Osječki matematički list 14 (2014), 157-166

# Matematički dokaz

Maja Petrač*

**Sažetak**

U ovom radu ćemo pokušati objasniti važnost dokaza u matematici. Osnova razumijevanja dokaza je matematička logika, odnosno logička dedukcija. Opisat ćemo logički jezik koji služi kao osnova za izvođenje dokaza. Pri tome ćemo definirati i osnovne vrste sudova budući da i njih koristimo u procesu dokazivanja. Na kraju ćemo dati nekoliko primjera matematičkih dokaza, koristeći različite tehnike.

**Ključne riječi**: *dokaz, logička dedukcija, aksiom, teorem*

# Mathematical proofs

**Abstract**

In this paper, we will try to explain the importance of a mathematical proof. Mathematical logic, i.e., logical deduction are fundamental to understanding proofs. We will describe a logical language since it serves as the basis for deduction of proofs. We will also define basic types of statements as they also make part of the proving process. Finally, we will give several examples of mathematical proofs by using various techniques.

**Keywords**: *proof, logical deduction, axiom, theorem*

*Basler osiguranje Zagreb d.d., Zagreb, email: maja.petrac@yahoo.com

# 1 Uvod

Opće je poznato da su dokazi u matematici izuzetno važni. Da bismo bili sigurni u ispravnost neke tvrdnje moramo dokazati njenu istinitost. U ovom radu ćemo pokušati objasniti ulogu dokaza u matematici. Osnova razumijevanja dokaza je matematička logika, odnosno logička dedukcija. Takva osnova je jedan vid apstraktne matematike koja otežava praćenje gradiva čak i onim studentima koji imaju dobro "matematičko" predznanje. U radu ćemo nakon isticanja važnosti matematičkih dokaza i opisivanja njihove uloge u matematici, opisati logički jezik koji služi kao osnova za izvođenje dokaza. Pri tome ćemo definirati aksiome i teoreme. Na kraju ćemo dati nekoliko primjera matematičkih dokaza upotrebom različitih tehnika. Redoslijed izlaganja u članku je preuzet iz [1].

# 2 Važnost dokaza u matematici

Dokazi u matematici izuzetno su važni. Ako imamo neku tvrdnju, tada je jedini način da budemo sigurni u njezinu istinitost izvođenje valjanog matematičkog dokaza. Za primjer, promotrimo sljedeći poznati matematički teorem.

**Primjer 1.** Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

Prost broj je pozitivan cijeli broj $p > 1$ koji se ne može zapisati kao umnožak dva, od njega, strogo manja pozitivna cijela broja $a$ i $b$. Iako većina ljudi sluti da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva, to baš i nije toliko očito. Čak i danas uz moćne kompjutere, možemo jedino potvrditi da postoje veliki prosti brojevi, ali još uvijek ne možemo ništa reći o postojanju prostih brojeva čija veličina prelazi kapacitete modernih računala. Istinitost ove tvrdnje dokazao je čuveni starogrčki matematičar Euklid prije otprilike 2300 godina. Euklidovom dokazu vratit ćemo se opet nešto kasnije. Međutim, treba uzeti u obzir da matematičar dokazivanjem i uči, čak i ako se njegovi napori da dokaže pretpostavku završe neuspjehom. Usporedimo matematičara koji dokazuje teorem s traženjem izlaza iz složenog labirinta. Ako je jedan put završio neuspjehom, proučavanjem tog puta može pomoći u pronalaženju nekog drugog puta koji je možda ispravan …Sve to, dakako, ne bi bilo moguće bez dubinskog poznavanja matematičke teorije.

