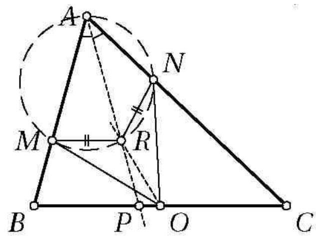
XLV олимпијада

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата со дијаметар BC ги сече страните AB и AC во точките M и N, соодветно. Со O да ја означиме средината на страната BC. Симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle MON$ се сечат во точка R. Докажи, дека кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се сечат во точка која припаѓа на страната BC.

Решение. Јасно, O е центар на кружницата со дијаметар BC. Затоа симетралата на $\measuredangle MON$ е симетрала на отсечката MN. Тоа значи дека $\overline{OM} = \overline{ON}$, и како R припаѓа на симетралата на $\measuredangle MON$ заклучуваме дека $\overline{RM} = \overline{RN}$. Бидејќи $CM \perp AB$ и $BN \perp AC$, четириаголникот $MBCN$ е тетивен, па затоа



$\measuredangle MAN = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle NMA = \measuredangle ACB$. Значи, $\triangle ANM \sim \triangle ABC$, па од $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ следува дека $\overline{AM} \neq \overline{AN}$. Според тоа, точката R е пресек на симетралата на $\measuredangle MAN$ и симетралата на отсечката MN, па затоа лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMN$.

Нека правите AR и BC се сечат во точката P. Тогаш

$$\measuredangle MRA = \measuredangle MNA = \measuredangle ABP \text{ и } \measuredangle NRA = \measuredangle NMA = \measuredangle ACP,$$

што значи дека четириаголниците $RMBP$ и $RNCP$ се тетивни, т.е. P е пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$.

2. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви што

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c) \qquad (1)$$

за секои реални броеви a,b,c такви што $ab+bc+ca=0$.

Решение. Нека $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. За секој $x \in \mathbb{R}$ подредената тројка $(a,b,c) = (6x - 3x, 2x)$ го задоволува условот $ab+bc+ca=0$. Со замена во (1) добиваме

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x), \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

Оттука со споредување на коефициентите следува дека

$$3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i = 0 \text{ за секој } a_i \neq 0.$$

Ако i е непарен, тогаш $8^i = (3+5)^i > 3^i + 5^i$ и затоа $3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i < 0$.

Ако $i \geq 6$ е парен број, од $(\frac{8}{7})^i > 2$ следува дека $3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i > 0$. Непосредно се проверува дека $3^0 + 5^0 + (-8)^0 - 2\cdot 7^0 = 1$ и

$$3^2+5^2+(-8)^2-2\cdot 7^2=3^4+5^4+(-8)^4-2\cdot 7^4=0\,.$$

Затоа $a_i=0$, за $i\neq 2,4$. Според тоа, $P(x)=a_2x^2+a_4x^4$, за некои реални броеви a_2 и a_4.

Ќе докажеме дека полиномите од видот $P(x)=a_2x^2+a_4x^4,\ a_2,a_4\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата. Последното е доволно да го докажеме за полиномите $P_1(x)=x^2$ и $P_2(x)=x^4$.

Ако го искористиме условот $ab+bc+ca=0$, zа полиномот $P_1(x)=x^2$ добиваме

$$\begin{aligned}P_1(a-b)+P_1(b-c)+P_1(c-a)&=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\\&=2a^2+2b^2+2c^2+4(ab+bc+ca)\\&=2P_1(a+b+c).\end{aligned}$$

За полиномот $P_2(x)=x^4$ имаме

$$\begin{aligned}P_2(a+b+c)&=(a+b+c)^2(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)^2\\&=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}P_2(a-b)+P_2(b-c)+P_2(c-a)&=2(a^4+b^4+c^4)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&\quad-4(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b),\end{aligned}$$

што значи дека треба да го докажеме равенството

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=2(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b)\,. \qquad (1)$$

За да го докажеме равенството (1) ќе искористиме дека

$$0=(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\,,$$

па ако замениме во (1) го добиваме еквивалентното равенство

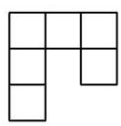
$$a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b+a^2bc+ab^2c+abc^2=0\,,$$

кое е еквивалентно со точното равенствот.

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0$$

Конечно, бараниоте полиноми се од видот $P(x)=a_2x^2+a_4x^4,\ a_2,a_4\in\mathbb{R}$.

3. Кука ќе ја наречеме *кука* фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m\times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што

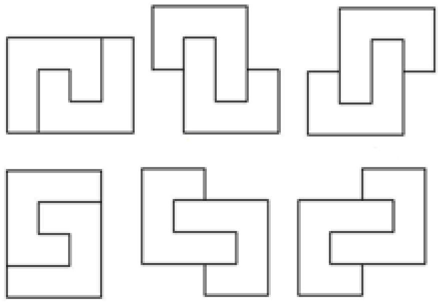


1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,

2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

Решение. *Одговор*. Сите правоаголници $m\times n$ за кои $12\,|\,mn$, барем еден од броевите m,n е делив со 4 и $m,n\notin\{1,2,5\}$.

