

1. Вид изучаемых теорем. Дадим более точное описание теорем об аффинных свойствах конфигураций (АЦ-теоремы для краткости). Эти теоремы имеют следующий вид.

1. Описание состава конфигурации:
   «Даны точки $P_1, \dots, P_n$, прямые $l_1, \dots, l_m$, циклы $c_1, \dots, c_k$»
2. Описание свойств конфигурации:
   «…такие, что выполнены условия…» (список условий)
   Условия могут быть такими:
   - а) точка P лежит на прямой l;
   - б) точка P лежит на цикле c;
   - в) прямая l касается цикла c;
   - г) прямая l_1 параллельна прямой l_2;

   д) отношение длин двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно заданному числу;
   е) отношение площадей двух фигур, ограниченных частями прямых и циклов, равно заданному числу.

   При этом используются только точки, прямые и циклы, описанные в составе конфигурации. Фигуры, о которых идёт речь в 2е, можно представлять как ломаные, вершины которых — точки, описанные в составе конфигурации, а звенья — отрезки прямых или циклов, также описанных в составе конфигурации.

3. Утверждение теоремы:

   «...Тогда ...» (список утверждений)

   Утверждения имеют такой же вид, как и условия.

Каждая АЦ-теорема имеет две версии — параболическую (когда цикл — парабола с заданным направлением оси) и евклидову (когда цикл — окружность). В параболической версии дополнительно требуется невырожденность: все прямые конфигурации и все прямые, которые можно провести через точки конфигурации, не параллельны осям парабол.

2. Формулировка основного вопроса. Найти условия, при которых из справедливости евклидовой АЦ-теоремы следует справедливость параболической АЦ-теоремы.

Задачи, приведенные в условиях, показывают, что такая ситуация встречается довольно часто. Тому есть несколько объяснений.

3. Объяснение первое: из анализа. В условии упоминалось, что аффинным образом окружности является *эллипс*. (Если вы не знаете иного определения эллипса, то считайте, что сказано определение. Если знаете — докажите эквивалентность этого определения и известного вам.)

Применяя к окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, преобразование $x \mapsto x$, $y \mapsto \alpha y$, получим эллипс, у которого одной из осей симметрии является ось ординат. Любая конечная часть параболы, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, может быть сколь угодно точно приближена подходящим параллельным переносом эллипса такого вида.

Это наводит на следующее объяснение наблюдаемого соответствия для АЦ-теорем: для данной конфигурации парабол (и еще, быть может, прямых и точек) найдём эллипсы, приближающие эти параболы, и переведём их аффинным преобразованием в окружности. Тогда справедливость аффинных утверждений для парабол будет следовать из справедливости тех же утверждений для окружностей «по непрерывности».

Чтобы приведённое рассуждение было корректным, необходимо выполнение двух условий. Во-первых, нужно переводить все эллипсы конфигурации в окружности одним аффинным преобразованием. Этого можно добиться, поскольку все параболы подобны. Во-вторых, предельный переход должен быть корректным. После замены парабол на эллипсы условия теоремы выполняются только приближённо (со сколь угодно малой ошибкой[1]). Чтобы вывести отсюда справедливость утверждения параболической теоремы необходимо, чтобы выполнялся усиленный вариант евклидовой теоремы, который формулируется так: можно добиться выполнения утверждения теоремы с заданной точностью, если указать, с какой точностью должны выполняться условия теоремы. Грубо говоря, выполнение такого условия означает, что достаточно остро заточенным карандашом можно нарисовать правильный чертеж теоремы. Поэтому такого рода усиление формулировки будем называть теоремой рисования.

Из справедливости теоремы рисования следует справедливость евклидовой теоремы — это стандартное упражнение для изучающих математический анализ. Кажется очевидным и следствие в обратную сторону. Но ...

---

[1] Здесь и далее точность приближения можно задавать, например, как точность задания координат точек и коэффициентов прямых и циклов. Приближённое выполнение условия касания означает, что есть две пары близких точек с близкими углами наклона касательных.

3. Объяснение второе: из алгебры. Есть алгебраический вариант предыдущего рассуждения. Введём переменные, описывающие координаты точек конфигурации и коэффициенты уравнений прямых и циклов. Тогда все условия, кроме 2е, легко записываются как алгебраические уравнения на эти переменные. При этом можно заметить, что и окружности, и эллипсы с осью симметрии, параллельной оси ординат, и параболы с осью, параллельной оси ординат, задаются уравнениями вида

$$x^2 + \alpha y^2 = L(x, y),$$

где $L(x, y) = ax + by + c$ — линейная функция. При $\alpha = 1$ получаем окружности, при $\alpha = 0$ — параболы, при $0 < \alpha < 1$ — эллипсы.

Утверждение евклидовой теоремы в такой алгебраической интерпретации означает, что из некоторого набора уравнений (задающих условия теоремы) следует некоторое другое уравнение[2] при всех $\alpha > 0$. А утверждение параболической теоремы означает справедливость этого следствия при $\alpha = 0$. Опять-таки, кажется очевидным, что это так.

4. Объяснение третье: из комплексной проективной геометрии. Не будем объяснять, что такое комплексная проективная плоскость. Для тех, кому это понятие знакомо, скажем только, что окружности — это коники, проходящие через круговые точки (однородные координаты $I = (-i; 1; 0)$ и $J = (i; 1; 0)$); эллипсы, которые мы рассматривали выше — коники проходящие через точки с координатами $(-\alpha i; 1; 0)$ и $J = (\alpha; 1; 0)$; а рассматриваемые параболы — это коники, касающиеся бесконечно удалённой прямой в точке $(0; 1; 0)$.

Так что соотношение между евклидовой теоремой и параболической такое же, как между теоремой, в которой есть условие прохождения через две заданные точки на заданной прямой, и теоремой, в которой это условие заменено на условие касания той

---

[2] В обычном алгебраическом смысле — как только выполняются условия, выполняется и следствие.

же прямой. Во многих случаях оказывается, что такие условия равносильны.

5. Объяснение четвёртое: из оснований геометрии. Можно ввести особый язык (АЦ-язык) для описания геометрии плоскости, на котором теоремы для окружностей и парабол будут формулироваться одинаково. Этот язык использует пять основных понятий: *число, точка, прямая, цикл, движение*; три отношения: *точка P лежит на прямой l*, *точка P лежит на цикле c*, *точка Q — образ точки P при движении φ*; и числовую функцию, которую будем называть *простое отношение точек* P_1, P_2, P_3 и обозначать $(P_1 : P_2 : P_3)$ (порядок точек существен).

Для придания смысла утверждениям АЦ-языка смысл нужно описать его основные понятия и отношения в общеупотребительных терминах. В таб. 1 приведены *евклидова* и *параболическая* интерпретации нашего языка.

Можно говорить об истинности утверждения АЦ-языка в заданной интерпретации — подставим вместо основных понятий и отношений АЦ-языка общеупотребительные и получим обычное математическое утверждение.

