Ирина Шаркова, Софија

ПОСЛЕДНИТЕ ЦИФРИ

Иако се само десет, цифрите отсекогаш ги фасцинирале математичарите. Една од причините за тоа е што во повеќето азбуки се пишува со повеќе од 20 симболи, но се добива помал број на зборови, отколку броеви со десетте цифри. Тоа е така, бидејќи секоја комбинација од десетте цифри е број, а додека секоја комбинација од буквите не е осмислен збор.

Особено интересни се последните цифри на некој број, кој се добива со наоѓање на различни збирови или производи. Така, во многу задачи во многу задачи токму наоѓањето на последните цифри го дава решението на задачата, па затоа некои од вас се прашуваат како едноставно може да се решат ваквите задачи. Во нашите следни разгледувања ќе се осврнеме на неколку задачи, во кои ќе разгледаме некои од методите за наоѓање на псоледните цифри на даден збир или производ.

Задача 1. Определи ги последните две цифри на збирот

$$2!+4!+6!+...+2010!\text{, каде } n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\,.$$

Решение. Јасно е дека, за да ги најдеме последните две цифри на збирот, не треба да го пресметаме дадениот збир (а тоа скоро и да не е можно да се направи без помош на комјутер). Затоа треба да откриеме некаква закономерност (правило) за последните две цифри на секој од собирците. Да направиме неколку пресметувања:

$$2!=1\cdot 2,\quad 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,\quad 6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$$

и така последната цифра на третиот собирок е еднаква на нула. Продолжуваме понатаму:

$$8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=40320\,,\quad 10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=3628800$$

и така последните две цифри петтиот собирок се нули. Не е тешко да заклучиме, дека оттука натаму сите собирци во збирот ќе завршуваат барем на две нули, но тоа треба да се докаже. На пример, ако $n!$ завршува на две нули, тогаш од $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$ ќе следува дека завршува барем на две нули.

Од досегашните разгледувања следува дека сите собирци после 10! завршуваат на две нули. Тоа значи, дека за да ги најдеме последните две цифри на збирот, треба да ги собереме првите четири собирци. Имаме

$$2!+4!+6!+8!=2+24+720+40320=41066\,,$$

од каде следува дека последните две цифри на дадениот збир се 66. ■

Задача 2. Во низа се запишани 100 последователни броеви деливи со 7, при што првиот број е 7. На колку нули завршува производот на овие броеви?

Решение. Првите 100 последователни природни броеви деливи со 7 се $7\cdot 1, 7\cdot 2, 7\cdot 3,..., 7\cdot 100$. Според тоа, производот кој не интересира е еднаков на $7^{100}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$. Бројот 7^{100} се дели само со степени на бројот 7 и затоа од него меѓу последните цифри нема да се добие цифрата нула. Останува да го најдме бројот на нулите на $100!$. Во еден производ нула се добива ако имаме множител $5\cdot 2$, па затоа доволно е да го најдеме бројот на петките во $100!$ (тие се среќаваат поретко од двојките). Според тоа, треба да определиме колку од броевите во $100!$ се делат со 5 и колку се делат со 25, бидејќи броевите кои се делат со 25 ќе даваат по две нули. Сега не е тешко да пресметаме дека вкупниот број на петки е 24: од 5, 15, 35, 45, 55, 65, 85 и 95 се добива по една нула (вкупно 8), од 25, 50, 75 и 100 се добиваат по две нули (вкупно 8) и од 10, 20, 30, 40, 60, 70, 80 и 90 се добива по една нула (вкупно 8). Според тоа, производот завршува на $8+8+8=24$ нули. ■

Задача 3. Во низа се запишани 100 броеви. Првиот е 12, вториот 18, а секој следен број е аритметичка средина на претходните броеви. Определи ги последните четири цифри на производот на запишаните броеви.

Решение. Ги знаеме само првите два броја од низата: 12 и 18. Не е тешко да пресметаме, дека третиот број е $\frac{12+18}{2}=15$, четвртиот број е $\frac{12+18+15}{3}=15$, петтиот број е $\frac{12+18+15+15}{4}=15$ и јасно е, дека треба да докажеме, дека сите останати членови на низата се еднакви на 15. Нека $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a_{n+1}=15$. Тогаш $\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}}{n}=\frac{15n+15}{n+1}=15$, од што следува дека почнувајќи од третиот член па натаму сите членови на низата се еднакви на 15.