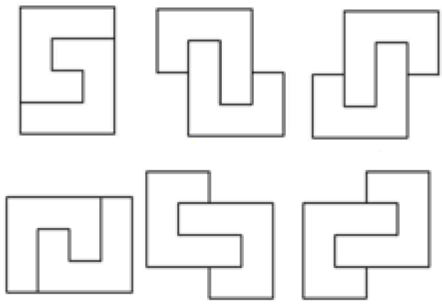
Нека претпоставиме дека правоаголникот $m\times n$ може да се покрие со куки. За секоја кука H нејзиниот „внатрешен“ квадрат е покриен точно со една кука K. Од друга страна, H го покрива внатрешниот квадрат на K, па затоа сите куки можат да се поделат на парови $\{H,K\}$ кои формираат една од следниве фигури со плоштина 12.



Значи, нашиот правоаголник е покриен со вакви фигури. Тоа значи дека $12\,|\,mn$. Следниве случаи ги исцрпуваат сите можности.

1) $m=4a$ и $n=3b$. Тогаш правоаголникот очигледно се покрива со правоаголници 4×3, што значи дека се покрива со куки.
2) $m=12a$. Јасно, ако $n=1,2$ тогаш правоаголникот не може да се покрие. Ако $n=5$, ако разгледување покривање на аголното поле, лесно следува дека покривањето не е можно. Затоа секој $n\notin\{1,2,5\}$ постојат природни броеви $k,l\in\mathbb{N}_0$ такви што $n=3k+4l$ (за $n=3,4,6,7,8$ последното е точно, а ако еточно за некој n, тогаш е точно и за $n+3$). Затоа правоаголникот $m\times n$ може да се подели на правоаголници 12×3 и 12×4, и оттука на правоаголници 4×3 и 3×4.
3) *Прв начин*. $m=2a, n=2b$, каде a и b се непарни броеви. Ќе докажеме дека таков правоаголник не може да се покрие со куки. Да воведеме координатен систем со кординатен почеток во долното лево поле и m е на $x-$оската. Да ги обоиме полињата со координати (k,l), за $l=1,3,...,m-1$ и $l=1,3,...,n-1$ кога $k=4t+1$ и за $k=1,3,...,m-1$ и $l=2,4,...,n$ кога $k=4t+3$. Да забележиме дека вкупниот број обоени полиња е ab и тоа е непарен број. Непосредно се проверува дека секоја од трите фигури во горниот ред на цртежот (тип *A*) покрива по 3 обоени полиња, а секоја до трите фигури во долниот ред на цртежот (тип *B*) покрива 2 или 4 обоени полиња. Според тоа, имаме непарен рбој фигури од типот *A*. Со аналогно боење на непарните редови добиваме дека имаме непарен број фигури од типот *B*. Според тоа, вкупниот број на фигури од двата типа е парен, што значи дека mn е делив со 24, што е противречност.

   Втор начин. $m=2a, n=2b$, каде a и b се непарни броеви. Јасно, притоа вкупниот број фигури составени од две куки е е непарен. Имено, ако тој е парен, тоа значи дека mn е делив со 24, што е противречност.



Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека вкупниот број фигури прикажани во долниот ред на цртежот десно е непарен. Да ја обоиме секоја секоја четврта колона на таблата mn во црно. Тогаш секоја фигура од долниот ред на цртежот покрива по 3 црни полиња, а секоја фигура од горниот ред на цртежот покрива по 2 или 4 црни полиња. Значи, бројот на покриените црни полиња е непарен, што не е можно бидејќи има парен број црни полиња.

4. Нека $n \geq 3$ е природен број. Ако $t_1, t_2, ..., t_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n)(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n}),$$

тогаш за секои i, j, k такви што $1 \leq i < j < k \leq n$ броевите t_i, t_j, t_k се должини на страни на триаголник. Докажи!

Решение. Заради симетрија доволно е да докажеме дека $t_1 < t_2 + t_3$. По ослободување од заградите добиваме

$$n^2 + 1 > \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i})$$

$$= n + t_1(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}) + \frac{1}{t_1}(t_2 + t_3) + \sum_{(i,j) \neq (1,2),(1,3)} (\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}).$$

Бидејќи броевите се позитивни, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2$ за $1 \leq i < j \leq n$, $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_1 t_2}}$ и $t_2 + t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3}$. Ставаме $a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}}$ и добиваме дека

$$n^2 + 1 > n + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2[\binom{n}{2} - 2] = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4.$$

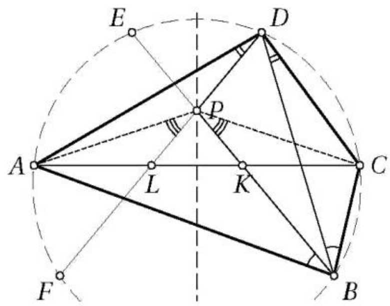
Според тоа, $2a + \frac{2}{a} - 5 < 0$, од каде што следува $\frac{1}{2} < a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} < 2$, па затоа $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \leq t_2 + t_3$.

