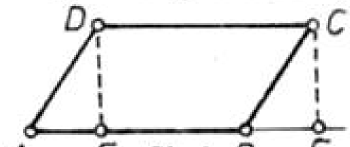
RAZLOŽIVA JEDNAKOST MNOGOUGLOVA

Branka Đerasimović (Beograd)

Problem razlaganja nekog mnogougla na delove od kojih se zatim može sastaviti neki drugi mnogougao veoma je star. Njime su se bavili već u antičkoj Grčkoj, traktate o tome pisali su i arapski matematičari, dok nije konačno rešen u prvoj polovini prošlog veka skoro istovremeno od strane mađarskog matematičara Baljaija i nemačkog matematičara Gervina.

U školskom kursu rastavljanje mnogouglova na delove prvi put se pojavljuje kod izračunavanja površine kosouglog paralelograma.

Posmatrajmo paralelogram $ABCD$ (sl. 1). Ako od njega odvojimo pravougli trougao AED ($ED \perp AB$) i smestimo u položaj s njim podudarnog trougla BFC, dobićemo pravougaonik $EFCD$. Paralelogram $ABCD$ i pravougaonik $EFCD$ sastavljeni su od istog trapeza $EBCD$ i od trougla AED, odnosno od s njim podudarnog trougla BFC, pa su im zato površine jednake. Ta okolnost se koristi za izvođenje obrasca za površinu kosouglog paralelograma, pošto je prethodno već izveden obrazac za površinu pravougaonika.

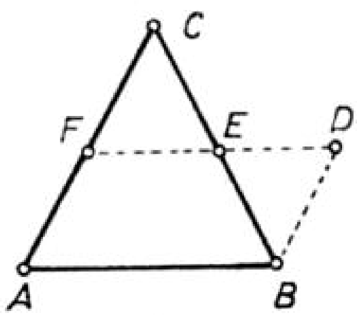


Sl. 1

Ovakve ravne figure kao što su kosougli paralelogram $ABCD$ i pravougaonik $EFCD$, od kojih se svaka može rastaviti na delove koji su, redom, podudarni sa delovima druge figure, nazivaju se razloživo jednakim.

U prvom delu ovog članka biće izneti izvesni primeri razložive jednakosti mnogougaonika, a u drugom njegovom delu biće izloženo nekoliko teorema koje se odnose na razloživu jednakost mnogouglova uopšte.

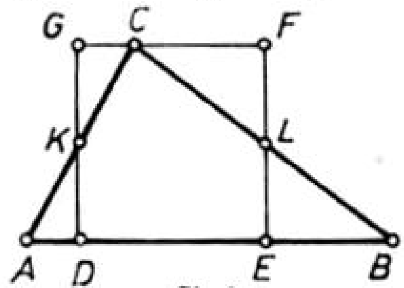
Primer 1. — *Svaki trougao može se rastaviti na delove od kojih se može sastaviti paralelogram.*



Sl. 2

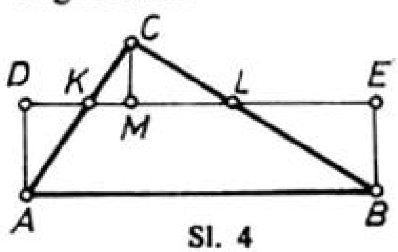
Neka je F središte stranice AC trougla ABC (sl. 2). Nad dužima AB i AF konstruisaćemo paralelogram $ABDF$, čija stranica DF seče stranicu BC trougla u tački E. Trouglovi FEC i DEB su podudarni, jer su im jednake stranice DB i FC i po dva ugla. Trougao i paralelogram se, prema tome, mogu rastaviti na jedan trapez i na po jedan trougao koji su međupodudarni.

