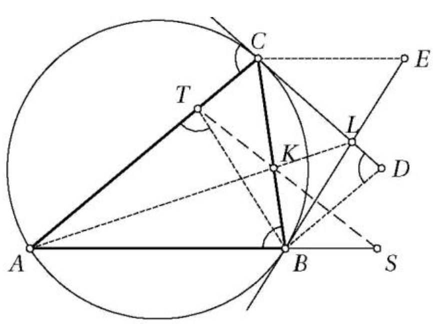
БМО 2017

1. Определи ги сите подредени парови природни броеви (x, y) за кои важи
$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2 .$$
Решение. Нека $x = da,\ y = db,\ d = \mathrm{NZD}(x, y)$. Дадената равенка може да се запише во видот
$$d(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2 + 43ab . \qquad (1)$$
од каде следува дека $a^2 - ab + b^2 \mid 43ab$. Бидејќи
$$\mathrm{NZD}(a, a^2 - ab + b^2) = \mathrm{NZD}(b, a^2 - ab + b^2) = \mathrm{NZD}(a, b) = 1 ,$$
од (1) следува дека $a^2 - ab + b^2 \mid 43$. Притоа $a^2 - ab + b^2 > 0$.
Ако $a^2 - ab + b^2 = 1$, тогаш мора да е $a = b = 1$ и од (1) следува $x = y = d = 22$.
Нека $a^2 - ab + b^2 = 43$, т.е. $(2a - b)^2 + 3b^2 = 172$ и нека без ограничување на општоста земеме $a \le b$. Тогаш $3b^2 \le 172 \le 4b^2$, што важи само за $b = 7$. Оттука $a = 1, d = 1$ или $a = 6, d = \frac{43}{13}$. Само првата можност има смисол и за истата се добива решението $(x, y) = (1, 7)$.
Конечно, сите решенија (x, y) се дадени со паровите $(1,7), (7,1), (22,22)$.

2. Нека Γ е опишаната кружница околу остроаголниот триаголник ABC во кој $\overline{AB} < \overline{AC}$. Со t_B и t_C да ги означиме соодветно тангентите на кружницата Γ во точките B и C, а со L нивната пресечна точка. Правата низ B паралелна со правата AC ја сече t_C во точката D, а правата низ C паралелна со AB ја сече t_B во точката E. Опишаната кружница околу триаголникот BDC ја сече правата AC во точка T која е меѓу A и C. Опишаната кружница околу триаголникот BEC ја сече правата AB во точка S така што B е меѓу A и S. Докажи дека правите ST, BC и AL се сечат во една точка.

Решение. Да означиме $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$. Од $\measuredangle BTA = \measuredangle BDC = 180^\circ - \measuredangle DCA = \measuredangle ABC$, следува дека триаголниците ATB и ABC се слични, па затоа $\frac{\overline{AT}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, т.е. $\overline{AT} = \frac{c^2}{b}$ и оттука $\overline{TC} = \frac{b^2 - c^2}{b}$. Слично е $\overline{AS} = \frac{b^2}{c}$ и $\overline{CB} = \frac{b^2 - c^2}{c}$.



Од друга страна, правата AL е симедијана во триаголникот ABC и ја сече страната BC во точка K таква што $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{c^2}{b^2}$. Според тоа,

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CT}}{\overrightarrow{TA}}=\frac{b^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{c^2}=-1,$$

па од теоремата на Менелај следува дека точката K припаѓа на поравата ST.

Забелешка. Равенството $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{c^2}{b^2}$ може да се добие и од синусната теорема. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}&=\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}=\frac{\sin\measuredangle BAK}{\sin\measuredangle ABK}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACk}{\sin\measuredangle CAk}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAL}{\sin\measuredangle CAL}\\&=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAL}{\sin\measuredangle ABL}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACL}{\sin\measuredangle CAL}\cdot\frac{\sin\measuredangle ABL}{\sin\measuredangle ACL}\\&=\frac{c}{b}\cdot\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}\cdot\frac{\overline{AL}}{\overline{CL}}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\measuredangle ABC}=\frac{c^2}{b^2}.\end{aligned}$$

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$n+f(m)\text{ е делител на } f(n)+nf(m)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$n+f(m)\mid f(n)+nf(m)-n(n+f(m)=f(n)-n^2.$$

За $m=n=1$ добиваме $f(1)+1\mid f(1)-1$, па затоа $f(1)=1$.