Za dodatnu ilustraciju možemo se prisjetiti i Osnovnog teorema algebre (vidi [2]) velikog njemačkog matematičara Karla Friedricha Gaussa. Prvi potpuni dokaz ovog teorema sadržan je u Gaussovoj doktorskoj disertaciji

iz 1799. godine. Kasnije je Gauss pronašao još tri dokaza tog teorema, svaki baziran na različitim idejama i argumentima. Jedan od dokaza teorema se može vidjeti u [3].
Zanimljivo je dakle postojanje različitih dokaza istog teorema. Svaki dolazi iz potpuno različitog pristupa i matematičkog znanja pa je izazov pokušati ih sagledati kao dijelove šire slike. Dio poteškoća u shvaćanju pojma dokaza proizlazi iz činjenice da ljudi nemaju pravu sliku o tome što je ustvari matematika. Još od osnovne škole učimo djecu da je cilj riješiti jednadžbu, naći minimum funkcije, duljinu hipotenuze ... To je naravno nešto što matematika "radi", ali to nije sve ono što matematika zapravo jest. Matematika je razumijevanje zakona koji su iza brojeva, algebre i geometrije. Ona proučava apstraktne intelektualne konstrukte, koji, barem dok je matematičar zaokupljen njima, ni u najmanjem dijelu ne dodiruju fizički, osjetilni svijet [4]. Da bismo ušli u ovaj svijet, potrebno je koristiti apstraktne ideje i matematički dokaz.

# 3 Matematički dokaz

## 3.1 Sudovi

Svi smo svjesni činjenice da u matematici trebamo slijediti pravila. Kod pisanja matematičkog dokaza, to uistinu i radimo. Prije nego vidimo kako dokazi funkcioniraju, upoznajmo se s "pravilima igre", tj. s pravilima zaključivanja — matematičkom logikom. Matematička logika jedna je od grana matematike. Upoznavanje, kao i uvijek, započinjemo s najjednostavnijim poglavljem, a to su u našem slučaju algebra sudova i račun sudova. Osnovni objekti koje proučava algebra sudova jesu elementarni sudovi.

U mišljenju pojmovi ne dolaze odvojeno. Oni se na neki način međusobno povezuju. Ta veza među pojmovima jest sud (izjava, iskaz). Sud je dakle, suvisla deklarativna rečenica koja se u pogledu istinitosti podvrgava načelu isključenog trećeg i načelu kontradikcije, tj. mora biti ili istinita ili neistinita, nikad oboje, ili nijedno. Ako tvrdnja nije istinita, smatra se neistinitom.

Kao i u svakodnevnom jeziku, sudove (izjave) možemo negirati i povezivati veznicima. Pomoću osnovnih logičkih operacija iz jednostavnijih dobivamo složenije sudove. Tim logičkim operacijama odgovaraju u razgovornom jeziku riječi: "i", "ili", "ne", "ako–onda". U tablici su navedene osnovne logičke operacije, a primjeri za pojedinu operaciju se mogu vidjeti u [5].

| oznaka | naziv | piše se | čita se |
|---|---|---|---|
| & ($\wedge$) | konjunkcija | $P\&Q$ $(P \wedge Q)$ | $P$ i $Q$ |
| $\vee$ | disjunkcija | $P \vee Q$ | $P$ ili $Q$ |
| $\underline{\vee}$ | ekskluzivna disjunkcija | $P \underline{\vee} Q$ | ili $P$ ili $Q$ |
| $\neg$ | negacija | $\neg P$ | ne $P$ |
| $\Rightarrow$ | implikacija | $P \Rightarrow Q$ | $P$ povlači $Q$<br>$P$ implicira $Q$<br>ako $P$ onda $Q$<br>iz $P$ slijedi $Q$ |
| $\Leftrightarrow$ | ekvivalencija | $P \Leftrightarrow Q$ | $P$ je ekvivalentno sa $Q$<br>$P$ je ako i samo ako je $Q$<br>$P$ onda i samo onda ako $Q$ |

