

ММО 2012

1. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^4 + 2y^4 + 4z^4 + 8t^4 = 16xyzt. \quad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека (x, y, z, t) е решение на дадената равенка. Јасно, $2 \mid x$, т.е. $x = 2a$ и ако замениме во (1), а потоа поделиме со 2 добиваме $y^4 + 2z^4 + 4t^4 + 8a^4 = 16ayzt$. Но, тоа значи дека $2 \mid y$, т.е. $y = 2b$ и ако замениме во претходното равенство, а потоа поделиме со 2 добиваме $z^4 + 2t^4 + 4a^4 + 8b^4 = 16abzt$. Сега добиваме дека $2 \mid z$, т.е. $z = 2c$, па ако замениме во претходното равенство, а потоа поделиме со 2 добиваме $t^4 + 2a^4 + 4b^4 + 8c^4 = 16abct$. Но, тоа значи дека $2 \mid t$, т.е. $t = 2d$ и ако замениме во претходното равенство, а потоа поделиме со 2 добиваме

$$a^4 + 2b^4 + 4c^4 + 8d^4 = 16abcd,$$

т.е. четворката $(a, b, c, d) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}, \frac{t}{2})$ е решение на (1). Продолжувајќи ја постапката добиваме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ подредената четворка $(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n}, \frac{t}{2^n})$ е целобројно решение на (1). Последното значи дека секој од броевите x, y, z, t е произволен број пати делив со 2, а тоа е можно ако и само ако $x = y = z = t = 0$.

2. Нека a, b, c, d се позитивни реални броеви такви што $abcd = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{bc+cd+da-1} + \frac{1}{cd+da+ab-1} + \frac{1}{da+ab+bc-1} + \frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq 2.$$

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\begin{aligned} (1+bc+cd+da)(1+ab) &= 1+bc+cd+da+ab+ab^2c+abcd+a^2bd \\ &= 2+ab+bc+cd+da+\frac{b}{d}+\frac{a}{c} \\ &\geq 2+ab+bc+cd+da+2\sqrt{\frac{ab}{cd}} \\ &= 2+2ab+ab+bc+cd+da, \end{aligned}$$

т.е.

$$1+bc+cd+da \geq 2 + \frac{ab+bc+cd+da}{1+ab},$$

односно

$$\frac{1}{bc+cd+da-1} \leq \frac{1+ab}{ab+bc+cd+da}. \quad (1)$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{1}{cd+da+ab-1} \leq \frac{1+bc}{ab+bc+cd+da}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{da+ab+bc-1} \leq \frac{1+cd}{ab+bc+cd+da}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq \frac{1+da}{ab+bc+cd+da}. \quad (4)$$

Ако ги собереме неравенствата (1)-(4) добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{bc+cd+da-1} + \frac{1}{cd+da+ab-1} + \frac{1}{da+ab+bc-1} + \frac{1}{ab+bc+cd-1} &\leq \frac{4+ab+bc+cd+da}{ab+bc+cd+da} \\ &= 1 + \frac{4}{ab+bc+cd+da} \\ &\leq 1 + \frac{4}{4\sqrt[4]{(abcd)^2}} = 2. \end{aligned}$$

Втор начин. Воведуваме смени $ab = p, bc = q$. Затоа $cd = \frac{1}{p}, ad = \frac{1}{q}$, па даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} + \frac{1}{p+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} + \frac{1}{p+q+\frac{1}{q}-1} + \frac{1}{p+q+\frac{1}{p}-1} \leq 2.$$

Сега, ако искористиме дека $p + \frac{1}{p} \geq 2$ и $q + \frac{1}{q} \geq 2$, добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} + \frac{1}{p+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} + \frac{1}{p+q+\frac{1}{q}-1} + \frac{1}{p+q+\frac{1}{p}-1} &\leq \frac{1}{1+\frac{1}{p}} + \frac{1}{1+\frac{1}{q}} + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} \\ &= \frac{p}{1+p} + \frac{q}{1+q} + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 2. \end{aligned}$$

3. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ за кои важи

$$f(x+y) < f(x) + f(y),$$

$$f(f(x)) = [x] + 2.$$

Решение. Нека $f(0) = a$. Тогаш

$$f(a) = f(f(0)) = 2 \text{ и } f(2) = f(f(a)) = a + 2.$$

Со продолжување на оваа постапка добиваме дека

$$f(2k) = a + 2k \text{ и } f(a + 2k) = 2k + 2,$$

па е

$$2k + 2 = f(a + 2k) < f(a) + f(2k) = 2 + a + 2k,$$

од каде следува $a > 0$. Ако ставиме $x = y = a$, добиваме

$$a + 2a = f(2a) < f(a) + f(a) = 4,$$

па затоа $3a < 4$ и како $a > 0$, добиваме $a = 1$. Оттука со примена на

$$f(2k) = a + 2k \text{ и } f(a + 2k) = 2k + 2,$$

добиваме $f(x) = x + 1$ за секој $x \in \mathbb{N}$.

