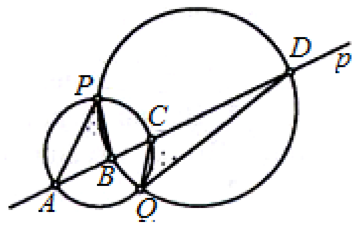
JMMO 1999

1. Докажи дека не постојат цели броеви a,b,c такви што
$$a^2+b^2-8c=6.$$
Решение. Нека $a,b,c\in\mathbb{Z}$ се такви што $a^2+b^2-8c=6$, односно
$$a^2+b^2=8c+6. \tag{1}$$
Значи, a^2+b^2 е парен број, па затоа a и b се со иста парност.
Ако a и b се парни, тогаш a^2+b^2 е делив со 4, но $8c+6=4(2c+1)+2$ не е делив со 4, па затоа во овој случај равенството (1) не е можно.
Ако a и b се непарни броеви, тогаш $8\,|\,a^2-1$ и $8\,|\,b^2-1$. Според тоа, $8\,|\,a^2+b^2-2=8c+4$, што е противречност, па затоа во овој случај равенството (1) не е можно.
Конечно, од претходните разгледувања следува дека не постојат цели броеви a,b,c такви што важи (1).

2. Дадени се две кружници кои се сечат во точки P и Q. Права p ги сече дадените кружници во точките A,B,C,D кои се распоредени како на цртежот десно. Докажи дека $\measuredangle APB=\measuredangle CQD$.



Решение. Имаме $\measuredangle PAC=\measuredangle PQC$, како агли над тетивата PC и $\measuredangle PBD=\measuredangle PQD$ како агли над тетивата PD. Понатаму, $\measuredangle PBD$ е надворешен агол за $\triangle ABP$, па затоа
$$\measuredangle PBD=\measuredangle PAB+\measuredangle APB.$$
Според тоа,
$$\measuredangle APB=\measuredangle PBD-\measuredangle PAB=\measuredangle PBD-\measuredangle PAC=\measuredangle PQD-\measuredangle PQC=\measuredangle CQD,$$
што и требаше да се докаже.

3. Нека $A_1,A_2,...,A_{1999}$ се произволни различни точки во рамнината. Докажи дека на било која кружница со радиус 1 постои точка M таква што збирот на растојанијата од точката M до секоја од точките $A_1,A_2,...,A_{1999}$ е поголем или еднаков на 1999.

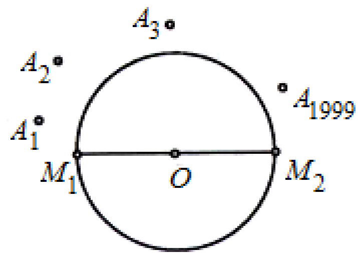
Решение. Нека k е произволна кружница со радиус 1 и нека M_1 и M_2 се две дијаметрално спротивни точки на k. Од неравенството на триаголник следува:

$2=\overline{M_1M_2}\le\overline{M_1A_1}+\overline{A_1M_2}$

$2=\overline{M_1M_2}\le\overline{M_1A_2}+\overline{A_2M_2}$

....

$2=\overline{M_1M_2}\le\overline{M_1A_{1999}}+\overline{A_{1999}M_2}$



Ако ги собереме последните неравенства добиваме

$$2\cdot 1999\le(\overline{M_1A_1}+\overline{M_1A_2}+...+\overline{M_1A_{1999}})+(\overline{A_1M_2}+\overline{A_2M_2}+...+\overline{A_{1999}M_2}).$$

Од последното неравенство следува дека барем еден од збировите во заградите е поголем или еднаков на 1999. Според тоа, една од точките M_1 и M_2 може да се земе за точката M .

Забелешка. Бидејќи дијаметарот M_1M_2 е произволен, заклучуваме дека постојат бесконечно многу точки M кои го задоволуваат условот на задачата.

4. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^6+a^3b^3+b^6\ge 3\sqrt[3]{a^9b^9}=3a^3b^3. \quad (1)$$

Сега, од неравенството (1) имаме:

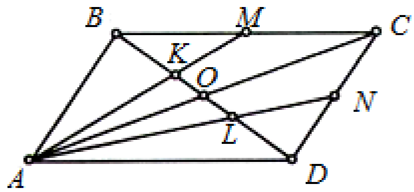
$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}=a^3+b^3-\frac{2a^3b^3(a^3+b^3)}{a^6+a^3b^3+b^6}\ge a^3+b^3-\frac{2a^3b^3(a^3+b^3)}{3a^3b^3}=\frac{1}{3}(a^3+b^3). \quad (2)$$

Понатаму, ако во неравенството (2) последователно ставиме x,y ; y,z и z,x , ги собереме добиените неравенства, го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и го искористиме равенството $xyz=1$, добиваме

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge\frac{2}{3}(x^3+y^3+z^3)\ge\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=2.$$

5. Нека $ABCD$ е произволен паралелограм. Точките M и N се средини на страните BC и CD, соодветно. Докажи дека правите AM и AN не го делат $\measuredangle BAD$ на три еднакви дела.

Решение. Да претпоставиме дека постои паралелограм кај кој правите AM и AN го делат $\measuredangle BAD$ на три еднакви дела. Нека O е пресекот на дијагоналите на паралелограмот (цртеж десно). Во $\triangle ABC$ отсечките



AM и BO се тежишни линии. Нека K е нивната пресечна точка. Имаме $\overline{BK}:\overline{BO}=2:1$, односно $\overline{KO}=\frac{1}{2}\overline{BK}$. Аналогно, од $\triangle ADC$ добиваме $\overline{LO}=\frac{1}{2}\overline{DL}$. Но, $\overline{BO}=\overline{OD}$, па затоа од горните равенства следува $\overline{BK}=\overline{KL}=\overline{LD}$. Според тоа, во $\triangle BAL$ отсечката AK е тежишна линија и симетрала на $\measuredangle BAL$. Последното значи дека $\triangle BAL$ е рамнокрак, т.е. AK е висина. Значи, $AK\perp BD$ и слично $AL\perp BD$, што не е можно.