Заметим, что утверждение АЦ-языка вполне может быть истинно в одной интерпретации и ложно в другой.

В параболической интерпретации на плоскости выделено направление. Приводимые в таблице уравнения относятся к такой системе координат, в которой ось ординат параллельна выделенному направлению.

АЦ-теоремы не только легко формулируются на АЦ-языке, но и во многих случаях аналогично доказываются в обеих интерпретациях. Например, из приводившихся на конференции задач только для теоремы Фейербаха не удалось придумать такого рода доказательство.

Конечно, чтобы доказать хоть что-нибудь, нужно иметь список аксиом. Написать такой список разумного размера пока не удаётся. Так что пока сказанное выше нужно понимать лишь как

Понятие языка	Интерпретации:	
	евклидова	параболическая
число	вещественное число	
точка	точка на плоскости	
прямая	прямая	прямая, не параллельная оси ординат Oy
цикл	окружность	парабола с осью, параллельной оси ординат (уравнение $y = ax^2 + bx + c$)
движение	преобразование, сохраняющее расстояния	преобразование, задаваемое уравнениями $\begin{cases} x' = b^{-1}x + d \\ y' = ax + by + c \end{cases}$
отношения понимаются в обычном смысле		
простое отношение	для трёх точек на одной прямой $\overline{P_1P_3} = (P_1 : P_2 : P_3)\overline{P_1P_2}$	

Таблица 1.

руководство к переводу доказательств евклидовых теорем в параболический случай.

Приведём один пример.

Параболические повороты. В евклидовом случае есть движения, переводящие циклы (окружности) в себя. Это повороты относительно центра окружности. Заметим, что такой поворот переводит в себя и все окружности, концентрические данной.

Параболический поворот — это такое параболическое преобразование, которое переводит в себя заданную параболу. Абсцисса образа точки при параболическом повороте изменяется на некоторое число x_0 (аналог угла поворота).

Параболический поворот является частным случаем параболического преобразования. Проверим это. Пусть парабола задана уравнением $y = ax^2$ (остальные параболы получаются из этой параллельными переносами). Найдём образ точки $(t;u)$ при параболическом повороте с приращением абсциссы x_0. Абсцисса образа точки при параболическом повороте равна $t+x_0$, ордината — $a(t+x_0)^2=u+2ax_0t+ax_0^2$. Таким образом, этот параболический поворот — линейное преобразование:

$$(x;y)\mapsto(x+x_0;2ax_0x+y+ax_0^2).$$

Можно показать, что при параболическом повороте площади фигур не изменяются.

Из вида формулы для параболического поворота сразу следует, что он сохраняет также все параболы, получающиеся из данной параллельным переносом вдоль оси. Это объясняет, почему при переформулировке аффинных теорем условие концентрические окружности соответствуют параболам, совмещающимся параллельным переносом вдоль оси.

Отсюда, в частности, легко получается решение задачи 3. В случае окружностей две фигуры указанного вида совмещаются поворотом. В случае парабол две фигуры указанного вида совмещаются параболическим поворотом.

6. И тем не менее... Хотя мы привели четыре довода в пользу гипотезы о том, что из евклидовой версии АЦ-теоремы следует её параболическая версия, ни один из них не был доведён до сколь-нибудь строгого доказательства. И тому есть веская причина — эта гипотеза неверна. А противоречия в математике пока никому найти не удавалось. Так что все эти доводы должны иметь более узкую сферу применимости, чем кажется на первый взгляд.

Мы сейчас приведём элегантное рассуждение, придуманное на конференции Ф. Петровым и С. Тихомировым, которое показывает, что любое утверждение евклидовой геометрии можно сформулировать на АЦ-языке. Отсюда и будут получены контрпримеры к гипотезе.

Чтобы определить отношение длин произвольных отрезков на АЦ-языке полагаем, что равны «длины» отрезков касательных, проведенных из одной точки к циклу. Тогда отношение «длин» отрезков AB и CD может быть определено так: если отрезки лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то отношение их длин выражается одинаково в обеих интерпретациях (см. таблицу 1). В противном случае возьмём точку пересечения прямых O, на которых лежат эти отрезки, и отложим от неё отрезки OB' и OD', равные данным, каждый на соответствующей прямой. Теперь возьмём цикл, касающийся двух данных прямых так, что одна из точек касания совпадает с D'. Вторую точку касания обозначим B''. Тогда отношением «длин» отрезков AB и CD будем считать $OB' : OB''$. Это совпадает с обычным отношением длин отрезков в евклидовой интерпретации ($|AB| = |OB'|$, $|CD| = |OD'| = |OB''|$). Для параболической интерпретации эта конструкция является определением отношения «длин» отрезков. (Кавычки далее опускаются.)

Для проверки корректности такого определения докажем следующую теорему:

Теорема 1. В параболическом случае отношение длин отрезков равно отношению длин их проекций на ось абсцисс.

Лемма. Абсцисса точки пересечения касательных к параболе является средним арифметическим абсцисс точек касания.

Доказательство леммы. Уравнение касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой t имеет вид $y = (2at + b)x - -at^2+c$. Если в точке $(x; y)$ пересекаются касательные к параболе, проведенные в точках с абсциссами $t, \tilde{t}$, $t \neq \tilde{t}$, то выполняются соотношения

$$y = (2at + b)x - at^2 + c \text{ и } y = (2a\tilde{t} + b)x - a\tilde{t}^2 + c.$$

Вычитая одно равенство из другого и сокращая общие множители, получим $2x = t + \tilde{t}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Если отрезки лежат на параллельных прямых, то все очевидно — из равенства проекций следует равенство длин отрезков (вертикальные прямые в невырожденных конфигурациях запрещены).

Перенос отрезков вдоль прямой не меняет длины их проекций на ось абсцисс. Из леммы следует, что для равных отрезков, имеющих общий конец, теорема справедлива. Далее рассуждение аналогично той проверке, которая была сделана для окружностей.

Теперь можно описать обещанный контрпример. Им служит теорема Птолемея. Её можно сформулировать как АЦ-теорему так. Пусть есть четыре точки, удовлетворяющие условию теоремы Птолемея и цикл, проходящий через три из них. Тогда четвёртая точка лежит на этом цикле. Чтобы ввести в условие АЦ-теоремы какие-то утверждения о расстояниях, мы должны добавить к конфигурации все вспомогательные точки, прямые и цикл, о которых идёт речь в определении. Так что получающийся таким образом контрпример довольно громоздок.

