## Сојузен натпревар 1981

### Седмо одделение

1. Определи ја непозната цифра на единиците во бројот $401512*$ така што остатоците при делењето на овој број со 3 и со 5 ќе бидат еднакви.

   **Решение.** Непозната цифра може да биде 5, 6 или 7. Со делење на добиениот број со 3 и со 5 ќе се увериме дека во првиот случај тој број е делив и со 3 и со 5, во вториот случај остатоците при делење со 3 и со 5 се 1, а во третиот случај остатоците при делење со 3 и со 5 се 2.

2. Во ненаполнет сад се наоѓа 85-процентен раствор на алкохол. Ако садот го дополниме до врвот со 21-процентен раствор на алкохол, смесата се измеша, одлееме онолку течност колку што сме долеале, па садот повторно го дополниме до врвот со 21-процентен раствор на алкохол, ќе добиеме раствор кој содржи 70% алкохол. Колкав дел од садот бил наполнет пред првото долевање?

   **Решение.** Со $x$ да го означиме делот од садот кој на почетокот бил наполнет со 85-процентен раствор на алкохол. Бројот на стоти делови алкохол во тој момент во садот е $85x$. Ненаполнетиот дел од садот е $1-x$. Со првото долевање на 21-процентен раствор на алкохол количеството алкохол се зголемува за $21(1-x)$ и изнесува вкупно $85x+21(1-x)=21+64x$. Со одлевање на делот $1-x$ од течноста, количеството алкохол ќе се намали за $(1-x)(21+64x)$. Со второто долевање на 21-процентен раствор на алкохол повторно сме го зголемиле количеството алкохол за $21(1-x)$. Добиениот раствор содржи 70 стоти делови на алкохол. Според тоа,
   $$21+64x-(1-x)(21+64x)+21(1-x)=70.$$
   Со средување на последната равенка добиваме $64x^2=49$, од каде наоѓаме $x=\frac{7}{8}$. Според тоа, на почетокот биле наполнети $\frac{7}{8}$ од садот.

3. Според најновиот попис на населението, во 5990 населби во СР Словенија живеат 1883764 жители. Докажи дека постојат барем две населени места со еднаков број жители.

   **Решение.** Ако сите населени места имаат различен број на жители, тогаш вкупниот број на жители би бил најмалку:

$$1+2+3+4+...+5990=(1+5990)+(2+5990)+...+(2995+2996)$$
$$=\frac{5990\cdot 5991}{2}=17943045$$

Значи, ако сите населени места во Словенија имаат различен број жители, тогаш цела Словенија треба да има најмалку 17953045 жители, што повеќе од 20 пати поголем број од вистинскиот број на жителите на Словенија. Оттука заклучуваме дека постојат барем две населби со еднаков број на жители.

4. Во триаголникот $ABC$ важи $\frac{h_a h_b}{h_c}=c$, каде $h_a, h_b, h_c$ се должините на висините, а $c$ е должината на една страна на триаголникот. Определи го едниот од аглите на овој триаголник.

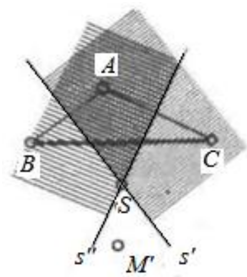
**Решение.** Од даденото равенство следува равенството $h_a h_b = ch_c$, односно $\frac{h_a h_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$. Но, $\frac{ch_c}{2}=P$, каде $P$ е плоштината на триаголникот. Според тоа, $\frac{h_a h_b}{2}=P$ и како $\frac{ah_a}{2}=P$ и $\frac{bh_b}{2}=P$, добиваме $\frac{h_a h_b}{2}=\frac{ah_a}{2}$ и $\frac{h_a h_b}{2}=\frac{bh_b}{2}$, па затоа $a=h_b$ и $b=h_a$. Значи, страните $a$ и $b$ се висини една на друга, па затоа триаголникот е правоаголен со прав агол зафатен со страните $a$ и $b$.

