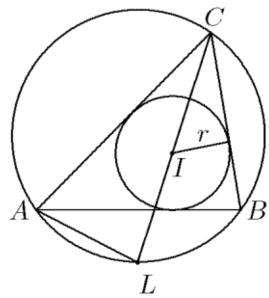
**БМО 1986**

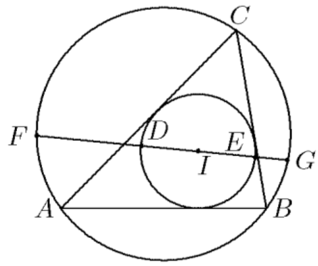
1. Права, која минува низа центарот $I$ на впишаната кружница во $\triangle ABC$, ја сече опишаната кружницата во точките $F$ и $G$ и впишаната кружница во точките $D$ и $E$, при што $D$ е меѓу $I$ и $F$. Докажи, дека $\overline{DF}\cdot\overline{EG}\geq r^2$, каде $r$ е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

**Решение.** *Прв начин.* Ќе докажеме дека степенот на центарот $I$ на впишаната кружница во однос на опишаната кружница е еднаков на $2Rr$. Ако $L$ е средината на лакот $AB$ (види цртеж), тогаш од




$$\measuredangle LIA = \measuredangle LAI = \tfrac{\alpha+\gamma}{2}$$

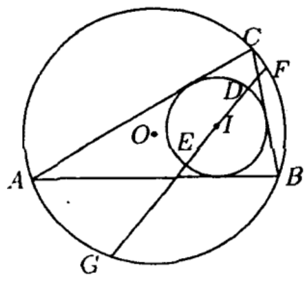
следува $\overline{LI}=\overline{LA}$. Од синусната теорема за $\triangle ACL$ следува дека $\overline{LI}=\overline{LA}=2R\sin\frac{\gamma}{2}$ и ако искористиме дека $\overline{CI}=\frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, добиваме $\overline{CI}\cdot\overline{LI}=2Rr$. Оттука следува дека $\overline{FI}\cdot\overline{GI}=2Rr$. Пресметуваме




$$\begin{aligned}\overline{FD}\cdot\overline{EG} &= (\overline{FI}-r)(\overline{GI}-r)\\ &= \overline{FI}\cdot\overline{GI}-r(\overline{FI}+\overline{GI})+r^2\\ &= 2Rr-r\overline{FG}+r^2.\end{aligned}$$

Неравенството $\overline{FD}\cdot\overline{EG}\geq r^2$ е еквивалентно со неравенството $2R\geq\overline{FG}$, кое очигледно важи. Знак за равенство важи ако и само ако $FG$ е дијаметар.

*Втор начин.* Нека $O$ е центарот на опишаната кружница. Според Ојлеровата формула добиваме




$$\begin{aligned}\overline{DF}\cdot\overline{EG} &= (\overline{IF}-r)\cdot(\overline{EG}-r)\\ &= \overline{IF}\cdot\overline{EG}-r(\overline{IF}+\overline{EG})+r^2\\ &= R^2-\overline{OI}^2-r\cdot\overline{FG}+r^2 \qquad (*)\\ &= R^2-(R^2-2Rr)-r\cdot\overline{FG}+r^2\\ &= r(2R-\overline{FG})+r^2\geq r^2,\end{aligned}$$

бидејќи $FG$ е тетива на опишаната кружница и $\overline{FG}\leq 2R$. Јасно, знак за равенство важи ако $FG$ е дијаметар, т.е. ако правата од условот на задачата минува низ $O$ и $I$. Имено, ако $O\equiv I$, тогаш триаголникот е рамностран и според (*) имаме $\overline{DF}\cdot\overline{EG}=r^2$.

2. Нека $ABCD$ е тетраедар и $E,F,G,H,K,L$ се точки соодветно на рабовите $AB,BC,CA,DA,DB,DC$. Докажи, дека ако

$$\overline{AE}\cdot\overline{BE}=\overline{BF}\cdot\overline{CF}=\overline{CG}\cdot\overline{AG}=\overline{DH}\cdot\overline{AH}=\overline{DK}\cdot\overline{BK}=\overline{DL}\cdot\overline{CL},$$

тогаш точките $E,F,G,H,K,L$ лежат на една свера.

**Решение.** Нека $p=\overline{AE}\cdot\overline{BE}=\overline{BF}\cdot\overline{CF}=\overline{CG}\cdot\overline{AG}=\overline{DH}\cdot\overline{AH}=\overline{DK}\cdot\overline{BK}=\overline{DL}\cdot\overline{CL}$ и со $O$ да го означиме центарот на опишаната свера околу тетраедарот. Пресекот на рамнината определена со точките $O,A$ и $B$ со опишаната свера е кружница. Во оваа кружница степенот на точката $E$ е еднаков на

$$R^2-\overline{OE}^2=\overline{AE}\cdot\overline{BE}=p,$$

па затоа $\overline{OE}=\sqrt{R^2-p}$. Аналогно

$$\overline{OF}=\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OK}=\overline{OL}=\sqrt{R^2-p},$$

т.е. шесте точки лежат на сверата со центар во точката $O$ и радиус $\sqrt{R^2-p}$.