За $x = y = \frac{1}{2}$ имаме

$$2 = f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) < 2f\left(\frac{1}{2}\right),$$

па затоа $f\left(\frac{1}{2}\right) > 1$. Од друга страна,

$$1 + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2, \text{ т.е. } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

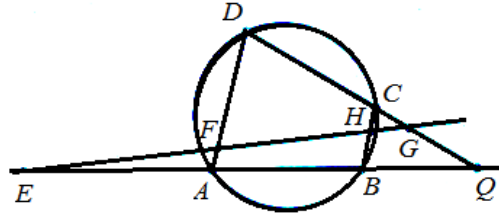
што е противречност. Според тоа, не постои функција која ги задоволува бараните услови.

4. Нека е дадена кружница k и три колинеарни точки E, F, G такви што E и G лежат надвор од k , а F лежи внатре во k . Докажи дека ако $ABCD$ е произволен четириаголник впишан во k таков што F лежи на AD , а E и G на продолженијата на страните AB и CD , тогаш страната BC минува низ фиксна точка H колинеарна со E, F и G , која што не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Нека $ABCD$ е четириаголник кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш правата EG ја сече страната BC во внатрешна точка, која ќе ја означиме со H . Ќе разгледаме два случаја.

Прв случај. Правите AB и CD не се паралелни и се сечат во точката Q . Од теоремата на Менелај за триаголникот EQG и правата CB и DA , соодветно имаме

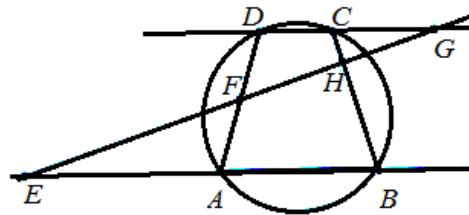
$$\frac{\overline{QC}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{HE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BQ}} = 1, \quad \frac{\overline{QD}}{\overline{DG}} \cdot \frac{\overline{GF}}{\overline{FE}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{AQ}} = 1.$$



Ако ги помножиме последните две равенства и искористиме дека $\overline{QC} \cdot \overline{QD} = \overline{BQ} \cdot \overline{AQ}$ (степен на точката Q во однос на кружницата k), добиваме $\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{CG} \cdot \overline{DG}}{\overline{EB} \cdot \overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{GF}}$. Според тоа, односот $\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}}$ не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$, бидејќи односот $\frac{\overline{FE}}{\overline{GF}}$ не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$ и не зависи ниту односот $\frac{\overline{CG} \cdot \overline{DG}}{\overline{EB} \cdot \overline{EA}}$,

бидејќи $\overline{CG} \cdot \overline{DG}$ и $\overline{EB} \cdot \overline{EA}$ се соодветно степените на точките G и E во однос на кружницата k .

Втор случај. Правите AB и CD се паралелни. Тогаш $\triangle GCH \sim \triangle EBH$, $\triangle GFD \sim \triangle EFA$ и затоа $\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{EB}}$, $\frac{\overline{EA}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GF}}$.



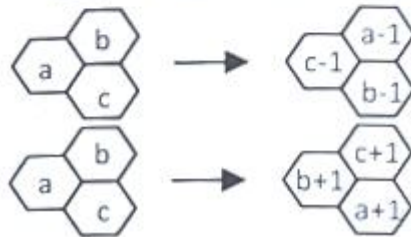
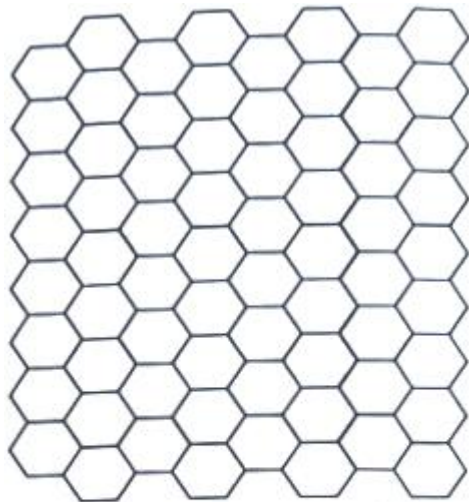
Последните две равенства ги множиме и по средувањето

добиваме $\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{CG} \cdot \overline{DG}}{\overline{EB} \cdot \overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{GF}}$, што значи дека и во овој случај односот

$\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}}$ не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$.

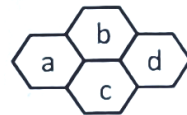
И во двата случаја добивме дека за произволен четириаголник $ABCD$ страната BC ја сече отсечката EG во точка H која ја дели EG во константен однос кој не зависи од изборот на четириаголникот, што значи дека страната BC минува низ фиксна точка H колинеарна со E, F и G , која што не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$

5. Дадена е шестаголна табела, како на цртежот, која има 2012 колони. Во непарните колони има по 2012 шестаголници, а во парните колони има по 2013 шестаголници. Во секој шестаголник од i -тата колона е запишан бројот i . Дозвоени се промени на броевите во табелата на следниов начин: произволно избираме три соседни шестаголници, ги ротираме броевите и ако ротацијата е во насока на движењето на стрелките на часовникот тогаш трите броја ги намалуваме за 1, а ако ги ротираме во насока спротивно на насоката на движењето на стрелките на часовникот трите броја ги зголемуваме за 1 (види цртеж). Колку најмногу нули може да се добијат во табелата со користење на вака дефинираните потези.



Решение. Лесно се добива дека збирот на сите запишани броеви во табелата при делење со 3 дава остаток 2. Понатаму, овој збир со секој потез се зголемува или се намалува за 3, па затоа по секој потез збирот на сите запишани броеви во табелата при делење со 3 дава остаток 2.

Ако имаме фигура како на цртежот десно, односно фигура која од неа се добива со ротации за прав агол, тогаш на местото на бројот d по конечен број потези може да се добие 0. Навистина:



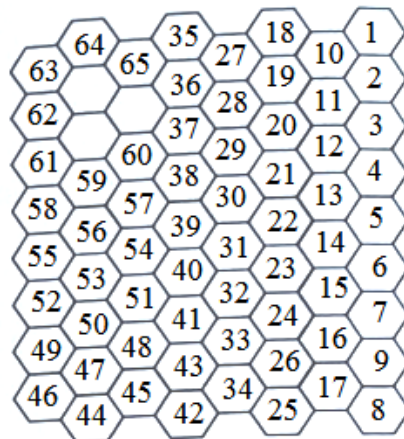
- 1) ако $d, b-1$ или $c+1$ е делив со 3, тоа ќе го направиме со ротирање на броевите b, c, d ,
- 2) ако b е делив со 3, тогаш прво во насока на стрелката на часовникот ги ротираме броевите a, b и c (цртеж десно), со што на местото на бројот c добиваме број кој зголемен за 1 е делив со 3, а потоа како во 1) продолжуваме да ги ротираме броевите $a-1, d, b-1$,



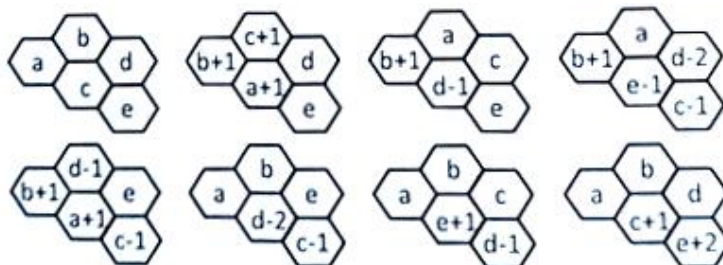
- 3) ако $b+1$ е делив со 3, тогаш ги реализираме потезите кои се прикажани на долните цртежи, со што на местото на бројот c добиваме број кој зголемен за 1 е делив со 3, а потоа како во 1) продолжуваме да ги ротираме броевите $a-2, b-3, c-2$.



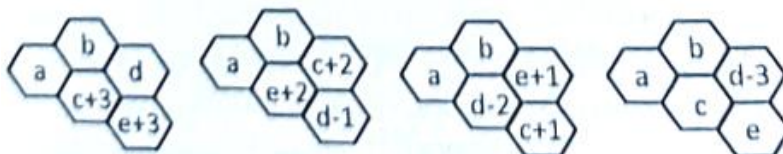
Со претходно опишаните постапки сите броеви во табелата, освен три, на пример вториот и третиот број во втората колона и вториот број во третата колона, може да се направат нули. Како тоа може да се направи за табела со 8 колони и по 8 полиња во непарна и 9 полиња во парна колона, е прикажано на цртежот десно, каде броевите во полињата го означуваат редоследот по кој се добиваат нулите.



Со следнава низа постапки произволен од овие три броја може да се намали за 3 или со обратната низа да се зголеми за 3. Прво со следните седум чекори c се зголемува за 1 и e се зголемува за 2:



а потоа симетрично c се зголемува за 2 и e се зголемува за 1. Потоа добиената состојба на левиот цртеж долу со три ротации во насока на стрелките на часовникот се сведува на состојбата прикажана на цртежот десно:



Ова значи дека преостанатите три броја може да се сведат на 0, 1 или 2. Бидејќи нивниот збир по модул 3 е еднаков на 2, заклучуваме дека два од нив мора да се еднакви (или се две нули и една двојка, или се две единици и една нула, или се две двојки и една единица). Во секој од овие случаи двата броја кои се еднакви може да се сведат на 0, а тој број што преостанува на 2. Според тоа, се добива дека сите елементи на табелата освен еден може да се сведат на 0.