U algebri sudova ne zanima nas sadržaj nekog suda, već samo njegova vrijednost istinitosti. Pogledajmo sudove iz tablice i njihovu istinitost. Tvrdnja $P \wedge Q$ je istinita ako i samo ako su obje tvrdnje $P$ i $Q$ istinite. Tvrdnja $P \vee Q$ je istinita ako i samo ako je barem jedna od tvrdnji $P$ i $Q$ istinita. $\neg P$ je istinit ako i samo ako je $P$ lažan. Tvrdnju $P \Rightarrow Q$ smatramo lažnom samo u slučaju da je $P$ istinit, a $Q$ lažan. Inače je istina. Na primjer, izjava poput: "Ako danas odem u kino, tada je 5 cijeli broj" matematički je istinita, usprkos činjenici da ne postoji veza između dva dijela te tvrdnje i bez obzira na to je li prvi dio istinit ili ne. Konačno, tvrdnja $P \Leftrightarrow Q$ je istinita ako i samo ako $P$ i $Q$ imaju istu vrijednost istinitosti. Također još kažemo da su $P$ i $Q$ ekvivalentni. Koristeći gornje operacije možemo napraviti i složenije tvrdnje

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(P \vee \neg Q))$$

Dva dodatna igrača u ovoj igri su kvantifikatori, $\forall$ koji znači "za sve" i $\exists$ koji znači "postoji". Na primjer ovu tvrdnju

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n > x)$$

čitamo: "za svaki realan broj $x$ postoji prirodan broj $n$ takav da je $n$ veći od $x$". Označimo sa $\mathbb{Z}^+$ skup svih pozitivnih cijelih brojeva. Sljedeća izjava za $p \in \mathbb{Z}^+$ kaže da je $p$ prost broj

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+, (p = ab \Rightarrow (a = 1) \underline{\vee} (b = 1))$$

Logičke operacije koje smo naveli možemo zadavati na dva načina: navođenjem njihove tablice istinitosti ili zapisivanjem u obliku neke formule računa sudova.

## 3.2 Pravila zaključivanja i tautologije

Zaključivanje je jedno od tri osnovna oblika mišljenja (uz poimanje i suđenje). Prisjetimo se četiri osnovna pravila zaključivanja (izvoda):

1. pravilo otkidanja (modus ponens),
2. zakon silogizma,
3. pravilo generalizacije,
4. princip isključenja trećeg (tertium non datur).

Detaljnije o pravilima zaključivanja može se pročitati u [6]. Budući da se logičko zaključivanje bazira na tautologijama, sada ćemo se kratko upoznati i sa tim pojmom. Za neku formulu $T$ algebre sudova kažemo da je tautologija ako je istinita bez obzira na istinitost sudova od kojih je sastavljena, pišemo $T \equiv 1$ . Dakle, tautologija je opća izjava koja je istinita pod svim mogućim okolnostima. Primjeri su

1. pravilo otkidanja: $((P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q) \equiv 1$,
2. zakon silogizma: $(((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \equiv 1$,
3. pravilo generalizacije: $(\forall x)P(x)$,
4. princip isključenja trećeg: $P \vee (\neg P) \equiv 1$.

Uočimo da je svaka od ovih izjava istinita bez obzira jesu li P, Q ili R istiniti ili neistiniti. Kaže se da tautologije odražavaju zakonitosti ljudskog mišljenja (zaključivanja) (više o tautologijama u [7]). Logička dedukcija se postiže zamjenom (supstitucijom) u tautologiji. Druga krajnost logičkih izjava su kontradikcije. Kontradikcija je lažna pod svim okolnostima. Ustvari, svaka kontradikcija je negacija tautologije i obrnuto, svaka tautologija je negacija kontradikcije. Tipična kontradikcija je $P \wedge \neg P$.