3. Низата $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ е определена со равенствата

$$a_1=a,\ a_2=b \text{ и } a_{n+1}=\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}, \text{ за } n\geq 2,$$

каде $a,b,c$ се реални броеви, $ab\neq 0$ и $c>0$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви ако и само ако $a,b$ и $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ се цели броеви.

**Решение.** Од условот на задачата следува

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2,\ n\geq 2$$

т.е.

$$\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\text{const}=t,$$

па затоа $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$, за $n\geq 2$. Од друга страна

$$t=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}.$$

Ако $a,b$ и $t$ се цели броеви, тогаш по индукција ќе следува дека $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$ исто така е цел број.

Обратно, нека претпоставиме дека $a_n$ е цел број за секој $n=1,2,...$. Тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и $t=\frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број. Нека претпоставиме дека $t$ не е цел број. Тогаш $t=\frac{p}{q}$, каде $p$ и $q>1$ се заемно прости броеви. Од $pa_2=q(a_1+a_3)$ следува дека $q\,|\,a_2$. Понатаму, од

$$pa_n=q(a_{n-1}+a_{n+1})$$

по индукција следува дека $q \mid a_n$ за секој $n \geq 2$. Одново од

$$pa_n = q(a_{n-1} + a_{n+1})$$

следува дека за $n \geq l+1$ важи дека $q^l \mid a_n$. Сега, од $c = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ следува дека $q^{2l} \mid c$ за секој природен број $l$, што не е можно. Според тоа $q = 1$ и $t$ е цел број.

4. Триаголникот $ABC$ е таков што во рамнината постои точка $P$ таква, што триаголниците $PAB, PBC$ и $PCA$ имаат еднакви периметри и еднакви плоштини. Докажи, дека

1) Ако $P$ е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е рамностран.

2) Ако $P$ не е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е правоаголен.

**Решение.** Плоштината на $\triangle ABC$ да ја означиме со $S$.

1) Бидејќи $P$ е внатрешна точка, од условот следува дека $P_{PAB} = \frac{S}{3}$. Според тоа, должината на висината повлечена од $P$ во $\triangle PAB$ е еднаква на $\frac{1}{3}$ од должината на висината повлечена од $C$ во $\triangle ABC$. Тоа значи дека $P$ лежи на права која минува низ тежиштето $G$ на $\triangle ABC$, која е паралелна на $AB$. Аналогно $P$ припаѓа на права низ $G$ која е паралелна со $BC$ и затоа $P$ се совпаѓа со $G$. Сега, од условот следува

$$a + \tfrac{2}{3}(m_b + m_c) = b + \tfrac{2}{3}(m_a + m_c) = c + \tfrac{2}{3}(m_b + m_a)\,.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq c$. Бидејќи

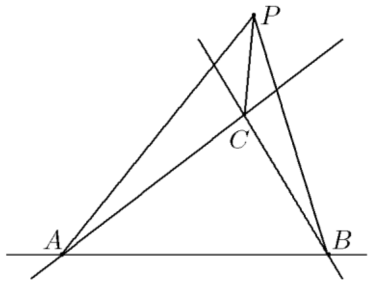
$$4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2,$$
$$4m_b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2,$$
$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2,$$

добиваме дека $m_a \leq m_b \leq m_c$. Оттука следува

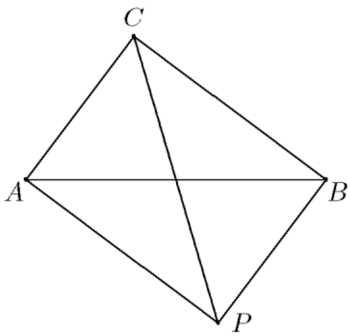
$$a + \tfrac{2}{3}(m_b + m_c) \geq b + \tfrac{2}{3}(m_a + m_c) \geq c + \tfrac{2}{3}(m_b + m_a)\,,$$

при што равенства се можни само ако $a = b = c$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

2) Нека претпоставиме дека точката $P$ лежи во некој од трите надворешни агли при темињата $A, B$ и $C$ (цртеж десно). Тогаш $\triangle PBC$ се содржи во $\triangle PAB$, што значи дека нивните плоштини не може да се еднакви.




Без ограничување на општоста можеме точката $P$ да ја избереме како на цртежот долу лево. Ако



$$P_{PAB} = P_{PAC} = P_{PBC} = t \,,$$

тогаш

$$S = P_{PAC} + P_{PBC} - P_{PAB} = t \,,$$

па затоа $S = P_{PAC} = P_{PBC}$. Оттука добиваме дека висината во $\triangle ACP$ повлечена од темето $P$ е еднаква на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето $B$, т.е. $BP$ е паралелна на $AC$. Аналогно $PA \parallel BC$, т.е. $PBCA$ е паралелограм. Сега од еднаквоста на периметрите на $\triangle PAB$ и $\triangle PCB$ добиваме

$$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BP} \,,$$

од каде следува $\overline{PC} = \overline{AB}$. Според тоа, $PBCA$ е правоаголник, па затоа $\measuredangle ACB = 90^\circ$.