Функцијата $f(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека за некој a важи $f(a)\neq a^2$. Од $a+f(m)\mid\,|f(a)-a^2|$ следува $f(m)\le A=|f(a)-a^2|-a$. Од друга страна, за $m=1$ имаме $n+1\mid f(n)+n$, односно $f(n)\equiv 1(\bmod n)$, но $f(n)<A+1$, па мора да е $f(n)=1$ за секој $n\ge A$. Конечно, за секој $n>A$ важи

$$n+f(m)\mid f(m)(n+f(m))-(f(n)+nf(m))=f(m)^2-1,$$

па затоа $f(m)=1$, за секој $m\in\mathbb{N}$, што исто така е решение на задачата.

Според тоа, сите решенија се функциите $f(x)=x^2$ и $f(x)=1$.

4. Околу тркалезна маса седат $n>2$ ученици. На почетокот секој ученик има точно по една бонбона. Во секој чекор секој ученик избира една од следниве две операции:
   1) му дава една своја бонбона или на ученикот лево од себе или на ученикот десно од себе,
   2) ги дели сите свои бонбони на две множества (не задолжително непразни) и едно множество му дава на ученикот лево, а друго на ученикот десно од себе.

Сите операции во еден чекор се извршуваат истовремено. За распоредот на бонбоните ќе велиме дека е *достижен* ако може да се добие во конечно многу чекори. Определи го бројот на достижните распореди.
(Два распореди се различни ако барем еден ученик во нив има различен број бонбони.)

Решение. Вкупниот број распореди (достижни и недостижни) е $\binom{2n-1}{n}$.

Лема. Во два чекори, секој ученик може да додаде бонбона (ако ја има) на ученик на две места лево или десно од себе, така што состојбата кај останатите ученици ќе остане непроменета.
Доказ. Да разгледаме три последователни ученици A, B и C одлево надесно, при што A има барем една бонбона. Нека сите ученици ја извршуваат операцијата 2). Тогаш секоја бонбона произволно се поместува за едно место налево или надесно. Првиот чекор може да се реализира така што сите бонбони ќе се поместат надесно, а вториот чекор може да се реализира така што сите бонбони ќе се вратат налево, освен една кај ученикот B која ќе се помести надесно кај ученикот C. Така една бонбона на ученикот A завршила кај ученикот C. Другата насока е аналогна. ■
Нека n е непарен број. Бидејќи растојанието меѓу секои два ученика во една од насоките е парно, со користење на лемата, секој ученик може да му додаде бонбона на произволен ученик во парен број чекори. Според тоа, сите распореди се достижни.
Нека сега n е парен број. Со едноставна индукција се покажува дека по секој чекор кај учениците на парни, односно непарни позиции се наоѓа барем по една бонбона. Распоредите во кои сите бонбони се кај $\frac{n}{2}$ ученици на парни или $\frac{n}{2}$ ученици на непарни позиции се недостижни, а нив ги има $2\binom{\frac{3n}{2}-1}{n}$.
Останува да докажеме дека сите останати распореди се достижни.
Според лемата, доволно е да докажеме дека за секој $a = 1, 2, ..., n-1$ може да се добие барем еден распоред во кој точно a бонбони се наоѓаат на парни позиции. За почеток, според лемата, сите бонбони може да се проследат на два соседни ученици A и B, каде A е на парна позиција. Нека во тој момент, без ограничување на општостша, A има $a' > a$ бонбони. Во првиот потез, A ќе додаде една бонбона на ученикот B, а B една бонбона на својот втор сосед C. Во вториот потез, A и B ќе разменат по една бонбона, а C ќе ја врати бонбоната на ученикот B. Сега A има $a'-1$ бонбона, а B ги има преостанатите $n-a'+1$ бонбони. Повторувајќи ја оваа постапка $a'-a$ пати ја постигнуваме целта.

Значи, достижни распореди има $\binom{2n-1}{n}$ ако n е непарен, и $\binom{2n-1}{n} - 2\binom{\frac{3n}{2}-1}{n}$ ако n е парен.