## 3.3 Osnovne vrste matematičkih sudova

### 3.3.1 Aksiomi

Da bismo nešto dokazali, potrebno je znanje nekih prethodnih istina. Matematička logika sadrži načine kojima možemo razlučiti tvrdnje jedne od drugih, ali su nam svakako potrebne neke tvrdnje s kojima započinjemo. Te početne tvrdnje se zovu aksiomi. Postoje dvije razine aksioma: aksiomi

teorije skupova i aksiomi neke matematičke teorije. Aksiomi služe kao definicije koje opisuju matematički sustav. Često se shvaćaju kao tvrdnje koje su toliko očite da ih ne treba dokazivati. Međutim za aksiome nije prijeko potrebna očitost. Neki autori ili čak cijele struke umjesto termina aksiom preferiraju termin postulat. Često se iz nekih, više stilskih razloga, koriste podjednako oba termina. Matematička teorija je kao igra šaha, a aksiomi (postulati) odgovaraju pravilima igre. Ako se ne prihvate pravila, to više nije šah.

### 3.3.2 Teoremi

Teoremi su matematičke tvrdnje čije se istinitosti utvrđuju *dokazom*. U izgradnji neke matematičke teorije teoremi igraju važnu ulogu: oni proširuju i produbljuju znanje o tom području matematike i o njegovim objektima. Teoremi logički proizlaze iz aksioma i definicija. U formulaciji razlikujemo dva dijela: pretpostavku ili hipotezu i tvrdnju ili tezu. Najčešći je zapis teorema u obliku implikacije $P \Rightarrow Q$. Dokazati teorem znači logičkim zaključivanjem prijeći od pretpostavke do tvrdnje. Teoremi se ponekad nazivaju i leme, propozicije, korolari... Upotreba ovih pojmova vrlo često nije strogo određena i ovisi o kontekstu u kojem se koriste. U sljedećoj točki ćemo razmatrati vrste dokaza teorema.

## 3.4 Dokazi teorema

Dokaz teorema je konačan niz tvrdnji, pri čemu je svaka tvrdnja izvedena logično (tj. zamjenom u nekoj tautologiji) iz prethodnih tvrdnji ili korištenjem teorema čija je istinitost već utvrđena. Zadnja tvrdnja u nizu je tvrdnja teorema. Začetnik uvođenja dokaza je Tales, a u matematiku ga uvodi Pitagora. Sada bismo željeli dati neke primjere i tehnike dokaza koji će nam pokazati kako ovo funkcionira u praksi. Sličnih primjera se može naći i u [8].

### 3.4.1 Direktni dokazi

Mnogi teoremi su oblika $P \Rightarrow Q$ , odnosno oblika Ako ...Onda. Počinjemo pretpostavkom $P$ (ili nekom drugom utvrđenom istinom) te nastavljamo pomoću niza modus ponens kako bismo izveli nove tvrdnje, s tim da zadnja tvrdnja bude $Q$. Alternativno, koristimo zakon silogizma i niz implikacija da bismo dokazali $P \Rightarrow Q$. Navedimo primjer jednog direktnog dokaza.

**Primjer 2.** Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija dana sa $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, onda je funkcija $f$ injekcija.

*Rješenje.* Pretpostavimo da je $x_1 \neq x_2$ i $a \neq 0$. Budući da u skupu $\mathbb{R}\backslash 0$ svaki element ima multiplikativni inverz slijedi da je $ax_1 \neq ax_2$. Kako svaki element $b \in \mathbb{R}$ ima aditivni inverz iz $ax_1 \neq ax_2$ slijedi da je $ax_1 + b \neq ax_2 + b$, odnosno $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ovim smo dokazali injektivnost funkcije $f$. ◀

**Primjer 3.** Dokažimo da je suma dva racionalna broja, opet racionalan broj.

*Rješenje.* Neka su $r$ i $s$ racionalni brojevi. Po definiciji to znači da postoje cijeli brojevi $p$ i $q$ takvi da je $q \neq 0$ i $r = \frac{p}{q}$ i cijeli brojevi $u$ i $v$ takvi da je $v \neq 0$ i $s = \frac{u}{v}$. Zbrojimo li $r = \frac{p}{q}$ i $s = \frac{u}{v}$ dobivamo