Primer 2. — *Dati trougao može se rastaviti na delove od kojih se mo$_2$e sastaviti pravougaonik.*



Sl. 3

Neka su K i L središta stranica AC i BC trougla ABC (sl. 3). Prave kroz K i L, normalne na pravu AB, seći će AB u tačkama D i E, a pravu kroz C, paralelnu sa pravom AB, u tačkama F i G. Lako je utvrditi da su trouglovi ADK i CGK i trouglovi BEL i CFL po parovima podudarni, pa se i trougao, i pravougaonik mogu rastaviti na jedan petougaonik ($DELCK$) i na po dva trougla, od kojih je svaki od onih koji pripadaju trouglu podudaran sa po jednim od onih trouglova koji pripadaju pravougaoniku.

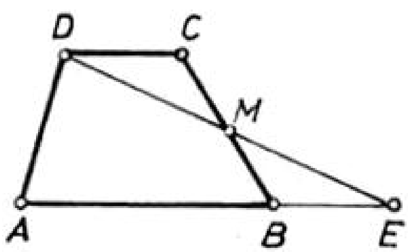


Sl. 4

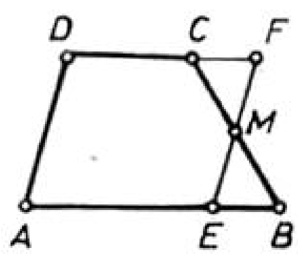
Ako pak na pravoj KL odredimo tačke D i E tako da je $DK=KM$ i $LE=$ $=LM$, gde je M podnožje normale povučene iz C na KL (sl. 4), dobićemo pravougaonik $ABED$. Lako se dokazuje da je $\Delta AKD \cong MCK$ i $\Delta\, BEL \cong \Delta\, MLC$, što znači da je od delova na koje se može ratavititi trougao ABC moguće sastaviti pravougaonik $ABED$.

Primer 3. — *Dati trapez može se rastaviti na delove od kojih se može sastaviti: a) trougao; b) paralelogram; c) pravougaonik.*

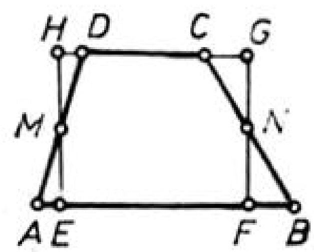
Način rastavljanja trapeza prikazan je na sl. 5, 6 i 7.



Sl. 5



Sl. 6



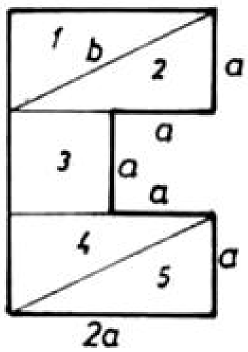
Sl. 7

Tačke M i N predstavljaju na svima slikama sredine strana kojima pripadaju.

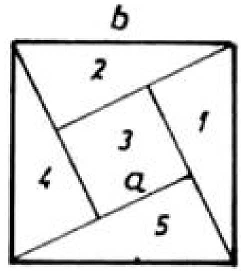
Prepušta se čitaocu da sam dokaže tačnost navedene tvrdnje.

Primer 4. — *Osmougao predstavljen na sl.* 8 (*ondosno* 10) *može se rastaviti na delove od kojih se može sastaviti: a) kvadrat; b) pravougaonik.*

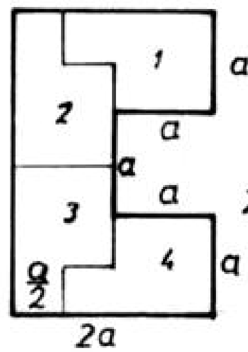
Zadati osmougao koji ima oblik ćirilskog slova *C* širine $2a$ i visine $3a$ može se rastaviti na dva pravougaonika sa stranicama a i $2a$ i na jedan kvadrat sa stranicom a, kao što je to prikazano na sl. 8.



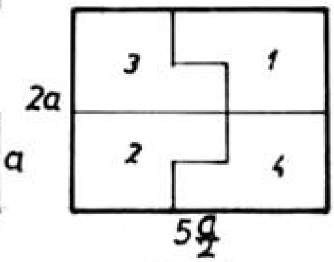
Sl. 8



Sl. 9



Sl. 10



Sl. 11

Ako pravougaonike podelimo dijagonalama na trouglove, od dobijenih delova možemo složiti kvadrat kao što je to predstavljeno na slici 9.