Нужно ещё, конечно, проверить, что параболическая версия АЦ-варианта теоремы Птолемея неверна. В силу доказанной теоремы аналог теоремы Птолемея для парабол приобретает вид

$$|x_a - x_c| \cdot |x_b - x_d| = |x_a - x_b| \cdot |x_c - x_d| + |x_b - x_c| \cdot |x_a - x_d|.$$

Считаем, что $x_a < x_b < x_c < x_d$. Имеем

$$\begin{aligned}(x_a - x_b) \cdot (x_c - x_d) + (x_b - x_c) \cdot (x_a - x_d) &= \\ -x_a x_d - x_b x_c + x_a x_b + x_c x_d &= (x_a - x_c) \cdot (x_b - x_d).\end{aligned}$$

Поэтому для точек с такими абсциссами условие аналога теоремы Птолемея заведомо выполнено. В то же время ясно, что условие принадлежности четырёх точек параболе не может выражаться только через абсциссы этих точек.

Но наблюдение Петрова–Тихомирова носит не только разрушительный характер. Оно позволяет вводить в АЦ-геометрию аналоги метрических теорем. Например, для решения многих задач, предлагавшихся на конференции, полезно использовать АЦ-аналог теоремы о произведении длин секущих цикла. Для окружностей — это стандартная теорема. Для парабол это задача 18.

Доказательство этой теоремы получается из теоремы Виета. Параллельным переносом совместим начало координат с точкой A. Уравнения прямых, проходящих через точку A, имеют вид $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Абсциссы точек пересечения первой прямой с параболой являются корнями уравнения $k_1x = ax^2+bx+c$, абсциссы второй пары точек пересечения являются корнями уравнения $k_2x = ax^2+bx+c$. По теореме Виета произведение абсцисс первой пары точек равно произведению абсцисс второй пары точек.

7. Немного об углах. АЦ-определение равенства углов можно дать так. (Направленные) углы будем считать равными, если их вершины, точка пересечения первых лучей и точка пересечения вторых лучей лежат на одном цикле. Легко видеть, что в евклидовом случае это определение корректно.

Докажем корректность определения в параболическом случае.

Теорема 2. Если углы в параболическом случае равны, то равны и разности угловых коэффициентов их сторон.

Доказательство. Пусть есть направленный угол $(\widehat{OA, OB})$ и парабола, проходящая через точки O, A, B. Определим разность угловых коэффициентов прямых OA и OB. Пусть парабола задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, абсциссы точек равны x_O, x_A, x_B соответственно. Угловой коэффициент прямой OA равен

$$\frac{(ax_A^2 + bx_A + c) - (ax_O^2 + bx_O + c)}{x_A - x_O} = a(x_A + x_O) + b.$$

Тогда искомая разность угловых коэффициентов равна

$$a(x_A + x_O) + b - (a(x_B + x_O) + b) = a(x_A - x_B).$$

Это выражение на зависит от выбора точки O, так что для парабол выполняется аналог теоремы о вписанном угле (не путать с теоремой о вписанном угле для парабол).

Величина угла и её свойства. Мерить величину направленного угла разумно не АЦ-инвариантным способом. Величину направленного угла в евклидовом случае нужно брать с точностью до кратных 180°. В параболическом случае величина угла определена только для невырожденных углов и равна разности угловых коэффициентов сторон угла. В дальнейшем условие невырожденности подразумевается.

Тем не менее, в обеих версиях величина направленного угла обладает многими одинаковыми свойствами.

A. Из определения угла, данного выше следует, что четыре точки A, B, C, D лежат на одном цикле тогда, и только тогда, когда $(\widehat{AC, AD}) = (\widehat{BC, BD})$.

B. Выполнено равенство $(\widehat{OA, OB}) + (\widehat{OB, OC}) = (\widehat{OA, OC})$. (Аддитивность углов.)

C. Выполнено равенство $(\widehat{BA, BC}) + (\widehat{CB, CA}) + (\widehat{AC, AB}) = 0$. (Сумма углов треугольника.)

D. Выполнено равенство $(\widehat{BA, BC}) = -(\widehat{BC, BA})$. (Антисимметричность.)

Отсюда, в частности, получается «почти АЦ»-решение для задачи 6. Точки B', A, C', C'' лежат на одном цикле, поэтому $(\widehat{C''B', C''C'}) = (\widehat{AB', AC'})$. Аналогично, рассматривая второй цикл, получаем $(\widehat{C''C', C''A'}) = (\widehat{BC', BA'})$. Складывая эти два равенства и используя свойства направленных углов, выводим следующее равенство:

$$\begin{aligned}(\widehat{C''B', C''A'}) &= (\widehat{AB', AC'}) + (\widehat{BC', BA'}) = \\ &= -(\widehat{AB, AC}) - (\widehat{BC, BA}) = (\widehat{CA, CB}) = (\widehat{CB', CA'}),\end{aligned}$$

Оно означает, что точки B', A', C, C'' также лежат на одном цикле.

Задача 5.

1а. Частичная сумма данного ряда S_n равна $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$ и при $n \to \infty$ стремится к 2.

1б. Используя тождество $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, мы получаем для частичной суммы ряда выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right);$$

очевидно, что после раскрытия скобок все члены, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются, и $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ при $n \to \infty$.

1в. Аналогично, используя равенство $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$, мы получаем, как и выше, для частичной суммы формулу

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Отсюда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$.

1г. Эта задача является частным случаем задачи 1д при $k = 3$. Поэтому ответ $\frac{1}{4}$ (см. решение задачи 1д).

1д. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \\ = \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+k)}\right].$$

Опять-таки, преобразовав в частичной сумме каждый член по указанной формуле, мы видим, что все члены, кроме первого и последнего, уничтожаются, и

$$S_{n-1} = \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}\right).$$

Ответ: $S = \dfrac{1}{(k-1)(k-1)!}$.

2а. Для ускорения сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ домножим и разделим каждый член на $(n+1)$, а затем разделим числитель на знаменатель почленно. Мы получим:

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \sum \frac{1}{n(n+1)} + \sum \frac{1}{n^2(n+1)}$$

Поскольку сумма первого ряда, как мы уже знаем, равна 1, наш ряд преобразовался к виду $1+\sum \dfrac{1}{n^2(n+1)}$. Члены этого ряда убывают как $\dfrac{1}{n^3}$.

2б. Эта задача имеет разные решения. Можно, например, выделить первый член, соответствующий $n = 1$, а остальные домножить и разделить на $n^2 - 1$. Однако, учитывая, что эта задача является подготовительной для трудной задачи 4, предпочтительней итерировать уже использованный способ. А именно, в формуле, полученной в задаче 2а, домножим и разделим каждый член на $(n+2)$. Мы получим:

$$\begin{aligned} S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2(n+1)(n+2)} &= \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} &= \\ = 1 + \frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} &. \end{aligned}$$

(второй член вычислен с использованием задачи 1г). Поскольку члены ряда убывают как $\dfrac{1}{n^4}$, задача решена. Существенно, что этот метод можно применять неограниченное число раз, что подводит нас к решению задачи 4.

4. Разберём вначале задачу 4. Для удобства обозначим $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$, S_n и T_n — частичные суммы этих рядов, $a_n = \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$ — общий член второго ряда. Требуется доказать, что $S = 3T$.

. Нужно применить бесконечное число раз тот же прием, что в задаче 2.