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{pv + qu}{qv}$$

i kako je $q \neq 0$ i $v \neq 0$, onda je i $qv \neq 0$. Ovim smo $r + s$ izrazili kao kvocijent cijelih brojeva $pv + qu$ i $qv$ pri čemu je $qv \neq 0$ što znači da je $r + s$ racionalan broj. ◀

Primijetimo da smo u dokazima u većoj mjeri koristili hrvatski jezik. Kako bismo bili potpuno sigurni da su naši dokazi valjani, moramo upotrijebiti simbolički jezik i popisati sve korištene tvrdnje te provjeriti je li implikacije stvarno slijede iz tautologija. Međutim, ovo će dokaze učiniti nezgrapnima i teže razumljivima. Odlučili smo riješiti ovu dilemu koristeći hrvatski jezik, ali na vrlo ograničen način, tako da će dedukcije uključivati samo neophodne "logične" riječi poput "ako", "tada", "pretpostaviti", "stoga", "ili" itd.

### 3.4.2 Dokaz kontradikcijom

Ovo je druga strategija dokazivanja teorema $P \Rightarrow Q$. Za razliku od direktnog dokaza, put od pretpostavke do tražene tvrdnje je "zaobilazan". Počinjemo s pretpostavkom da je $P$ istinita, a $Q$ lažna, tj. pretpostavljamo $P \wedge \neg Q$. Dokaz se nastavlja sve dok ne izvedemo neku kontradikciju $F$. Time je dokaz završen jer nešto mora biti krivo, a jedina upitna stvar je bila naša pretpostavka $P \wedge \neg Q$. Prema tome, ako je $P$ istinita, $Q$ također mora biti istinita. Tehnički, temeljili smo našu shemu dokaza na tautologiji

$$((P \wedge \neg Q) \Rightarrow F) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$$

gđe je F kontradikcija. Za primjer ćemo dokazati već navedeni Euklidov teorem.

**Teorem 3.1.** Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, da je skup prostih brojeva konačan, tj. postoji najveći prosti broj $p$. Stoga su svi prosti brojevi $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots, p$. Promotrimo broj $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p + 1$. Broj $q$ je veći od broja $p$ pa stoga ne može biti prost broj jer je prema pretpostavci $p$ najveći prost broj. Budući je $q$ složen broj on se prema Fundamentalnom teoremu aritmetike (vidi [9]) može prikazati kao umnožak prostih brojeva, pa stoga mora biti djeljiv s barem jednim prostim brojem, dakle nekim od brojeva $2, 3, 5, \ldots, p$. To je u suprotnosti s pretpostavljenim oblikom broja $q$. Time smo dokazali polaznu tvrdnju kontradikcijom. □

U prethodnim razmatranjima upoznali smo se s direktnim i jednom vrstom indirektnog dokaza te na primjerima vidjeli kako se ove dvije metode koriste. Postavlja se pitanje koju od te dvije metode koristiti? Strategija bi mogla biti sljedeća. Najprije procijenimo izgleda li direktan dokaz obećavajuće. Treba početi sa tumačenjem značenja pojmova koji se javljaju u hipotezama, a onda to treba upotrijebiti u zaključivanju, zajedno sa aksiomima i ranije dokazanim teoremima koji bi nam mogli biti od pomoći. Ako izgleda da direktan dokaz ne vodi nikamo, onda treba pokušati s indirektnim dokazom.

### 3.4.3 Matematička indukcija

U prethodnim primjerima smo dokazivali teorem na način da smo iz nekog skupa aksioma logičkim zaključivanjem došli do novih tvrdnji (teorema). Takva metoda zaključivanja zove se deduktivna metoda. Osim deduktivnog zaključivanja, u matematičkim dokazima često se koristi i induktivna metoda koju ćemo sada i pokazati. Prije nego što navedemo princip matematičke indukcije, prisjetimo se važnog svojstva prirodnih brojeva (aksioma matematičke indukcije): Ako neka tvrdnja vrijedi za prirodni broj 1 i ako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $n$ slijedi da ona vrijedi i za prirodan broj $n + 1$, onda tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj.

Princip matematičke indukcije:

1. Baza indukcije: provjeravamo da tvrdnja vrijedi za prirodni broj 1.

2. Korak indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj $n$ i na osnovu te pretpostavke dokazujemo da ona vrijedi i za broj $n + 1$.

3. Zaključak: tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n$.

Sada ćemo navesti jedan primjer dokaza matematičkom indukcijom.

**Primjer 4.** Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $x \neq 1$. Dokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

*Rješenje.* Ovo ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

1. Baza indukcije: provjeravamo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
   $1 + x = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$, $x \neq 1$
2. Korak indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj $n$
   $1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \neq 1$.
   Dokažimo da iz te pretpostavke slijedi valjanost tvrdnje i za prirodni broj $n + 1$ :

$$\begin{aligned} 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+1+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

3. Zaključak: tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n$.

Prema principu matematičke indukcije dokazali smo tvrdnju. ◄

### 3.4.4 Princip golubinjaka

U rješavanju raznovrsnih problema, često je vrlo korisna i uspješna primjena jednog od najpoznatijih kombinatornih principa, "principa golubinjaka". Princip je poznat pod raznim popularnim nazivima kao što su "princip kutija", "princip pretinaca", "problem zečeva i kaveza" i dr. Njemački matematičar francuskog porijekla, J. P. G. L. Dirichlet ga je prvi jasno formulirao i dao precizan matematički smisao. Zato se taj princip naziva i Dirichletov princip. Princip kaže da ako $n + 1$ predmeta (golubova) rasporedimo u $n$ praznih kutija (krletki), onda postoji barem jedna kutija (krletka) koja sadrži barem dva predmeta (goluba). Više matematički, za bilo koje preslikavanje $f : A \to B$ konačnog skupa $A$ sa $n + 1$ elemenata u konačan skup $B$ sa $n$ elemenata postoje dva elementa skupa $A$ koji imaju istu sliku. Više o navedenom principu vidi u [10].

**Primjer 5.** Dano je 20 prirodnih brojeva. Dokažite da se između njih mogu odabrati dva broja čija je razlika djeljiva sa 19.

*Rješenje.* Primijenit ćemo onaj iskaz Dirichletovog principa koji govori o konačnim skupovima $A$ i $B$. Skup $A$ čine dani prirodni brojevi. Skup $B$ neka čine ostaci koje dobijemo dijeljenjem nekog prirodnog broja sa 19. To su $0, 1, \ldots, 18$. Imamo dakle 20 odabranih prirodnih brojeva i 19 ostataka. Prema tome, među odabranim postoje dva prirodna broja koja pri dijeljenju sa 19 daju isti ostatak. Njihova razlika djeljiva je sa 19. ◄

Dokazi u matematičkim tekstovima često završavaju akronimom Q.E.D., što dolazi od *quod erat demonstrandum* (lat. *što je trebalo dokazati*), a ovim je riječima Euklid u djelu *Elementi* završavao svoje dokaze.

## Literatura

[1] J. F. Hurley, *What are mathematical proofs and why they are important?*, `http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf`, 2002.

[2] W.J. Wickless, *A first graduate course in abstract algebra,* Marcel Dekker Inc., New York, 2004.

[3] H. Kraljević, *Algebra*, Odjel za matematiku, Osijek, 2007. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2006-07/algebra_Osijek_2006_7.pdf`

[4] A. Doxiadis, *Stric Petros i Goldbachova slutnja*, Vukovićb&bRunjić, Zagreb, 2001.

[5] D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*, Sveučilište u Zagrebu `http://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/uum.pdf`

[6] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

[7] M. Vuković, *Matematička logika 1*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2000.

[8] Z. Kurnik, *Dokaz,* Matematika i škola, (2) 2001, 149–155, `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/dokaz.pdf`

[9] *Uvod u teoriju brojeva (skripta)*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, `http://e.math.hr/zeta/utblink.pdf`

[10] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.