IV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Една четвртина од разликата на два броја е 200. Едниот од нив е три пати помал од другиот. Кои се тие броеви ?

2. Од две места A и B еден спроти друг тргнуваат велосипедист со брзина $10\frac{2}{5}$ километри на час и мотоциклист со четири пати поголема брзина од велосипедистот, а се сретнале по $1\frac{1}{2}$ часа. Одреди го растојанието од A до B.

3. Мерните броеви на должините од соседните страни на еден правоаголник се последователни природни броеви, а периметарот е природен број од четвртата десетка. Одреди ја плоштината на тој правоаголник.

4. Плоштината на еден двор, што има форма на правоаголник е 10 ари. Должината на едната страна е 25 метри. Да се огради дворот потребно е на секои 5 метри да се постави по еден столб. Пресметај колку столбови се потребни за оградување на дворот и по колку столбови ќе има секоја страна ?

V одделение

1. Ако $\frac{1}{4}$ од разликата на двата броја е 200, тогаш нивната вкупна разлика е 200·4=800. Ако едниот број го обележиме со x, тогаш другиот е 3x па
3x-x=800; 2x=800; x=400.

Едниот број е 400, а другиот е 3·400=1200.

2. Растојанието меѓу двете места ќе го најдеме ако го собереме изминатиот пат на велосипедистот и на мотоциклистот.

Велосипедистот изминал $10\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{2}$ km пат, а мотоциклистот $4\cdot 10\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{2}$ km пат.

Имаме: $10\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{2}+4\cdot 10\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{2}=\frac{52}{5}\cdot\frac{3}{2}+4\cdot\frac{52}{5}\cdot\frac{3}{2}=78$ km.

Растојанието меѓу двете места е 78 km.

3. Страните на правоаголникот се n и n+1, а неговиот периметар L=2(n+n+1)=2(2n+1).
Бидејќи периметарот е од четвртата десетка, тогаш:

$$30<2(2n+1)\leq 40\ \ /:2;$$
$$15<2n+1\leq 20;$$
$$14<2n\leq 19\ \ /:2;$$
$$7<n<10.$$
$$n\in\{8, 9\}.$$

Страните на правоаголникот се 8 cm и 9 cm или 9 cm и 10 cm. Плоштината на правоаголникот е P=72 cm^2 или P=90 cm^2.

4. Нека a=25 m е ширина, а b=1000:25=40 m е должина на дворот. Периметарот на дворот е: L=2(25+40)=130 метри.
За оградување на целиот двор потребни се 130:5=26 столбови. На поголемата страна има 9 столбови, а на помалата има 6 столбови.

VI одделение

1. Во една паралелка четвртина од учениците се членови на математичката секција. Ако во таа секција се појавеа уште три ученици, тогаш бројот на членовите на математичката секција ќе броеше третина од вкупниот број. Колку ученици од таа паралелка членуваат во математичката секција?

2. За a=–3, b=4 и c=–5, одреди ги вредностите на изразите:
а) |a+b|·c; б) |a|·(b-c).

3. Во правоаголник ABCD бисектрисата на аголот при темето A ја сече страната CD во точката M, така што $\overline{CM}=3$ cm. Периметарот на правоаголникот е 36 cm. Одреди ја плоштината на тој правоаголник.

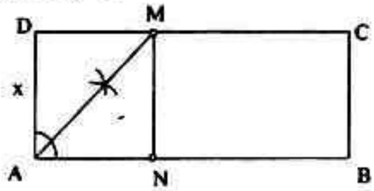
4. Колку страни има многуаголник, во кој можат да се повлечат 65 дијагонали?

VI одделение

1. *Тројцата ученици ќе претставуваат* $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ *од вкупниот број на ученици во* паралелката. Во паралелката има 36 ученици, а во математичката секција учествувале 9 ученици.

2. а) |a+b|·c=|-2+4|·(-5)=–10; б) |a|·(b–c)=|-2|·(4-(-5))=18.

3. Нека MN⊥AB. Четириаголникот ANMD е квадрат со страна x и L=4x+2·3.
4x+6=36; x=7,5 cm.
Плоштината на правоаголникот е:
P=(7,5+3)·7,5=78,75 cm ^{2}.



4. Ако n е бројот на темињата на многуаголникот, тогаш: $\frac{n(n-3)}{2}=65$;
n(n-3)=130; n(n-3)=13·10. Многуаголникот има тринаесет темиња.

VII одделение

1. Докажи дека ако средната цифра на трицифрен број е еднаква на збирот од другите две, тогаш тој број е делив со 11.

2. Реши ја равенката: $(x-3)\cdot(x+3)+7\cdot x-(x-4)\cdot(x+4)=35$.

3. Четириаголникот ABCD е паралелограм. Отсечката AM е симетрала на аголот при темето A и $M \in DC$.

а) Докажи дека триаголникот AMD е рамнокрак.

б) Одреди го периметарот на паралелограмот ако $\overline{AD} = 5$ cm и $\overline{MC} = 3$ cm.