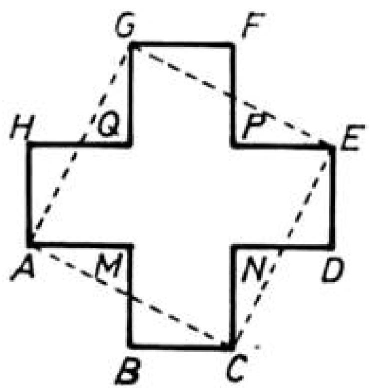
Zadati osmougao može se rastaviti na četiri podudarna dela, kao što je to predstavljeno na sl. 10. Od ta četiri dela može se složiti pravougaonik, kao što se to vidi na sl. 11.

Prema tome je dati osmougaonik razloživo jednak i sa kvadratom na sl. 9 i sa pravougaonikom na sl. 11.

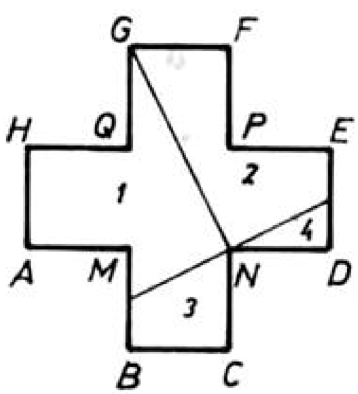
Primer 5. — *Figura predstavljena na sl.* 12, *koju nazivaju* »grčki *krst*«, *može se rastaviti na delove od kojih je moguće sastaviti kvadrat.*

Ovo možemo izvršiti na dva načina.

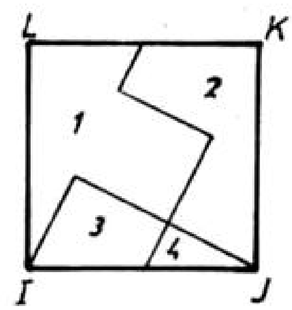
Pre svega, pada u oči da, ako se na figuri prikazanoj na sl. 12 spoje temena *A* i *C*, *C* i *E*, *E* i *G*, *G* i *A*, dobijene duži *AC*, *CE*, *EG*, *GA* odsecaju od »grčkog krsta« svaka po jedan pravougli trougao, koji su svi međusobno podudarni, a podudarni su i sa trouglovima koji se



Sl. 12



Sl. 13



Sl. 14

javljaju između ovih duži i stranica »grčkog krsta«. Stoga, kad se ovi trouglovi »odseku« od »grčkov krsta«, pa se priključe dobijenom ostatku pomenute figure tako da »popune« uglove kod *M*, *N*, *P* i *Q*, dobija se kvadrat *ACEG* koji se sastavljen od delova grčkog krsta.

Ali do ovog se kvadrata može doći i na drugi način. Jer ako se data figura preseče po duži *RS* (sl. 13), koja prolazi kroz teme *N* i spaja središte duži *BM* sa središtem duži *DE*, i po duži *NG*, onda se »grčki krst« rastavlja na 4 dela, od kojih se može sklopiti kvadrat *IJKL*.

*

Samo po sebi se razume da svaka dva razloživo jednaka mnogougla imaju jednake površine, pošto su sastavljene od istih delova. Ali se sad pred nas postavlja teži zadatak: zapitaćemo se da li su dva mnogougla jednakih površina uvek razloživo jednaka? Na ovo pitanje je, kao što smo to već naveli, dobijen konačan tačan odgovor tek početkom prošlog veka i on glasi: *Svaka dva jednaka mnogougla uvek su razloživo jednaka*. Ali dokaz ove tvrdnje je dosta složen i težak, i zato ćemo se mi ovde zadržati samo na sledećem: *dokazaćemo da su svaka dva jednaka paralelograma uvek razloživo jednaka*, tj. da se svaki od njih može rastaviti na delove od kojih se može sastaviti onaj drugi.