5. Нека $A, B, C$ се точки од рамнината такви што за секоја точка $M$ од таа рамнина е исполнет барем еден од следниве два услови:

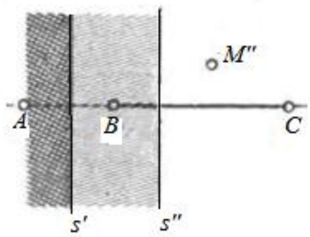
1) $d(A,M)<d(B,M)$, и
2) $d(A,M)<d(C,M)$.

Со $d(X,Y)$ е означено растојанието меѓу точките $X$ и $Y$. Докажи дека точката $A$ припаѓа на отсечката $BC$.

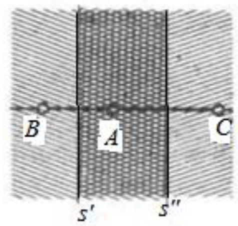
**Решение.** Да претпоставиме дека точката $A$ е надвор од правата $BC$. Множеството од сите точки $M$ кои го задоволуваат условот 1) е осенчената полурамнина определена со симетралата $s'$ на отсечката $AB$ (види црт. 1). Слично, множеството точки кои го задоволуваат условот 2) е осенчената полурамнина определена со симетралата $s"$ на отсечката $AC$ (види црт. 1). Тогаш точките во внатрешноста на аголот $s'Ss"$, како точката на $M'$ не задоволуваат ниту еден од условите 1) и 2). Но, според условот на задаачата, вакви точки во рамнината не постојат. Овој агол во рамнината постои само ако симетралите $s'$ и $s''$ се сечат. Оттука следува дека овие симетрали не може да се сечат, што е можно само ако точката $A$ лежи на правата $BC$. Сега, ако точката $A$ не припаѓа на отсечката $BC$, тогаш постои точка, како точката $M''$ на црт. 2, за која не е исполнет ниту еден од условите 1) и 2). Ако пак точката $A$ е на отсечката $BC$ (црт. 3), тогаш секоја точка $M$ го задоволува условот 1) или условот 2). Со тоа е докажано тврдењето на задачата.




Цртеж 1




Цртеж 2




Цртеж 3

**Осмо одделение**

1. Основата на призмата е квадрат со страна $a$. Должината на страната $a$ е два пати поголема од должината на висината на призмата. Мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви. Определи ги должините на рабовите на оваа призма.

   **Решение.** Висината на призмата е $h=\frac{a}{2}$. Плоштината на призмата е $P=2a^2+4ah=2a^2+2a^2=4a^2$, а волуменот е $V=a^2h=\frac{a^3}{2}$. Од еднаквоста на плоштината и волуменот добиваме $4a^2=\frac{a^3}{2}$ и како $a\neq 0$ од последната равенка добиваме $a=8$. Конечно, $h=4$.

2. Броевите од 1 до 10 во произволен редослед се запишани во еден ред. Според тој редослед на секој број му е придружен неговиот реден број. Потоа секој број е собран со својот реден број. На овој начин се добиени десет збирови. Докажи дека цифрите на единиците се еднакви кај барем два од вака добиените збирови.

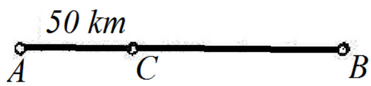
   **Решение.** Нека секој број е собран со својот реден број. Тогаш имаме десет збирови. Ако сите десет збирови ги собереме, добиваме

$$2(1+2+3+...+8+9+10)=110.$$

Ако овие десет збирови завршуваат на различни цифри, тогаш цифрите на единиците би биле 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Затоа при собирање на броевите на местото на единиците би била цифрата на единиците на збирот $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, што значи цифрата 5. Последното противречи дека збирот е 110, па значи мора барем два од овие десет збирови да имаат иста цифра на единиците.

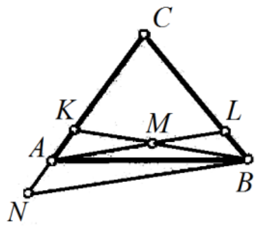
3. Два воза истовремено тргнуваат од местата $A$ и $B$ во пресрет еден кон друг. Секој од нив кога ќе стигне во спротивното место, одма се враќа назад. Возовите првиот пат се сретнале на $50\,km$ од местото $A$, а вториот пат се сретнале на $30\,km$ од местото $B$. Колку е долга пругата меѓу местата $A$ и $B$? (Се претпоставува дека возовите се движат со постојани брзини.)

