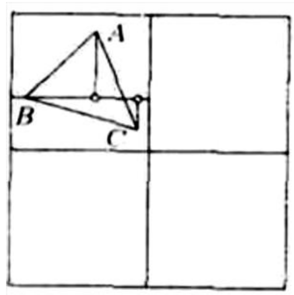
ЈБМО 1997

1. Девет точки се распоредени во внатрешноста на единечен квадрат. Докажи дека меѓу нив постојат три точки такви што плоштината на триаголникот чии темиња се овие точки е помала или еднаква на $\frac{1}{8}$.



Решение. Да го поделиме дадениот единечен квадрат на четири складни квадрати. Тогаш должината на страната на секој од овие квадрати е $\frac{1}{2}$, а од принципот на Дирихле следува дека постои квадрат во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е горниот лев квадат и дека во него се точките A, B, C. Понатаму, да воочиме такво теме на $\triangle ABC$ што правата која го содржи и е паралелна на една од страните на квадратот ја сече спротивната страна на триаголникот. Нека, на пример, тоа е темето B и нека таа права ја сече страната AC во точката D. Тогаш

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = \tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{AA_1} + \tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{CC_1} = \tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot(\overline{AA_1}+\overline{CC_1}),$$

каде A_1 и C_1 се соодветно подножјата на висините на триаголниците ABD и CBD повлечени од темињата A и C. Бидејќи $\overline{BD} < \frac{1}{2}$, и $\overline{AA_1} + \overline{CC_1} < \frac{1}{2}$, добиваме $P_{\triangle ABC} < \frac{1}{8}$.

2. Ако $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$, изрази го $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ како функција од k.

Решение. Од условот на задачата слеува

$$\frac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4} = k \text{, т.е. } \frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4} = k,$$

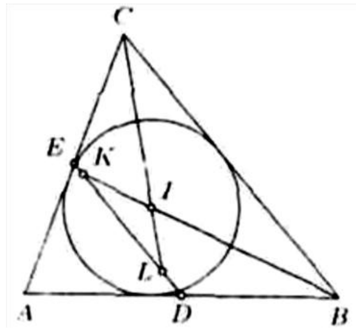
од каде добиваме $(\frac{x}{y})^4 = \frac{k+2}{k-2}$. Затоа:

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \frac{2(x^{16}+y^{16})}{x^{16}-y^{16}} = 2\frac{(\frac{x}{y})^{16}+1}{(\frac{x}{y})^{16}-1} = 2\frac{(\frac{k+2}{k-2})^4+1}{(\frac{k+2}{k-2})^4-1} = \frac{k^4+24k^2+16}{4k^3+16k}.$$

3. Даден е триаголник ABC со центар на впишаната кружница I. Нека точките D и E се соодветно средини на страните AB и AC и нека K

и L се пресечните точки на правата DE соодветно со BI и CI. Докажи дека

$$\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI}>\overline{BC}+\overline{KL}.$$



Решение. Бидејќи BI и CI се соодветно симетраи на аглите β и γ, добиваме $\overline{DK}=\overline{DB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{EL}=\overline{EC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ (цртеж десно). Според тоа,

$$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{KL}+\overline{BC},$$

т.е.

$$2s=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=2\overline{KL}+2\overline{BC},$$

каде со s е означен полупериметарот на триаголник ABC. Оттука следува

$$s=\overline{KL}+\overline{BC}. \qquad (1)$$

Понатаму,

$$\overline{AI}+\overline{BI}>\overline{AB},\ \overline{BI}+\overline{CI}>\overline{BC},\ \overline{CI}+\overline{AI}>\overline{CA},$$

па затоа

$$2(\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI})>\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=2s,$$

т.е.

$$\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI}>s. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува бараното равенство.

4. Определи ги аглите на $\triangle ABC$ за кој важи $R(b+c)=a\sqrt{bc}$, каде a,b,c се должините на страните на $\triangle ABC$, а R радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\frac{a}{2R}=\frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}}. \qquad (1)$$

Бидејќи $\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$, т.е. $\frac{b+c}{2}:\sqrt{bc}\geq 1$, а од друга страна $\frac{a}{2R}\leq 1$ (страна на триаголник не може да биде подолга од дијаметарот на кружницата опишана околу него), заклучуваме дека равенството (1) е можно ако и само ако $\frac{a}{2R}=1$ и $\frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}}=1$, односно ако и само ако $b=c$ и $R=\frac{a}{2}$. Според тоа, $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и неговите агли се $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

5. Ако $n_1, n_2, ..., n_{1998}$ се природни броеви такви што

$$n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 = n_{1998}^2,$$

докажи дека барем два од овие броеви се парни.

Решение. Не може само бројот n_{1998} да биде парен, бидејќи тогаш збир на непарен број непарни броеви би бил парен број, што е противречност. Исто така, не може само еден од првите 1997 броеви да е парен, на пример n_1, бидејќи тогаш

$$n_1^2 = n_{1998}^2 - n_2^2 - ... - n_{1997}^2,$$

па левата страна е парен, а десната страна е непарен број. Сега ќе покажеме дека сите дадени броеви не може да се непарни. Имено, ако сите броеви се непарни, тогаш бидејќи $k(k-1) \equiv 0 (\bmod 2)$ за секој $k \in \mathbb{N}$ добиваме дека за секој непарен број $2k-1$ важи

$$(2k-1)^2 = 4k(k-1) + 1 \equiv 1 (\bmod 8).$$

Последното значи дека

$$n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 \equiv 1997 \equiv 5 (\bmod 8) \text{ и } n_{1998}^2 \equiv 1 (\bmod 8),$$

што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека најмалку два од дадените броеви се парни.