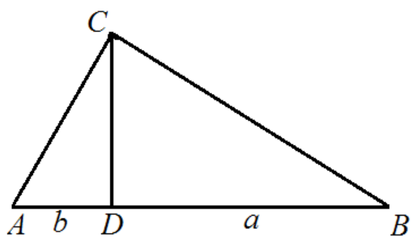
Самоил Малчески, Скопје

КОНСТРУКЦИЈА НА АРИТМЕТИЧКА, ГЕОМЕТРИСКА И ХАРМОНИСКА СРЕДИНА НА ДВЕ ОТСЕЧКИ

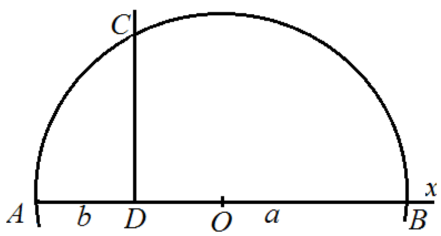
Нека се дадени две отсечките со должини a и b, $a>b$. Како што знаеме, аритметичката средина на отсечките со должини a и b можеме да ја конструираме ако на една полуправа од почетната точка O последователно конструираме отсечки $OA, \overline{OA}=a$ и $OB, \overline{OB}=b$, а потоа ја најдеме средната точка на отсечката OB, која се добива во пресек на отсечката OB и нејзината симетрала s (направи цртеж).

Понатаму, да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC со должина на хипотенуза $a+b$ (цртеж десно), во кој D е подножјето на висината повлечена во темето на правиот агол и важи $\overline{AD}=b$, $\overline{DB}=b$. Од сличноста на триаголниците ACD и CBD следува



дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$, односно $\overline{CD}=\sqrt{\overline{AD}\cdot\overline{DB}}=\sqrt{ab}$. Според тоа, во овој триаголник должината на висината спуштена од темето на правиот агол е еднаква на геометриската средина на отсечките со должини a и b. Имајќи го предвид претходно изнесеното геометриската средина на отсечките со должини a и b можеме да ја конструираме на следниот начин:

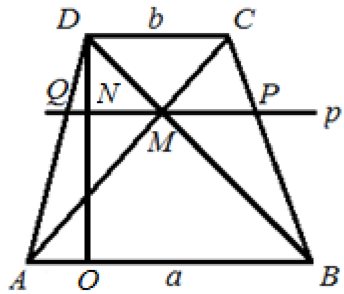
- конструираме полуправа AX, а потоа ги наоѓаме точките D и B такви што $\overline{AD}=b$, $\overline{DB}=$ b (цртеж десно),
- конструираме симетрала на отсечката AB и во пресекот со полуправата AX ја наоѓаме точката O,



- конструираме полукружница со центар во O и радиус $r=\overline{AO}$ и
- во точката D конструираме нормала на отсечката AB и во прескот на истата со полкружницата ја наоѓаме точката C, со што ја определивме отсечата CD за која важи $\overline{CD}=\sqrt{ab}$.

Доказот за точноста на оваа конструкција следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Да го разгледаме трапезот $ABCD$ чии основи се со должини a и b, $a>b$. Нека M е пресечната точка на дијагоналите AC и BD (цртеж десно). Во точката M повлекуваме права p паралелна на AB и CD, а во точката D ја повлекуваме висината на трапезот која правата p ја сече во точката N и основата AB во точката O. Нека



$$p\cap AD=\{Q\} \text{ и } p\cap BC=\{P\}.$$

Триаголниците AMQ и ACD се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{QM}}=\frac{\overline{DO}}{\overline{ON}}$. Исто така, триаголниците BMP и BDC се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{DO}}{\overline{ON}}$. Сега од последните две равенства следува дека $\overline{QM}=\overline{PM}$. Понатаму, триаголниците ABC и MPC се слични, па затоа важи $\frac{\overline{PM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{BC}}$, а од сличноста на триаголниците BMP и BDC имаме $\frac{\overline{PM}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}$. Последните две равенства ги собираме и добиваме

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PM}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CP}+\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1,$$

па затоа

$$\overline{PM}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}+\overline{CD}}=\frac{ab}{a+b}, \text{ т.е. } \overline{PQ}=2\overline{PM}=\frac{2ab}{a+b}.$$

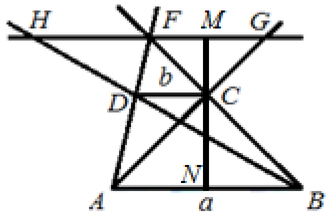
Од претходните разгледувања следува следнава конструкција на отсечка чија должина е еднаква на хармониската средина на должините a и b, $a>b$ на две дадени отсечки:

- конструираме трапез $ABCD$ со должини на основи a и b, произволна висина и произволен остар агол во темето A,
- конструираме точка $AC\cap BD=\{M\}$,
- во точката M конструираме права $p\,||\,AB$ и
- наоѓаме $p\cap AD=\{Q\}$ и $p\cap BC=\{P\}$, со што ја добиваме отсечката PQ за која важи $\overline{PQ}=\frac{2ab}{a+b}$.

Доказот за точноста на оваа конструкција следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

На крајот од оваа статија, користејќи ги својствата на трапезот со основи a и b, $a>b$, ќе покажеме како може да се конструира отсечка со должина $\frac{2ab}{a-b}$.

Да го разгледаме трапезот $ABCD$ чии основи се со должини a и b, $a>b$. Нека F е пресечната точка на краците AD и BC (цртеж десно). Во точката F повлекуваме права p паралелна на AB и CD, а во точката C ја повлекуваме висината на трапезот која правата p ја сече во точката M и основата AB во точката N. Нека $p\cap BD=\{H\}$ и $p\cap AC=\{G\}$.



Триаголниците AGF и ACD се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{MN}}$. Исто така, триаголниците BFH и BDC се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{FH}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{MN}}$. Сега од последните две равенства следува дека $\overline{GF}=\overline{HF}$. Понатаму, триаголниците ACD и AGF се слични, па затоа важи $\frac{\overline{FG}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}=1+\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$, а од сличноста на триаголниците ABF и DCF имаме $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}}=1+\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$. Од последните две равенства ги добиваме равенствата $\frac{\overline{FG}}{b}-1=\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$ и $\frac{a}{b}-1=\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$. Последните две равенства ги множиме и добиваме $(\frac{\overline{FG}}{b}-1)(\frac{a}{b}-1)=1$, од каде наоѓаме $\overline{FG}=\frac{ab}{a-b}$, т.е. $\overline{HG}=2\overline{FG}=\frac{2ab}{a-b}$.

Од претходните разгледувања следува следнава конструкција на отсечка чија должина е еднаква на $\frac{2ab}{a-b}$:

- конструираме трапез $ABCD$ со должини на основи a и b, произволна висина и произволен остар агол во темето A,
- конструираме точка $AD\cap BC=\{F\}$ и во F повлекуваме права $p\parallel AB$ и
- наоѓаме $p\cap BD=\{H\}$ и $p\cap AC=\{G\}$, со што ја добиваме отсечката FH за која важи $\overline{GH}=\frac{2ab}{a-b}$.

Доказот за точноста на оваа конструкција следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.