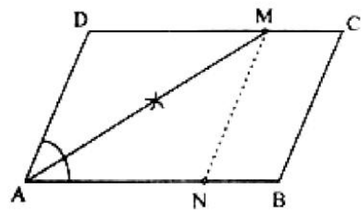
4. Низ центарот на впишаната кружница во триаголник ABC е повлечена права p паралелна со BC, која ги сече страните AC и AB, соодветно во точките M и N. Докажи дека е: $\overline{MN} = \overline{BN} + \overline{CM}$.

VII одделение

1. Види: III р.н. VII/1.

2.
$$(x-3)(x+3)+7x-(x-4)(x+4)=35$$
$$x^2-9+7x-x^2+16=35$$
$$7x=42$$
$$x=6.$$

3. а) Бидејќи AM е симетрала на аголот во темето A, тогаш:
$\angle DAM=\angle MAB$.
$\angle DMA=\angle MAB$ (како наизменични агли на трансферзала). Следува дека $\angle DAM=\angle DMA$, т.е. ΔADM е рамнокрак, $\overline{AD} = \overline{DM}$.



б) Ако повлечеме $MN \parallel AD$, тогаш ANMD е ромб со страна $\overline{AD}=5$ cm. (бидејќи $\overline{MC}=3$ cm). Периметарот на паралелограмот е:

$L=4\overline{AD}+2\overline{MC}$; $L=4\cdot5+2\cdot3= 26$ cm.

4. Види: III р.н. VII/4.

VIII одделение

1. Докажи дека k^3-k е деливо со 6 (k е природен број).

2. Докажи го идентитетот: $\frac{2}{3a+6}-\frac{a-2}{2a^2+4a}-\frac{2}{3a^2+12a+12}-\frac{4}{3a(a+2)^2}=\frac{1}{6a}$ за $a \neq 0$ и $a \neq -2$.

3. Во трапез ABCD со основи AB и CD дијагоналите AC и BD се сечат во точката S. Да се докаже дека $\overline{AS} \cdot \overline{SD} = \overline{BS} \cdot \overline{SC}$.

4. Во рамнокрак триаголник со периметар 32 cm, кракот е за 2 cm помал од основата. Одреди ја плоштината на впишаниот круг во тој триаголник.

VIII одделение

1. **Види:** I р.н. VIII/1.

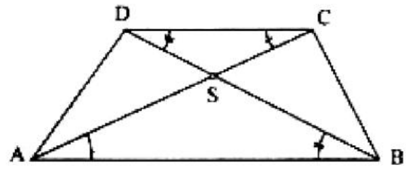
2. Ја трансформираме левата страна на идентитетот.

$$\frac{2}{3a+6}-\frac{a-2}{2a^2+4a}-\frac{2}{3a^2+12a+12}-\frac{4}{3a(a+2)^2}=\frac{2}{3(a+2)}-\frac{a-2}{2a(a+2)}-\frac{2}{3(a+2)^2}-\frac{4}{3a(a+2)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 2a(a+2)-3(a-2)(a+2)-2\cdot 2a-4\cdot 2}{6a(a+2)^2}=\frac{4a^2+8a-3a^2+12-4a-8}{6a(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{6a(a+2)^2}=\frac{1}{6a}.$$

за ($a\neq 0$ и $a\neq -2$).

3. Од паралелноста на AB и DC, следува дека $\angle BAC=\angle ACD$ и $\angle ABD=\angle BDC$ (како наизменични агли). Следува дека $\Delta ABS \sim \Delta DSC$. Од сличноста на триаголниците следува: $\overline{AS}:\overline{SC}=\overline{BS}:\overline{SD}$, т.е. $\overline{AS}\cdot\overline{SD}=\overline{SC}\cdot\overline{BS}$.

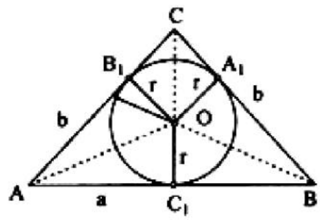


4. Ако a е основа на рамнокракиот триаголник ABC, а $b=a-2$ е неговиот крак, тогаш:

$$a+2(a-2)=32;$$
$$3a=36$$
$$a=12\text{ cm},\quad b=10\text{ cm}.$$

Висината на триаголникот кон основата е:

$$\overline{CC_1}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2};\quad \overline{CC_1}=\sqrt{10^2-\left(\frac{12}{2}\right)^2}=8\text{ cm}.$$



Плоштината на триаголникот е : $P=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CC_1}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48\ \text{cm}^2$. Плоштината на триаголникот изразена преку страните и радиусот е:

$$P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OC_1}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{OA_1}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OB_1};$$

$$48=\frac{1}{2}12\cdot r+\frac{1}{2}8\cdot r+\frac{1}{8}8\cdot r;$$

$$48=6r+5r+5r=16r;\quad r=3\text{ cm}.$$

Плоштината на кругот е: $P=r^2\pi$; $\quad P=9\pi\ \text{cm}^2$.