Шефкет Арсланагиќ
Сараево

Подобрување на едно алгебарско неравенство

На докажувањето на неравенства треба да се обрати големо внимание во наставата по математика за надарени ученици. Кога учениците ќе стекнат солидно знаење од оваа област, тогаш како нормално се поставува прашањето за надградба, односно прашањето за подобрување (рафинирање) на одредени неравенства (доколку е тоа можно). За ваквите теми е пишувано во книгите [1] и [2] наведени во литературата на крајот на статијата.

Во оваа работа ќе дадеме подобрување на две интересни алгебраски неравенства. Прито, ќе ги користиме познатите неравенства, неравенство меѓу бројните средини и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц (Cauchy-Scwarz_Buniakowsky). Во продолжение следуваат тие неравенства.

Неравенство 1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c. \tag{1}$$

Доказ. Во [2] се наоѓа членак кој се однесува на неравенството

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{x_1+x_2+...+x_n} \tag{2}$$

при $x_i>0$, $a_i\in R$, $i=1,2,3,...,n$.

Даден е доказ на ова неравенство и одреден број на примери на неравенства кои се докажуваат со помош на неравенството (2) за $n=3$ т.е. со неравенството

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \tag{3}$$

при $x,y,z>0$ и $a,b,c\in R.$

Сега, од неравенството (3) добиваме

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c$$

а ова е неравенството (1) кое треба да го докажеме. Во (3) важи равенство ако и само ако $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$. Според тоа, во нашиот случај важи равенство, ако и само ако

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a},$$

а од овде лесно се добива дека $a=b=c$.

Ќе покажеме дека е точно неравенството

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\ . \tag{4}$$

Доказ. Неравенството (4) очигледно е еквивалентно со неравенството

$$\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right)+\left(\frac{b^2}{c}+c-2b\right)+\left(\frac{c^2}{a}+a-2c\right)\geq\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

или

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\geq\frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \tag{5.1.}$$

Сега, според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц (за $n=2$)

$$\left[\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\right](c+a)\geq(|b-c|+|c-a|)^2\geq(a-b)^2$$

па според тоа

$$\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\geq\frac{(a-b)^2}{c+a}\ .$$

За да го докажеме неравенството (5), доволно е да докажеме дека е точно неравенството

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(a-b)^2}{c+a}\geq\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\ ,$$

односно

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{a+b+c}\ . \tag{5.2.}$$

Сега не е тешко да се докаже, земајќи во предвид дека $a,b,c>0$, дека неравенството (5.2.) е еквивалентно со неравенството

$$(b-c-a)^2\geq 0\ .$$

Со тоа е докажана точноста на неравенството (4). Во нереавенството (4) важи равенство ако и само ако $a=b=c$.

На крај да забележиме дека неравенството (4) е посилно од неравенството (1), бидејќи

$$a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\geq a+b+c\ .$$

Неравенство 2. Нека се a, b, c реални позитивни реални броеви. Докажи дека точно неравенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\ . \tag{6}$$

Доказ. Според неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина за три позитивни реални броеви имаме:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=1,$$

т.е.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3.$$

Ќе покажеме дека важи неравенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3+\frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca} \tag{7}$$

каде $a,b,c>0$.

Доказ. Неравенството (7) очигледно е еквивалентно со неравенството

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 3(ab+bc+ca)+(a-c)^2$$

односно

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+\left(\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b}-ab-bc-ca\right)\geq(a-c)^2.$$

По средувањето добиваме

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+\frac{a(b-c)^2}{c}+\frac{b(c-a)^2}{a}+\frac{c(a-b)^2}{b}\geq(a-c)^2$$

или

$$\frac{(a-b)^2(b+2c)}{b}+\frac{(b-c)^2(c+2a)}{c}\geq\frac{(a-c)^2(a-2b)}{a}. \tag{8}$$

Со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, имаме

$$\frac{(a-b)^2(b+2c)}{b}+\frac{(b-c)^2(c+2a)}{c}\geq\frac{\left[(a-b)+(b-c)\right]^2}{\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}}=\frac{(a-c)^2(b+2c)(c+2a)}{2ab+2bc+2c^2}.$$

За да го докажеме (8) доволно е да докажеме дека е точно неравенството

$$\frac{(b+2c)(c+2a)}{2ab+2bc+2c^2}\geq\frac{a-2b}{a}$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$4(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)+4b^2c+11abc\geq 0.$$

Последното неравенство е очигледено точно заради неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за три позитивни броеви, која во овој случај е

$$\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{3}\geq\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2}=abc,$$

односно

$$ab^2+bc^2+ca^2\geq 3abc.$$

Со ова е докажано неравенството (8) а со тоа и неравенството (7). Во (7) е исполнето равенство ако и само ако $a = b = c$.

Очигледно е дека неравенството (7) е посилно (појако) неравеснтво од неравенството (6), бидејќи

$$3 + \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3 .$$

ЛИТЕРТУРА

[1] Arslanagić Šefket, Matematička zbirka zadači so osnovi na teorija od elementarna matematika, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006

[2] Arslanagić Šefket,Matematička čitanka, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