За производот кој не интересира добиваме

$$a_1a_2...a_{100}=12\cdot 18\cdot 15^{98}=2^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot (3\cdot 5)^{98}=2^3\cdot 3^{101}\cdot 5^{98}=3^{101}\cdot 5^{95}\cdot 1000.$$

Сега, бидејќи 3^{101} е непарен број, а последната цифрана бројот 5^{95} е 5 заклучуваме дека последната цифра на бројот $3^{101}\cdot 5^{95}$ е 5, па затоа последните четири цифри на разгледуваниот производ се 5000. ■

Пред да преминеме на следните задачи, ќе се потсетиме на тоа како конгруенциите може да се искористат за наоѓање на последната цифра на степените. Имено, како што знаеме за конгруенциите важи:

- ако $a \equiv b \pmod{10}$ и $c \equiv d \pmod{10}$, тогаш $ac \equiv bd \pmod{10}$
- ако $a \equiv b \pmod{10}$, тогаш $a^k \equiv b^k \pmod{10}$.

Во следните три задачи ќе ги користиме овие својства.

Задача 4. Определи ја последната цифра на збирот:

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2011}.$$

Решение. Имаме,

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10},$$
$$3^2 \equiv 9 \pmod{10},$$
$$3^3 \equiv 7 \pmod{10},$$
$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Според тоа,

$$3^{4k} = (3^4)^k \equiv 1^k = 1 \pmod{10},$$
$$3^{4k+1} = 3^{4k} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3 \pmod{10},$$
$$3^{4k+2} = 3^{4k} \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 9 = 9 \pmod{10},$$
$$3^{4k+3} = 3^{4k} \cdot 3^3 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{10},$$

што значи дека дека последната цифра на 3^{4k} е 1, последната цифра на 3^{4k+1} е 3, последната цифра на 3^{4k+2} е 9 и последната цифра на 3^{4k+3} е 7. Тоа значи, дека збирот на секои четири последователни собирци завршува на 0, што следува од равенството $1+3+9+7=20$. Останува да изброиме колку групи собирци од по 4 имаме и колку остануваат во последната група. Од $2011 = 502 \cdot 4 + 3$ следува дека имаме 502 групи од по 4 собирци, чија последна цифра на збирот е еднаква на нула и уште три собрци за кој збир последната цифра ја определуваме од збирот $3+9+7=19$, што значи дека последната цифрана на целиот збир е 9. ■

Задача 5. Определи ја последната цифра на збирот

$$17^3 + 17^{13} + 17^{23} + \ldots + 17^{333}.$$

Решение. Имаме

$$17^1 \equiv 7 (\mathrm{mod}10),$$
$$17^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}10),$$
$$17^3 \equiv 3 (\mathrm{mod}10),$$
$$17^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}10).$$

Според тоа,

$$17^{4k} = (17^4)^k \equiv 1^k = 1 (\mathrm{mod}10),$$
$$17^{4k+1} = 17^{4k} \cdot 17 \equiv 1 \cdot 7 = 7 (\mathrm{mod}10),$$
$$17^{4k+2} = 17^{4k} \cdot 17^2 \equiv 1 \cdot 9 = 9 (\mathrm{mod}10),$$
$$17^{4k+3} = 17^{4k} \cdot 17^3 \equiv 1 \cdot 3 = 3 (\mathrm{mod}10),$$

што значи дека дека последната цифра на 17^{4k} е 1, последната цифра на 17^{4k+1} е 7, последната цифра на 17^{4k+2} е 9 и последната цифра на 17^{4k+3} е 3. Лесно се забележува дека броевите 3, 13, 23, 33, ..., 333 се од видот $4k+3$ или $4k+1$, по ред. Тоа значи дека збирот на два последователни собирци завршува на 0 и останува да видиме колку собирци имаме. За таа цел ја решаваме равенката $3+10x=333$ од каде наоѓаме $x=33$, што значи дека имаме 34 собирци. Конечно, последната цифра на дадениот збир е еднаква на 0. ■

На крајот од ова наше дружење ви предлагам самостојно да ги решите следниве три задачи:

Задача 6. Определи ги последните три цифри на збирот

$$1!+3!+5!+\ldots+2013!+2015!\,.$$

Задача 7. Во низа се запишани 100 последователни броеви деливи со 6, при што првиот број е 6. На колку нули завршува производот на овие броеви?

Задача 8. Определи ја последната цифра на збирот

$$1^{2010}+2^{2010}+3^{2010}+\ldots+100^{2010}\,.$$

Упатство. Прво докажи дека 1^{2010} завршува на 1, 2^{2010} завршува на 4, 3^{2010} завршува на 9, 4^{2010} завршува на 6, 5^{2010} завршува на 5, 6^{2010} завршува на 6, 7^{2010} завршува на 9, 8^{2010} завршува на 4, 9^{2010} завршува на 1 и 10^{2010} завршува на 0. Потоа збирот подели го на групи од по 10 собирци и добиените тврдења искористи ги за да ја определиш неговата последна цифра.