**Решение.** Нека должината на пругата од $A$ до $B$ е $s$. Со $V_a$ да ја означиме брзината на возот кој тргнува од местото $A$, а со $t$ времето од тргнувањето до првата средба со другиот воз. За време $t$ првиот воз поминал $50\,km$, па затоа $V_a t=50$. Двата воза заедно ја поминале релацијата од $A$ до $B$ еднаш (на цртежот лево патот кој го поминал првиот воз е $AC$, патот кој го поминал вториот воз е $BC$, а вкупно поминале $AC+BC=AB=s$). До следната средба двата воза заедно поминале пат долг $3s$, види цртеж десно, првиот воз поминал $AB+BD$, а вториот поминал пат $BA+AD$. Бидејќи $BA+AD=s=AB$, добиваме $AB+BD+BA+AB=3s$. Според условот брзините на возовите се рамномерни, па за три пати да се помине патот потребно е три пати повеќе време. Затоа првиот воз до втората средба поминал пат $3V_a t$, односно $3V_a t=s+30$. Ако замениме $V_a t=50$, добиваме $150=s+30$, односно $s=120$. Значи, пругата меѓу местата $A$ и $B$ е долга $120\,km$.



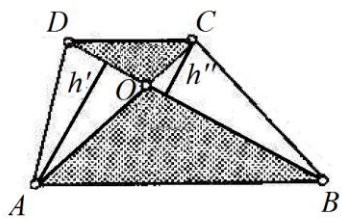

4. На страната $AC$ на триаголникот $ABC$ е земена точка $K$ која $AC$ ја дели во однос 1:3, а на страната $BC$ е земена точка $L$ која $BC$ ја дели во однос 1:4. Нека $M$ е пресечната точка на отсечките $AL$ и $BK$. Определи го односот на отсечките $KM$ и $MB$.

**Решение.** Ја продолжуваме отсечката $CA$ преку темето $A$. Нека $N$ е пресечната точка на правата $AC$ и правата низ $B$ паралелна со правата $AL$. Тогаш од Талесовата теорема следува $\frac{AN}{AC}=\frac{BL}{CL}=\frac{1}{4}$. Значи, $AN=\frac{1}{4}AC$. Бидејќи и $AK=\frac{1}{4}AC$, добиваме $AN=AK$, т.е. точката $A$ е средина на отсечката $KN$ (цртеж десно). Во триаголникот $BNK$ правата $AM$ е паралелна на страната $BN$, па бидејќи оваа права ја полови страната $KN$, таа мора да ја полови и страната $BK$. Значи, $KM:MB=1:1$.




5. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на триаголниците на кои им припаѓаат основите на трапезот се $P_1$ и $P_2$ Изрази ја плоштината на трапезот $P$ со помош на $P_1$ и $P_2$.

**Решение.** Нека $O$ е пресекот на дијагоналите, $P_{ABO}=P_1$, $P_{DO}=P_2$, $P_{ADO}=P_4$ и $P_{BCO}=P_3$ Ќе докажеме дека плоштиникте на триаголниците $ADO$ и $BCO$ се еднакви меѓу себе, т.е. дека $P_3=P_4$. Навистина трриаголниците $ABD$ и $ABC$ имаат заедничка основа $AB$ и еднакви висини (висината на трапезот). Значи, $P_3+P_1=P_4+P_1$, па затоа $P_3=P_4$.




Триаголниците $ABO$ и $ADO$ имаат основи $BO$ и $DO$ и заедничка висина $h'$ од темето $A$, па затоа $P_1=\frac{1}{2}BO\cdot h'$ и $P_4=\frac{1}{2}DO\cdot h'$, односно $P_1:P_3=BO:DO$. Сличнмо се докажува дека $P_4:P_2=BO:DO$ и како $P_3=P_4$, добиваме $P_3:P_2=BO:DO$. Значи $P_1:P_3=P_3:P_2$, од каде следува $P_3=\sqrt{P_1P_2}$.

Бидејќи плоштината на трапезот е $P=P_1+P_2+2P_3$, добиваме

$$P=P_1+P_2+2\sqrt{P_1P_2}\text{, т.е. } P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2.$$