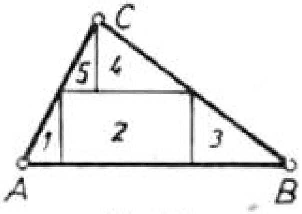
Da bismo dokazali ovu teoremu, moramo prethodno dokazati sledeće dve pomoćne teoreme (leme).

Lema 1. *Ako je figura A razloživo jednaka sa figurom B, a figura B razloživo jednaka sa figurom C, onda je i figura A razloživo jednaka sa figurom C.*

Dokaz. Ako figuru *B* podelimo istovremeno i na delove od kojih se može sastaviti figura *A*, i na delove od kojih se može sastaviti figura *C*, onda će ona biti izdeljena na delove od kojih se može sastaviti i figura *A* i figura *C*; a kad se od sastavnih delova figure *A* može sklopiti figura *C*, onda su te dve figure razloživo jednake.

Kao najprostiji primer za ilustraciju tačnosti ove teoreme možemo navesti slučaj razložive jednakosti trougla i pravougaonika.

Ako trougao *ABC* razdelimo na delove od kojih se može sastaviti pravougaonik *DEAG* (sl. 3) i na delove od kojih se može sastaviti pravougaonik *ABED* (sl. 4), taj će trougao biti izdeljen na delove



Sl. 15

1, 2, 3, 4, 5 onako kao što je prikazano na sl. 15. Svi ti delovi ulaze u sastav pravougaonika *DEFG*, i u sastav pravougaonika *ABED*, što znači da se od dejova prvog od njih može sastaviti onaj drugi, i obrnuto, tj. za su ovi pravougaonici razloživo jednaki.

Lema 2. *Dva paralelograma jednakih osnovica i jednakih odgovarajućih visina razloživo su jednaki.*

Dokaz. Neka su osnovice i odgovarajuće visine pravougaonika $ABCD$ (sl. 16) i $A_1B_1C_1D_1$ (sl. 17), čije osnovice leže na istoj pravoj, po pretpostavci međusobno jednake. S obzirom na to ova dva pravougaonika imaju jednake površine.

Izdelimo sad svaki od dva pravougaonika na delove onako kao što je to prikazano na sl. 15 i sl. 16: neka je $AE \parallel B_1C_1$ i $B_1F_1 \parallel AF$; neka je $EF \parallel AB$ i $E_1F_1 \parallel A_1B_1$; i neka je $CG \parallel A_1D_1$ i $D_1G \parallel AD$.

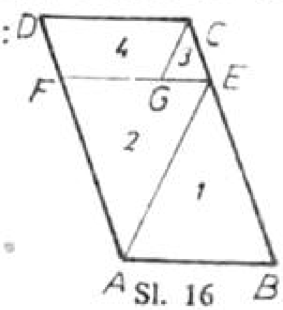
Lako se dokazuje da je:

$\Delta\, ABE \cong \Delta\, AB_1F_1$;

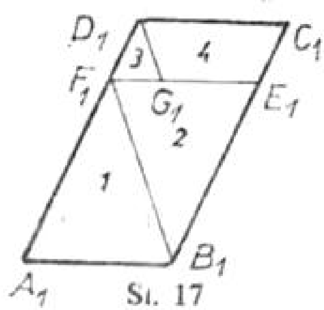
$\Delta\, AEF \cong \Delta\, B_1E_1F_1$;

$\Delta\, ECG \cong \Delta\, GD_1F_1$;

$FGCD \cong G_1E_1C_1D_1$.



Sl. 16

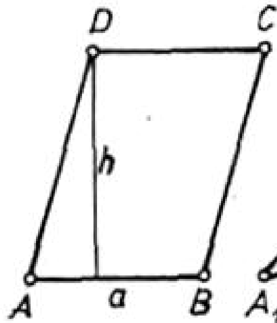


Sl. 17

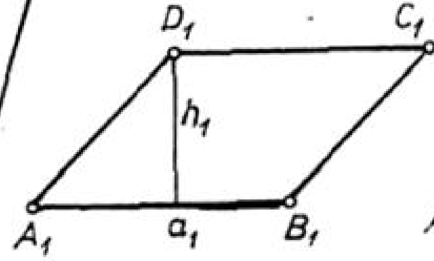
Prema tome, iz delova paralelograma $ABCD$ može se sastaviti paralelogram $A_1B_1C_1D_1$, što znači da su ova dva paralelograma razloživo jednaki.