Забелешка. Тврдењето на задачата е точно ако $n^2 + 1$ се замени со $(n + \sqrt{10} - 3)^2$. Ова е најдобрата можна апроксимација.

5. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналата BD не е симетрала ниту на аголот $\measuredangle ABC$ ниту на аголот $\measuredangle CDA$. За точката P која припаѓа на внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ важи $\measuredangle PBC = \measuredangle DBA$ и $\measuredangle PDC = \measuredangle BDA$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Решение. *Прв начин*. Да претпоставиме дека P е внатрешна точка за $\triangle ABD$ и нека BP и DP по втор пат ја сечат опишаната кружница околу овој триаголник во точките E и F, соодветно. Имаме, $\triangle FPE \sim \triangle BPD$ и $\triangle FAE \sim \triangle BCD$, бидејќи соодветните агли им се еднакви. Според тоа, четириаголниците $FPEA$ и $BPDC$ се слични. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{AP} = \overline{CP} \quad &\Leftrightarrow \quad FPEA \cong BPDC\\ &\Leftrightarrow \quad \overline{FE} = \overline{BD}\\ &\Leftrightarrow \quad FB \parallel ED\\ &\Leftrightarrow \quad \measuredangle BFD = \measuredangle EDF\\ &\Leftrightarrow \quad \measuredangle BAD = 180^\circ - BCD,\end{aligned}$$



бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle EDF &= \measuredangle EDA + \measuredangle FDA = \measuredangle PBA + \measuredangle PDA\\ &= \measuredangle DBC + \measuredangle BDC.\end{aligned}$$

Аналогно се разгледува случајот кога P е внатрешна точка за $\triangle BCD$, со што задачата е решена.

Втор начин. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека правите BP и DP повторно ја сечат опишаната околу него кружница во точките E и F, соодветно. Тогаш $AF = BC$ и $AE = CD$, па затоа $BF \parallel AC \parallel DE$. Според тоа, четириаголникот $BDEF$ е рамнокрак трапез и $P = BE \cap DF$ лежи на заедничката симетрала на отсечките BF, ED, AC, па затоа $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Нека претпоставиме дека $\overline{AP} = \overline{CP}$. Понатаму, нека правите BP и DP ја сечат AC во точките K и L, соодветно. Точките A и C се изогонално коњугирани во $\triangle BDP$, па затоа $\measuredangle APL = \measuredangle CPK$, од каде следува дека точките K и L се симетрични во однос на симетралата p на отсечката AC. Тогаш симетричната точка E на точката D во однос на правата p лежи на правата BP, па затоа $\triangle APD \cong \triangle CPE$. Оттука следува дека $\measuredangle BDC = \measuredangle ADP = \measuredangle BEC$, што значи дека точката B припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$. Конечно, бидејќи и точката A припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$ заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

6. Природниот број k ќе го нарекуваме *наизменичен* ако секои две соседни цифри во неговиот декаден запис се со различна парност. Определи ги сите

природни броеви n за кои постои наизменичен природен број A_n делив со n.

Решение. Ако $20 | n$, тогаш последните две цифри на секој број делив со n се парни, па затоа не е наизменичен. Ќе докажеме дека за секој n таков што $20 \nmid n$ постои наизменичен содржател A_n. Прво, за секој m таков што $\text{NZD}(m,10)=1$ и за секој $k \in \mathbb{N}$ постои број од облик

$$I_{k,m} = \overline{1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1...1\underbrace{0...0}_{k-1}1} = \frac{10^{ik}-1}{10^k-1},\ i \in \mathbb{N}$$

таков што $m | I_{k,m}$. Навистина, според теоремата на Ојлер можеме да земеме $i = \varphi((10^k-1)m)$.

1) Ако $\text{NZD}(n,10)=1$, тогаш $I_{2,n}$ е наизменичен број делив со n.

2) Нека $n = 2\cdot 5^k m$, каде $\text{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме, дека за секој r постои $r-$цифрен наизменичен број U_r (кој може да почнува со нула) делив со 5^r, а потоа ќе земеме $A_n = 10U_{2k}I_{2k,m}$.

   Низата $\{U_r\}$ ја дефинираме индуктивно. Нека $U_1 = 5$. За $r \ge 1$ нека $c \in \{0,1,2,3,4\}$ е таков што $2^r c \equiv -\frac{U_r}{5^r} (\text{mod}\, 5)$ и нека $d = c+5$. Тогаш $(r+1)-$цифрените броеви $\overline{cU_r}$ и $\overline{dU_r}$ се деливи со 5^{r+1}, а еден од нив е наизменичен. За U_{r+1} го земеме тој наизменичен број.

3) Нека $n = 2^k m$, каде $\text{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме дека за секој r постои $2r-$цифрен наизменичен број V_r делив со 2^{2r+1}, а потоа ќе земеме $A_n = V_k I_{2k,m}$. Како и во случајот 2), V_r го дефинираме индуктивно. Земаме $V_1 = 16$, а за $r > 1$ точно еден од броевите $\overline{10V_r}, \overline{12V_r}, \overline{14V_r}, \overline{16V_r}$ може да се земе за V_{r+1}.