. Применяя его, мы, к своему огорчению, убеждаемся, что хотя на каждом шагу сходимость ускоряется, но в результате мы . . . получаем исходный ряд. (Смотрите решение задачи 2, где первые два слагаемые равны 1 и 1/4, т. е. такие же, как у ряда S.)

Поэтому требуется

: сначала выделить из ряда S очередной член, а уж затем применять метод задачи 2.

Лемма.

$$(k-1)!\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)} =$$

$$= 3a_k + k!\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

Доказательство. Для $k = 1$, действуя по описанному методу, получаем:

$$S = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+1)} =$$

$$= \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{3}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Для $k > 1$ применим тот же метод:

$$(k-1)!\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}=$$

$$=\frac{(k-1)!}{k^2(k+1)(k+2)\dots(2k-1)}+(k-1)!\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n+k}{n^2(n+1)(n+2)\dots(n+k)}=$$

$$=\frac{2\cdot k!}{k^2(k+1)\dots 2k}+(k-1)!\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}+$$

$$+k!\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+k)}$$

Остаётся убедиться в том, что первый член равен $2a_k$, а сумма первого из рядов (для её вычисления надо использовать метод решения задачи 1д) вдвое меньше. Алгебраическую проверку мы оставляем читателям.

. Из леммы видно, что ряд S можно, применив этот способ многократно, преобразовать к виду $3(a_1+a_2+\dots+a_k)+\sum'$, где $\sum'$ — оставшийся ряд. Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что $S-3T_k\to 0$, т. е. оценить ряд

$$S-3T_k=k!\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

Каждый член этого ряда меньше $\frac{1}{n^2}$, а

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{k}\to 0 \text{ при } k\to\infty\,.$$

Так что $0<S-3T_k<\frac{1}{k}$. Переходя к пределу, получаем $S=T$.

3. Эта задача решается подобно задаче 2; способов ускорения сходимости много. Всего удобней и полезней (с точки зрения задачи 5) домножать числитель и знаменатель на n^2-1:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3(n^2-1)}=$$
$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}=1+\frac{1}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)}$$

(при суммировании первого ряда вновь использован результат задачи 1д).

Итерируя этот приём, мы получаем решение задачи 5:

5. Пусть $b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$. Применим лемму, аналогичную использованной в задаче 4.

Лемма.

$$((k-1)!)^2\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)(n^2-4)\dots(n^2-(k-1)^2)}=$$
$$=(-1)^{k-1}\cdot\frac{5}{2}b_k-(k!)^2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)\dots(n^2-k^2)} \qquad (1)$$

Доказательство проводится так же, как в задаче 4, с умножением числителя и знаменателя всех членов, кроме первого, на (n^2-k^2).

Завершить техническое оформление решения можно аналогично задаче 4. Рассмотрим последнее слагаемое в формуле (1). Все члены этого ряда одного знака. Заменим в знаменателе множитель n^3 на k^2n (от чего сумма лишь увеличится); тогда полученный ряд можно просуммировать. Мы получаем:

$$(k!)^2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)\dots(n^2-k^2)}<$$
$$<(k!)^2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{k^2n(n^2-1)\dots(n^2-k^2)}=\frac{(k-1)!^2}{(2k)!(2k)}\to 0 \qquad (2)$$

Поскольку, как видно из предудыщего,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{5}{2}(b_1+\dots+b_k)\pm(k!)^2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n^2-1)\dots(n^2-k^2)},$$

при больших k сумма исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сколь угодно точно приближается $\frac{5}{2}(b_1+\dots+b_k)$, а это и значит, что $\frac{5}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

6. Задача 6 является нерешённой проблемой. Можно спросить: откуда же уверенность, что коэффициент равен именно $36/17$? И как его подобрали?

Ответ на эти вопросы таков. Сперва (по аналогии с предыдущими формулами) угадали, что отношение $\sum\frac{1}{n^4}\Big/\sum\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$ есть рациональное число. Чтобы его подобрать, сумму обоих рядов вычислили с достаточной точностью, а частное разложили в непрерывную дробь. Напомним, что для такого разложения нужно выделить целую часть числа, а остаток представить как $1/x$ и повторить эту процедуру несколько (в принципе — неограниченное число) раз. Например:

$$\pi=3{,}1415926\ldots=3+\frac{1}{1/0{,}14159\ldots}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{16{,}0\ldots}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{16+\ldots}}$$

Оборвав непрерывную дробь на k-том члене, мы обычно получаем хорошее приближение числа. Например:

$$\pi\approx 3;$$

$$\pi\approx 3\frac{1}{7}=3{,}142857\ldots;$$

$$\pi\approx 3\frac{1}{7+\frac{1}{16}}=3\frac{16}{113}=\frac{355}{113}=3{,}1415929\ldots$$

Если вы подозреваете, что данное число рационально (с небольшим знаменателем), то есть все основания думать, что, оборвав непрерывную дробь на втором или третьем члене, вы его как раз и получите. Так и было найдено число

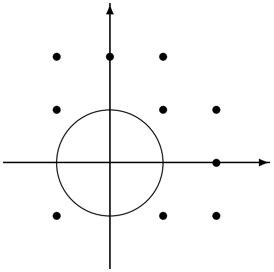
$$\frac{36}{17}=2+\frac{2}{17}=2+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}.$$

7. Многие решали эту задачу, аналогично второй, с умножением на $(\omega+1)$. Хотя этот метод действительно позволяет улучшить сходимость (до 5-й степени), но имеется значительно более идейное решение, которое позволяет сразу получить намного лучший результат.

А именно, следует домножить ряд (числитель и знаменатель) на (ω^4-1). Предварительно, разумеется, нужно исключить четыре точки: $x=\pm1$, $\pm i$. Таким образом,

$$\sum\nolimits' \frac{1}{\omega^4}=4+\sum\nolimits^{(1)}\frac{\omega^4-1}{\omega^4(\omega^4-1)}=4+\sum\nolimits^{(1)}\frac{1}{\omega^4-1}-\sum\nolimits^{(1)}\frac{1}{\omega^4(\omega^4-1)}$$

где значок (1) указывает, что сумма берётся по всем ω, $|\omega|>1$. (См. рисунок ниже).



Последний ряд сходится со скоростью $\frac{1}{\omega^8}$, и остаётся просуммировать первый ряд. Для этого прежде всего используем тождество

$$\frac{1}{\omega^4-1}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\omega-1}-\frac{1}{\omega+1}+\frac{i}{\omega-i}-\frac{i}{\omega+i}\right].$$

Рассмотрим сначала первые два слагаемых. В этой задаче абсолютно недопустимо суммировать их по всей плоскости (ниже станет ясно, что при этом не только применяется некорректный приём, но хуже того — он ведёт к неверному результату!). Поэтому рассмотрим, как положено, квадрат со стороной $2n$, содержащий гауссовы точки $\omega = a+bi$, $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant n$. Ясно, что почти для каждой точки получается два взаимно уничтожающихся слагаемых. Остаются только члены, соответствующие точкам ± 1, ± 2, $\pm i \pm 1$, а также — внимание! — большое число точек, образующих «бордюр» ширины 2 вдоль левой и правой сторон квадрата: $\omega = a + bi$, $-n \leqslant b \leqslant n$, $a = -n - 1$; $-n$; n; $n + 1$.

Члены, соответствующие первым восьми точкам, как нетрудно убедиться, дают для общей суммы «вклад» 1,25. Бордюр, как сказано выше, состоит из четырёх столбцов (и четырёх строк, которые нам сейчас рассматривать не нужно).

Для, скажем, третьего столбца «бордюра» ($a = n$) (с третьим столбцом работать проще всего, но разница непринципиальна) мы получаем сумму вида $\frac{-1}{4} \sum\limits_{b=-n}^{n} \frac{1}{n+bi}$. Сгруппируем вместе члены, соответствующие $b = k$ и $b = -k$:

$$\frac{1}{n+ki} + \frac{1}{n-ki} = \frac{2n}{n^2+k^2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

где k пробегает все значения от 1 до n. Кроме того, есть ещё неучтённый член $1/n$ при $b = 0$. Итак, сумма, соответствующая третьему столбцу «бордюра», равна $-\frac{1}{4n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Нетрудно видеть, что это выражение (с точностью до первого члена и множителя $-1/2$) есть интегральная сумма для интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

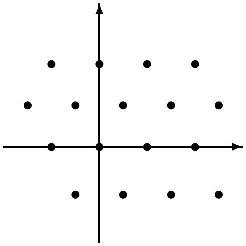
Это значит, что сумма по третьему столбцу (с учётом множителей) стремится к $-\frac{\pi}{8}$.

. Именно этот член очень легко потерять, рассуждая так: «возьмём сумму членов $\frac{1}{\omega - 1}$ по всей плоскости; ясно, что все члены попарно сокращаются, за исключением нескольких, близких к нулю...»

Легко убедиться, что точно к такому же пределу стремится сумма по трем другим столбцам, и вклад первых двух слагаемых в ответ равен $-\frac{\pi}{2}$. Таким же способом мы убеждаемся в том, что третье и четвёртое слагаемое дают ровно столько же. Итак, окончательно получаем:

$$\frac{1}{\omega^4} = 4 + 2(1{,}25 - \tfrac{\pi}{2}) - \sum \frac{1}{\omega^4(\omega^4 - 1)} = 6{,}5 - \pi - \sum \frac{1}{\omega^4(\omega^4 - 1)}\,.$$

8. Здесь прежде всего надо определить вид самого ряда. Правильный выбор: $\sum' \frac{1}{\omega^6}$, где знак $(')$, как выше, означает, что $\omega \neq 0$, а сумма берётся по всем $\omega = a + b\zeta$, a, b — целые, а $\zeta = \sqrt[3]{1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Такие ω образуют правильную 6-угольную решётку (см. рис.)



Аналогично предыдущей задаче, получаем:

$$\sum{}' \frac{1}{\omega^6} = 6 + \sum{}^{(1)} \frac{\omega^6 - 1}{\omega^6(\omega^6 - 1)} = 6 + \sum{}^{(1)} \frac{1}{\omega^6 - 1} - \sum{}^{(1)} \frac{1}{\omega^6(\omega^6 - 1)} =$$

$$= 6 + \frac{7}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \sum{}^{(1)} \frac{1}{\omega^6(\omega^6 - 1)} = \frac{19}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \sum{}^{(1)} \frac{1}{\omega^6(\omega^6 - 1)}\,.$$

Задача 6.

В решениях всех задач этой серии будем придерживаться следующих обозначений: если x — некоторая величина, то через x' будем обозначать результат округления x.

1а. Будем последовательно округлять a_i по следующему правилу: если $a'_1 + \dots + a'_{i-1} \geqslant a_1 + \dots + a_{i-1}$, то округляем a_i в меньшую сторону, в противном случае — в большую. Тогда для любого i выполняется неравенство $|(a_1 + \dots + a_i) - (a'_1 + \dots + a'_i)| < 1$. Следовательно после такого округления сумма $a_1 + \dots + a_n$ всегда сможет быть округлена до величины $a'_1 + \dots + a'_n$.

Важное замечание. Очевидно, что изменение любой из величин a_i на целое число никак не влияет на округляемость структуры. Поэтому для упрощения дальнейшего изложения будем (если не оговорено противного) предполагать значения всех a_i лежащими в полуинтервале $[0, 1)$.

1б$'$. Докажем, что после выполнения округления описанным в условии способом можно будет округлить все $S_{i,j}$ с сохранением равенств. Действительно, рассмотрим некоторую сумму

$$S_{i,j} = a_i + \dots + a_j = x_j - x_{i-1}.$$

Тогда из выбора a'_k следует, что $a'_i + \dots + a'_j$ в точности равно количеству целых точек в полуинтервале $[x_{i-1}, x_j)$. Обозначим это число через $N_{i,j}$. Тогда $S_{i,j} = t_1 + (N_{i,j} - 1) + t_2$ (см. рисунок 1б'). Так как $0 \leqslant t_1 < 1$ и $0 < t_2 \leqslant 1$, то $|S_{i,j} - N_{i,j}| < 1$ и, следовательно, $S_{i,j}$ можно округлить до $N_{i,j}$.

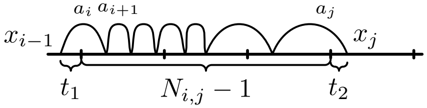


Рис. 1б$'$)

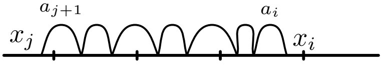


Рис. 1б$''$)

1б$''$. Пусть для множества $a_1, \dots, a_n$ выбраны округления $a'_1, \dots$ $\dots, a'_n$ так, что выполняются все условия задачи. Покажем, что можно выбрать такое x_0 из полуинтервала $[0, 1)$, что применение алгоритма, описанного в условии задачи 1б', дает в точности значения $a'_1, \ldots, a'_n$. Если $a'_1 = 0$, то выберем x_0 так, чтобы полуинтервал $[x_0, x_0 + a_1)$ не содержал целых точек, а если $a'_1 = 1$, то так, чтобы содержал. Пусть теперь мы уже «обработали» числа $a_1, \ldots, a_{i-1}$. В зависимости от значения величины a'_i, «подвинем» x_0 так, чтобы на полуинтервале $[x_{i-1}, x_i)$ лежала или, соответственно, не лежала целая точка, и при этом не нарушились соответствия алгоритму для чисел $a'_1, \ldots, a'_{i-1}$. Пусть на i-ом шаге оказалось невозможно «подвинуть» x_0 нужным образом. Пусть, для определенности, $a'_i = 1$ (случай $a'_i = 0$ рассматривается аналогично). Невозможность «подвинуть» x_0 требуемым образом означает, что какое-то x_j достигло некоторой целой точки с левой стороны, в то время как отрезок, соответствующий a_i все еще «не достает» до очередного целого узла (см. рисунок 1б$''$). Тогда $a'_{j+1} + \cdots + a'_i - 1 > x_i - x_j = S_{j+1,i}$, поэтому невозможно округлить $S_{j+1,i}$ так, чтобы все равенства сохранялись. Следовательно, если система чисел $a_1, \ldots, a_n$ округлена с сохранением всех требуемых сумм, то процесс выбора x_0, описанный выше, удастся довести до конца.

1в. Неверно. Рассмотрим структуру с 5 переменными, где взяты суммы всех пар и сумма всех пяти переменных. Присвоим всем переменным значения 0,41. Для округления суммы всех переменных, равной 2,05, необходимо по крайней мере два значения переменных округлить до 1. Тогда их сумма, равная 0,82, должна будет округляться до 2, что невозможно. Следовательно, невозможно округлить предложенную структуру при данных значениях переменных.

Результат задач **2а, 2б, 2в, 3а, 3б** и **3в** следует из задачи **4а**. Для дальнейшего изложения нам понадобится

Лемма о паре. Пусть даны числа a_1 и a_2. Тогда если округлить a_1 в меньшую сторону, а a_2 в большую сторону, то можно округлить и их сумму без нарушения равенства.

Доказательство леммы о паре предоставляется читателю в качестве самостоятельного упражнения.

2г. Неокругляемость данной структуры при нечётном n следует из решения задачи **4а**. Докажем округляемость этой структуры при чётном n. Пусть среди чисел есть целое. Перенумеруем числа по кругу, присвоив целому номер n. Тогда достаточно округлить числа так, чтобы сошлись суммы $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, … …, $x_{n-2} + x_{n-1}$ и $x_1 + \dots + x_{n-1}$. Мы можем это сделать согласно задаче **1б**.

Если целых значений нет, выберем среди них наиболее близкое (по модулю) к целому. Пусть, например, это x_1, и $x_1 + \varepsilon$ — целое ($|\varepsilon| < 1$). Заменим для всех k все числа x_{2k} на $x_{2k} - \varepsilon$, а x_{2k-1} на $x_{2k-1} + \varepsilon$. Тогда, в силу минимальности $|\varepsilon|$, если новое значение x_i можно округлить до некоторой величины, то и старое — тоже. А поскольку x_1 — целое, то, согласно предыдущему абзацу, можно округлить и всю структуру.

4а. Пусть дана Р-структура двудольного графа. Пусть вершины графа выкрашены в два цвета так, что концы каждого ребра выкрашены в разные цвета. Округлим все числа в вершинах одного цвета в меньшую сторону, а все числа в вершинах другого цвета — в большую. По лемме о паре можно округлить все суммы вдоль ребер с сохранением равенств.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть есть граф с округляемой Р-структурой. Зададим все значения в вершинах равными $1/2$. Тогда все суммы вдоль ребер равны 1, и, следовательно, не изменятся при округлении. Поэтому после округления у любого ребра число на одном конце будет равным 0, а на другом — 1. Если покрасить все вершины со значениями, округляемыми до 0, в один цвет, а все остальные — в другой, то эта раскраска будет удовлетворять условию двудольности. Утверждение доказано.

4б. Если какая-то грань многогранника имеет нечётное число вершин, то её нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы выполнялось условие двудольности, и, следовательно, Р-структура такого многогранника не округляема.

Пусть все грани многогранника имеют чётное число вершин. Покрасим какую-нибудь его вершину в красный цвет, соседние с ней вершины — в синий, соседние с этими синими вершинами — опять в красный и т. д. Допустим, рядом окажутся две точки одинакового цвета. Тогда найдётся нечётный цикл — замкнутая несамопересекающаяся ломаная из нечётного числа ребер. Она охватывает несколько граней. Подсчитаем сумму рёбер этих граней. Она равна числу рёбер на граничной ломаной плюс удвоенное число остальных рёбер (каждое из остальных входит в две грани и считается дважды). С другой стороны, в каждой грани чётное число ребер, поэтому сумма рёбер должна быть чётна — противоречие. Значит, получится двудольный граф, и структура округляема.

Замечание. Первоначально в условии было пропущено, что многогранник — выпуклый. Для невыпуклого многогранника утверждение, вообще говоря, неверно: например для тора с треугольной дырой (см. рисунок 4б).

4в. Может (см. рисунок 4в).

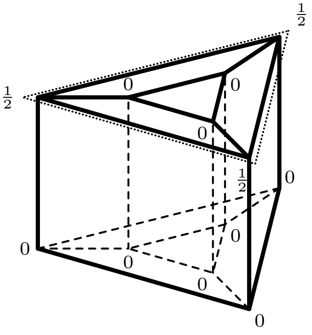


Рис. 4б)

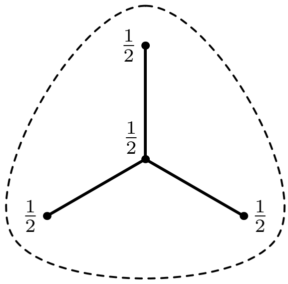


Рис. 4в)

5. Примеры не округляемых значений переменных для задач **5а, 5б, 5в, 5г** (случай нечётного n) и **5д** показаны на соответствующих рисунках.

Докажем округляемость Г-структуры для n-угольной пирамиды без нижней грани при чётном n. Покрасим все вершины кроме центральной в красный и синий цвета так, что никакие две вершины одного цвета не соединены ребром (т. е. «через один»). Все числа в красных вершинах, не равные 0, округлим до 1; вершину пирамиды округлим до 0. Докажем, что мы сможем округлить все числа в синих вершинах и суммы на гранях-треугольниках так, что все равенства сохранятся. Возможны три варианта (см. рисунок 5г(чёт), вершина y — синяя):

а) $x = z = 0$.
Тогда если $y = 0$, то возьмем $\Sigma'_1 = 0$, $\Sigma'_2 = 0$, а если $y > 0$, то $y' = 1$, $\Sigma'_1 = 1$, $\Sigma'_2 = 1$.

б) Только одно из чисел x, z равно нулю (для определённости, x). Тогда получаем $z' = 1$. Учитывая, что $\Sigma_1 < \Sigma_2$, получаем, что при $y = 0$ можем взять $\Sigma'_1 = 0$, $\Sigma'_2 = 1$, при $y > 0$ и $\Sigma_2 > 1$ возьмём $y' = 1$, $\Sigma'_1 = 1$, $\Sigma'_2 = 2$ и при $y > 0$ и $\Sigma_2 \leqslant 1$ возьмём $y' = 0$, $\Sigma'_1 = 0$, $\Sigma'_2 = 1$.

в) Оба числа x, z не равны нулю. Пусть, для определённости, $x \leqslant z$.
Тогда $x' = 1$ и $z' = 1$. Учитывая, что $\Sigma_1 \leqslant \Sigma_2$, получаем, что при $y = 0$ можем взять $\Sigma'_1 = 1$, $\Sigma'_2 = 1$, при $y > 0$ и $\Sigma_1 > 1$ возьмём $y' = 1$, $\Sigma'_1 = 2$, $\Sigma'_2 = 2$ и при $y > 0$ и $\Sigma_1 \leqslant 1$ возьмём $y' = 0$, $\Sigma'_1 = 1$, $\Sigma'_2 = 1$.

Доказательство закончено.

5е. Если в многограннике есть грань Г с нечётным числом сторон, то взяв все ее вершины и все грани, примыкающие к Г по ребру, получим нечётный цикл. Если есть вершина В, из которой выходит нечётное число ребер, то взяв все вершины, связанные с В ребром, и грани, имеющие В вершиной, получим опять нечётный цикл. Пусть нет ни того, ни другого, и пусть всего есть v

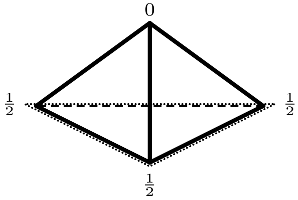


Рис. 5а)

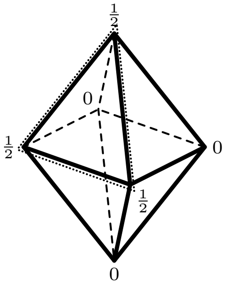


Рис. 5б)

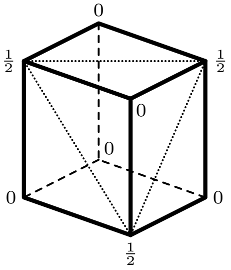


Рис. 5в)

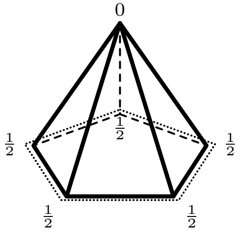


Рис. 5г(нечёт)

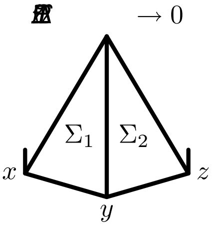


Рис. 5г(чёт)

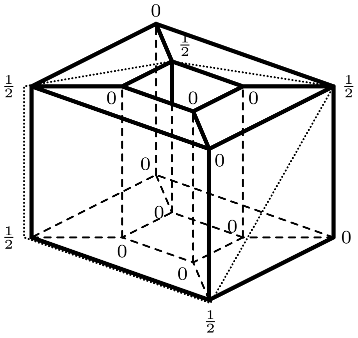


Рис. 5д)

вершин, r ребер и g граней. Поскольку из каждой вершины выходит не менее четырёх ребер, то $r \geqslant \frac{4v}{2} = 2v$. Аналогично, у каждой грани не менее четырёх сторон, поэтому $r \geqslant 2g$. Сложив эти неравенства, получим $2r \geqslant 2v + 2g$, что противоречит формуле Эйлера $v - g + r = 2$.

5ж. Общее решение этой задачи пока не известно. Приведём частный результат.

Рассмотрим многогранники, у которых грани — это многоугольники, и любые две грани либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общее ребро. Докажем, что у таких многогранников Г-структура не округляема.

Как и в **5е**, можно рассматривать только случай, когда у каждой грани чётное число сторон и из каждой вершины выходит чётное число ребер. Зафиксируем произвольную грань $Г$ и вершину B на ней. Рассмотрим набор H из всех вершин грани $Г$, кроме B, и всех вершин смежных с B. Все эти вершины, очевидно, различны и их нечётное число. Добавим к набору грани, которым принадлежит вершина B (тип 1) и грани, имеющие общее ребро с $Г$ (тип 2). Тогда каждая вершина набора лежит не менее чем в двух гранях набора. Либо это нечётный цикл, либо какая-то вершина набора принадлежит более чем двум граням набора. Это может быть только вершина A, смежная с B, которая дополнительно принадлежит грани $Г_1$ типа 2. Тогда, если C — вторая общая вершина граней $Г$ и $Г_1$, то вершины A, B, C и грани $Г$, $Г_1$ и грань с ребром AB образуют нечётный цикл. Значит, Р-структура указанного многогранника не округляема.

6а, 6б. Сначала рассмотрим случай, когда все суммы по строкам и по столбцам оказались целыми. Тогда если в какой-то ячейке оказалось нецелое число, то найдётся еще хотя бы одно нецелое число в той же строке, и хотя бы одно нецелое число в том же столбце. Покажем, как можно изменить некоторые нецелые переменные так, чтобы все суммы сохранились, возможности для округления остались бы теми же, а число нецелых переменных уменьшилось бы.

Возьмём какое-нибудь нецелое число и покрасим его в красный цвет. Как отмечено выше, в том же столбце есть еще по крайней мере одно нецелое число. Выберем какое-нибудь из таких чисел и покрасим его в синий цвет. Теперь возьмем какое-нибудь нецелое число в одной строке с этим синим числом и покрасим снова в красный цвет. Далее действуем по следующему правилу: если выбрано очередное красное число, то выбираем какое-нибудь нецелое число в том же столбце и красим в синий цвет, а если выбрано синее число, то выбираем нецелое в той же строке и красим его красным. При этом в каждой строке и в каждом столбце, которые мы проходим, будет выбрано ровно два числа, причем они будут окрашены в разный цвет. Продолжая выбор чисел таким способом мы в конце концов при очередном выборе попадем в столбец или строку, в которой уже выбраны одно или два числа. «Замкнём» наш цикл, может быть, отбросив некоторый его начальный кусок, так, чтобы сохранить чередование цветов (мы всегда сможем так сделать). Мы получили цикл чётной длины, в котором все значения нецелые и в каждой строке или столбце таблицы либо не содержится выбранных чисел, либо содержится ровно два числа разного цвета. Будем увеличивать все синие числа и уменьшать все красные на одну и ту же величину. При этом все суммы по строкам и по столбцам не изменятся. Будем изменять числа в этом цикле до тех пор, пока одно из них не станет целым. Если остались еще нецелые числа, снова построим цикл чётной длины и т. д. При этом все суммы по строкам и столбцам не изменятся, а никакое нецелое число не «перескочит» через целую точку. Таким образом, все образовавшиеся целые значения переменных могут быть получены из первоначальных нецелых при округлении. Итак, при условии целочисленности всех сумм таблица является округляемой структурой.

Рассмотрим теперь общий случай. Припишем снизу таблицы еще одну строку, в которую запишем с противоположным зна-

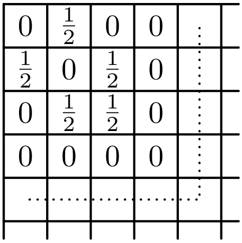


Рис. 6в1)

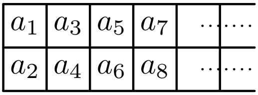


Рис. 6в2)

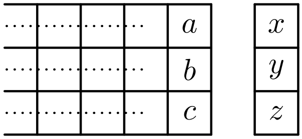


Рис. 6в3)

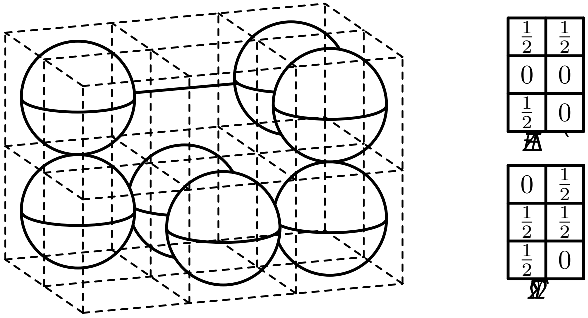
ком суммы в соответствующих столбцах, а справа — еще один столбец, в котором будут взятые с противоположным знаком суммы по соответствующим строкам. На пересечении добавленных строки и столбца напишем сумму всех чисел таблицы. Тогда в этой расширенной таблице суммы по всем строкам и по всем столбцам будут равны 0. По доказанному выше можно округлить значения во всех ячейках новой таблицы так, что соответствующие равенства сохранятся. Но это означает в точности то, что все суммы по строкам и столбцам в первоначальной таблице и сумма всех элементов могут быть округлены без нарушения равенств.

6в. Пусть для определенности $n \geqslant m \geqslant 2$. Возможны следующие случаи:

а) $m \geqslant 4$. Тогда для доказательства не округляемости структуры предъявим пример значений, при которых округление невозможно (см. рисунок 6в1).

б) $m = 2$. Занумеруем числа в ячейках так, как показано на рисунке 6в2. Тогда сумма по любому квадрату 2×2 будет суммой четырёх подряд идущих элементов. Из задачи **1б** следует, что можно провести необходимые округления при любых значениях переменных.

в) $m = 3$. Будем доказывать индукцией по n. Сформулируем индуктивное утверждение:



$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{2}$	0

0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0

Рис. 6г). Шарики отмечают клетки со значением $\frac{1}{2}$

В таблице $3 \times n$ можно округлить все элементы так, что выполнены следующие свойства:

(i) суммы во всех квадратах 2×2 округляемы требуемым образом;

(ii) пусть a, b и c — числа в последнем столбце таблицы (см. рисунок 6в3). Тогда суммы $a+b$ и $b+c$ можно округлить до $a'+b'$ и $b'+c'$ соответственно;

(iii) Если $a<c$, то $a' \leqslant c'$ (соответственно, если $a>c$, то $a' \geqslant c'$).

При $n=1$ это утверждение очевидно. Пусть для некоторого n утверждение доказано. Пусть добавлен еще один столбец с переменными x, y и z (см. рисунок 6в3). В силу леммы о паре можно округлить y так, что $b+y$ округляется до $b'+y'$. Рассмотрев несколько вариантов, легко получить возможность округлить x и z так, чтобы были выполнены свойства (i), (ii) и (iii).

6г. Если таблица содержит подтаблицу $2\times2\times3$, то она не округляема (см. нечётный 7-цикл на рисунке 6г). В случае $l=m=$ $=n=2$ структура совпадает с Р-структурой куба и, следовательно, округляема.

7. Двойственность соответствующих структур очевидна. Утверждение задачи 7г (и, следовательно, утверждения об округляемости и не округляемости двойственных структур) следует из того, что матрицы двойственных структур (см. задачу **10**) получаются одна из другой транспонированием.

9а. Пусть округляемая структура содержит нечётный цикл. Присвоим тем переменным, которые образуют этот цикл значения по 0,5, а всем остальным — по 0. Нетрудно показать, что при таких значениях переменных округлить структуру с сохранением всех сумм невозможно. Значит, округляемая структура не содержит нечётных циклов.

9б. Неверно. Рассмотрим структуру, изображённую на рисунке 4в. Она, очевидно, не содержит нечётных циклов, но не округляема.

10а. Докажем, что если есть минор, по модулю не меньший чем 2, то структура не округляема. Допустим, нам удалось отбросить часть сумм и зафиксировать часть переменных равными 0 так, что оставшиеся образуют систему линейных уравнений с ненулевым определителем. Тогда значения переменных однозначно определяются значениями сумм. Если при некоторых целых значениях сумм не все переменные окажутся целыми, то округлить их (без изменения сумм) не удастся. Поэтому оставшаяся подструктура и, следовательно, вся структура будут не округляемы.

Найдем такую систему уравнений. Для этого выберем среди всех миноров, по модулю не меньших чем 2, минор Δ наименьшего размера $k \times k$ и оставим только уравнения и переменные, соответствующие его строкам и столбцам. Покажем теперь, как подобрать целые суммы так, чтобы нашлась хотя бы одна нецелая переменная. Определитель равен сумме $\sum\limits_i a_{i1}A_{i1}$, где a_{i1} — элементы первого столбца, а A_{i1} — их алгебраические дополнения. Без ограничения общности все $a_{i1} \leqslant 1$, в силу минимальности размера Δ все произведения $a_{i1}A_{i1}$ по модулю не превосходят 1, и найдётся ненулевое слагаемое $a_{j1}A_{j1}$. Это значит, что если первый столбец исправить, оставив только a_{j1}, а остальные элементы сделав равными 0, то новый определитель Δ_1 станет равным ± 1. Сделаем исправленный столбец столбцом свободных членов, то есть присвоим суммам соответствующие целые значения и вычислим значения переменных. Тогда по правилу Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\pm 1}{\Delta}$, то есть нецелое число, и, следовательно, структура не округляема.

10б. Выпишем структуру как систему линейных уравнений. Объявим S_i тоже переменными и перенесем в левую часть. При этом все миноры останутся по модулю не превосходящими 1. При данном наборе значений все переменные с целыми значениями объявим константами и перенесем вправо. Пусть осталось $k > 0$ переменных с нецелыми значениями. Если ранг получившейся системы равен k, то найдётся ненулевой минор $k \times k$. Выберем соответствующие минору k уравнений и найдем значения переменных. Поскольку коэффициенты и свободные члены — целые, а сам минор по модулю равен 1, то, по правилу Крамера, решения — тоже целые. Противоречие. Значит, ранг системы меньше k (обозначим его l). Тогда можно $k - l$ переменных объявить свободными, а остальные выразить линейно через них и свободные члены. Увеличим одну из свободных переменных на такое минимальное число так, чтобы либо она, либо одна из связанных переменных стала бы целой. Тогда все остальные переменные не выйдут за пределы своего целого отрезка (то есть возможности для округления не ухудшатся), а число нецелых переменных уменьшится. Повторяя описанную процедуру, мы постепенно уменьшаем количество нецелых переменных, и, в конце концов, сделаем целыми все переменные и суммы. При этом первоначальные значения этих величин смогут быть округлены к полученным целым по правилам округления. Значит, структура округляема.