Teorema. *Dva proizvoljna paralelograma jednakih površina su razloživo jednaki.*

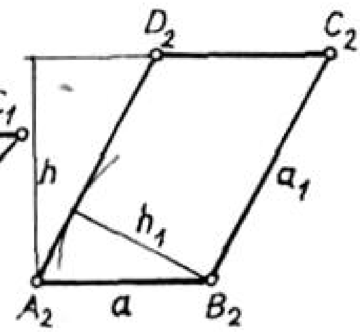
Dokaz. Neka su dva paralelograma $ABCD$ (sl. 18) i $A_1B_1C_1D_1$ (sl. 19) jednakih površina. U tom slučaju je proizvod osnovice a i visine h prvog paralelograma jednak proizvodu osnovice a_1 i visine h_1 drugog paralelograma. Konstruišemo treći paralelogram $A_2B_2C_2D_2$ tako da je $A_2B_2=AB=a$, $A_2D_2=A_1D_1=a_1$ i da je visina, koja odgovara stranici A_2B_2 paralelograma $A_2B_2C_2D_2$ jednaka visini h paralelograma $ABCD$. Tada će visina koja odgovara stranici B_2C_2 ovog paralelograma biti jednaka visini h_1 paralelograma $A_1B_1C_1D_1$, pošto je, po pretpostavci, $a \cdot h = a_1 \cdot h_1$.



Sl. 18



Sl. 19



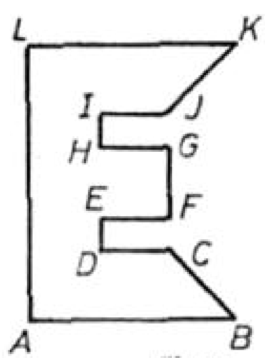
Sl. 20

Dakle, paralelogram $A_2 B_2 C_2 D_2$ ima jednaku po jednu stranicu i njoj odgovarajuću visinu sa svakim od paralelograma $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ pa je, s obzirom na lemu 2, razloživo jednak sa svakim od njih. A pošto su dve figure koje su razloživo jednake sa trećom figurom i među sobom razloživo jednake (lema 1), to su i paralelogrami $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ razloživo jednaki.

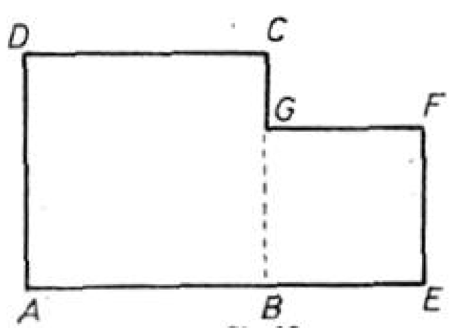
Zadaci

1. Pokazati kako se može figura $ABCDEFGHIJK$ (sl. 21) rastaviti na delove od kojih se može sastaviti kvadrat.

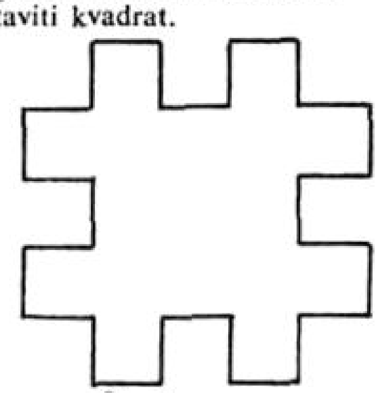
2. Pokazati kako se može figura $AEFCGD$, sastavljena od kvadrata $ABCD$ i $BEFG$ (sl. 22), rastaviti na delove od kojih se može sastaviti kvadrat.



Sl. 21



Sl. 22



Sl. 23

3. Pokazati kako se figura na sl. 23 može rastaviti na delove od kojih se može sastaviti kvadrat.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија