

Bernoullijeva nejednakost

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. Razmatra se Bernoullijeva nejednakost. Primjene spomenute nejednakosti ilustrirane su na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.

Ključne riječi: Bernoullijeva nejednakost

Bernoulli's inequality

Abstract. Bernoulli's inequality is considered. Applications of the aforementioned inequality are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.

Key words: Bernoulli's inequality

U ovom članku bit će riječi o jednoj nejednakosti koju je 1689. godine izrekao i dokazao švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1654.–1705.) i koja je po njemu dobila ime. Dokazat ćemo tu nejednakost i njena dva poopćenja te pokazati primjenu.

Teorem 1 [Bernoullijeva nejednakost]. Neka je n prirodan broj i x realan broj veći od -1 . Tada vrijedi

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

Dokaz. Ako je $n = 1$ ili $x = 0$, tada je $(1+x)^n = 1+nx$. Za n veći od 1 i $x \neq 0$ nejednakost (i to strogu) dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ nejednakost vrijedi jer je $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj n veći od 1 vrijedi $(1+x)^n > 1+nx$ i dokažimo da ta nejednakost vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &> 1+(n+1)x \end{aligned} \tag{1}$$

Prema principu matematičke indukcije, stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1 i svaki realan broj $x \neq 0$. $\square$

Sljedeća dva teorema su poopćenja Bernoullijeve nejednakosti.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Teorem 2.

(a) Ako je $x > -1$ i $0 < \alpha < 1$, onda je $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.

(b) Ako je $x > -1$ i $\alpha < 0$ ili $\alpha > 1$, onda je $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Jednakost (u oba slučaja) vrijedi ako i samo ako je $x = 0$.

Dokaz. Rabeći Taylorovu formulu dobivamo

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2(1+\theta x)^{\alpha-2} \quad (0 < \theta < 1).$$

Kako je $x > -1$ i $0 < \theta < 1$, to je $1 + \theta x > 0$, pa su $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$ i $\alpha(\alpha-1)$ istog predznaka za $x \neq 0$. Odatle slijede navedene nejednakosti. $\square$

Teorem 3. Za sve realne brojeve $x_k > -1$, $k = 1, 2, \dots, n$, koji su istog predznaka, vrijedi nejednakost

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

Dokaz. Za $n = 2$ vrijedi stroga nejednakost jer je

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2.$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n veći od 1 vrijedi

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) > 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Tada zbog uvjeta $x_ix_j > 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) imamo

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \\ & > (1+x_1+x_2+\dots+x_n)(1+x_{n+1}) \\ & = (1+x_1+x_2+\dots+x_n) + x_{n+1} + (x_1+x_2+\dots+x_n)x_{n+1} \\ & > 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1. $\square$

Zadatak 1. Neka su a i b pozitivni brojevi, $0 < b < a$, te neka je n prirodan broj veći od 1. Dokažite nejednakost

$$a^n - b^n > n(a-b)b^{n-1}.$$

Rješenje. Iz pretpostavke slijedi da je $\frac{a}{b} > 1$, tj. $\frac{a}{b} - 1 > 0$. U Bernoullijevu nejednakost $(1+x)^n > 1 + nx$ uvrstimo $x = \frac{a}{b} - 1$, pa imamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n > 1 + n\left(\frac{a}{b} - 1\right),$$

odakle dobivamo

$$a^n > b^n + n \cdot b^{n-1}(a-b)$$

odnosno

$$a^n - b^n > n(a - b)b^{n-1}.$$

Zadatak 2. Dokažite da za svaki prirodni broj $n > 1$ i svaki realni broj $x > -1$, $x \neq 0$, vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{x}{n}.$$

Rješenje. Prema Bernoullijevoj nejednakosti je $(1+x)^n > 1+nx$, tj. $1+x > \sqrt[n]{1+nx}$. Ako u ovu nejednakost umjesto x pišemo $\frac{x}{n}$, dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati.

Zadatak 3. Dokažite da za svaki prirodni broj $n > 1$ vrijedi nejednakost

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer je $2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2$. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki prirodni broj veći od 1 i dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Imamo

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1)n! \\ &< (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \\ &= 2 \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Kako iz Bernoullijeve nejednakosti slijedi

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2,$$

to je

$$(n+1)! < 2 \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

Zadatak 4. Rabeći Bernoullijevu nejednakost dokažite da je niz (a_n) , zadan sa $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, strogo rastući.

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{2n+1}} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^{n+1} \cdot \frac{1}{n}}{((n+1)^2)^{n+1}} \cdot (n+1) = \frac{(n(n+2))^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &> \left(1 + (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1, \end{aligned}$$

to je $a_{n+1} > a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5. Dokažite da je niz (a_n) , zadan sa $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, strogo padajući.
Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Kako je prema Bernoullijevoj nejednakosti

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n(n+2)} \cdot (n+1),$$

to je

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &< \frac{1}{1 + \frac{n+1}{n(n+2)}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{n(n+2)}{n^2+3n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n+1} < 1. \end{aligned}$$

Dakle, $a_{n+1} < a_n$ pa je niz strogo padajući.

Zadatak 6. Dokažite da je niz (a_n) , zadan sa $a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$, gdje je k proizvoljan prirodni broj, omeđen i odozdo i odozgo.

Rješenje. Prema Bernoullijevoj nejednakosti je

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{k}{n} = 1 + k,$$

pa je zadani niz odozdo omeđen.

Omeđenost odozgo najprije dokažimo za $k = 1$, tj. za niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Prema Bernoullijevoj nejednakosti je

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n > 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Slijedi

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}} < 4.$$

Kako je

$$1 - \frac{1}{4n^2} < 1,$$

imamo

$$1 + \frac{1}{2n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}$$

odakle slijedi

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}\right)^{2n} < 4$$

odnosno $a_{2n} < 4$. Kako je niz (a_n) strogo rastući, to je $a_n < a_{2n} < 4$, odnosno

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Omeđenost odozgo sada dokažimo za proizvoljan prirodan broj k . Iz Bernoullijeve nejednakosti slijedi

$$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k,$$

pa je

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nk} < 4^k.$$

Zadatak 7. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 i $-1 < \alpha < 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Rješenje. Prema poopćenoj Bernoullijevoj nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} &< 1 + \frac{\alpha+1}{n}, \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} &< 1 - \frac{\alpha+1}{n}. \end{aligned}$$

Pomnožimo obje nejednakosti sa $n^{\alpha+1}$:

$$\begin{aligned} (n+1)^{\alpha+1} &< n^{\alpha+1} + (\alpha+1)n^\alpha, \\ (n-1)^{\alpha+1} &< n^{\alpha+1} - (\alpha+1)n^\alpha. \end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned} (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} &< (\alpha+1)n^\alpha, \\ (n-1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} &< -(\alpha+1)n^\alpha. \end{aligned}$$

Podijelimo prvu nejednakost sa $\alpha+1$, a drugu sa $-(\alpha+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} &< n^\alpha, \\ \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} &> n^\alpha. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Zadatak 8. *Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi nejednakost*

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2^n + 1}{2^n} > 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Prema poopćenoj Bernoullijevoj nejednakosti je

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2^n + 1}{2^n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] D. BLANUŠA, *Viša matematika, prvi dio, prvi svezak*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [2] P. JAVOR, *Matematička analiza, Zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [3] D. S. MITRINOVIĆ, D. D. ADAMOVIĆ, *Nizovi i redovi*, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
- [4] D. S. MITRINOVIĆ, D. MIHAILOVIĆ, P. M. VASIĆ, *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
- [5] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1996.
- [6] A. TAKAČI, Đ. TAKAČI, N. ĐAPIĆ, I. ŠTAJNER-PAPUGA, *Zbirka zadataka iz analize I*, Institut za matematiku PMF-a, Novi Sad, 2000.