Катерина Аневска, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ЕДНА ТЕОРЕМА, МНОГУ НАЧИНИ ЗА ДОКАЖУВАЊА

Во делот од геометријата, една од најпопуларните теореми е Питагоровата теорема, која за првпат се среќава во првата книга на Евклидовите "Елементи". Во редовната настава се запозна со формулацијата на оваа теорема која гласи:

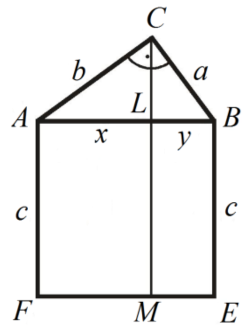
Ако a и b се должините на катетите на правоаголен триаголник, а c е должината на неговата хипотенуза, тогаш $a^2+b^2=c^2$,

пли популарно кажано

Кај правоаголен триаголник збирот на плоштините на квадратите конструирани над катетите е еднаков на плоштината на квадратот конструиран над хипотенузата.

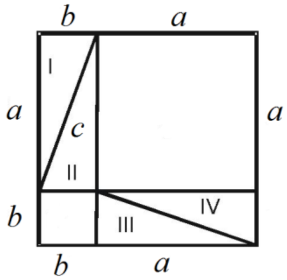
Покрај тоа, решаваше задачи во оваа теорема се применува на елементарно ниво. Меѓутоа, значењето на Питагоровата теорема е далеку поголемо, па оттука и големиот интерес кои математичарите во минатото го пројавувале за оваа теорема. Сето ова резултирало со многу докази на ова елементарно тврдење, од кои за жал веќе ниту еден не се усвојува на часовите по математика. На авторите на ова математичко четиво им се познати повеќе од 100 докази, кои можат да се најдат во литературата, но овде ќе презентираме неколку докази, за кои сметаме дека може да се усвојат од учениците во основното образование.

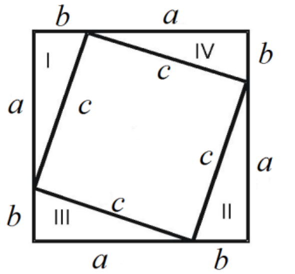
Доказ 1 (Евклид). Над хипотенузата AB од надворешната страна на $\triangle ABC$ конструираме квадрат $ABEF$ (цртеж десно). Ја повлекуваме висината CL чие продолжение ја сече страната FE во точката M. Лесно се докажува дека $\triangle ALC \sim \triangle CLB \sim \triangle ACB$, од каде при ознаките на цртежот следува дека $x=\frac{b^2}{c}$ и $y=\frac{a^2}{c}$. Затоа, важи $P_{FMLA}=cx=c\frac{b^2}{c}=b^2$, $P_{MEBL}=cy=c\frac{a^2}{c}=a^2$ и $P_{FEBA}=c^2$. Но,



$$P_{FEBA}=P_{FMLA}+P_{MEBL}\text{, т.е. } c^2=a^2+b^2. \blacksquare$$

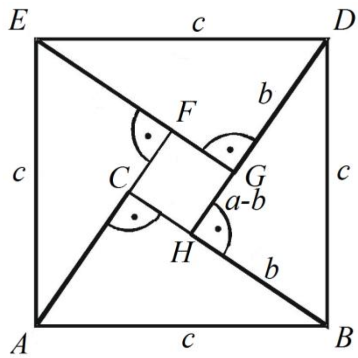
Доказ 2 (Питагора). Цртаме квадрат со должина на страна $a+b$ и истиот го делиме на квадрати со страни a и b и четири складни правоаголни триаголници со должини на катети a и b и хипотенуза c (цртеж долу лево). Потоа правоаголните триаголници $\mathrm{II}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ и IV ги поставуваме како на цртежот десно, со што во средината се добива ромб (зошто?). Но збирот на острите агли кај правоаголен триаголник е еднаков на 90°, па затоа аглите на овој ромб се еднакви на 90°, што значи дека тој е квадрат.





Од левиот цртеж следува дека плоштната на квадратот е еднаква на $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а од десниот цртеж следува дека таа е еднаква на $c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$, па затоа $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$. ■

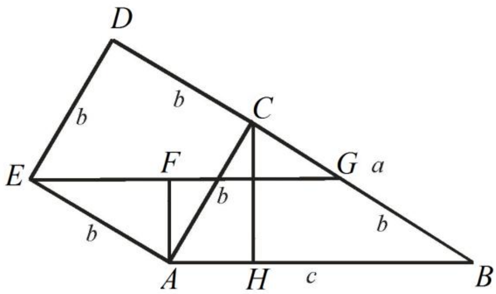
Доказ 3 (Бхаскари). Четири правоаголни триаголници со должини на катети a и b и должина на хипотенуза ги поставуваме како на цртежот десно, со што ги добиваме квадратите $ABDE$ и $CHGF$. Од една страна добиваме дека $P_{ABCD} = c^2$, а од друга страна имаме



$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{CHGF} + P_{ABC} + P_{BDH} + P_{DEG} + P_{EAF} \\ &= (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

па затоа важи $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Доказ 4 (О. Вернер). Конструираме правоаголен $\triangle ABC$ и над AC цртаме квадрат $ACDE$ (цртеж десно). Нека $EG \parallel AB$ и да ги повлечеме нормалите CH и AF на AB. Бидејќи $EA \parallel BD$ добиваме дека



$\overline{AB}\cdot\overline{AF} = P_{AEGB} = \overline{AE}\cdot\overline{AC} = b^2 = P_{AEDC}$, т.е. $b^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AF}$.

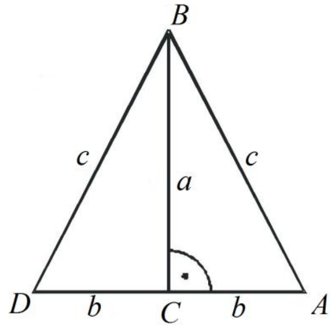
Понатаму, бидејќи $\overline{EA} = \overline{AC}$ и $\measuredangle AEF = \measuredangle ACH$, како агли со нормални краци, добиваме дека триаголниците EAF и ACH се складни, па затоа $\overline{AF} = \overline{AH}$. Значи, $b^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AH}$.

На сличен начин, повторувајќи ја постапката со конструкција на квадрат над страната CB добиваме $a^2 = \overline{AB}\cdot\overline{BH}$.

Конечно, од последните две равенства следува

$$a^2 + b^2 = \overline{AB}\cdot\overline{BH} + \overline{AB}\cdot\overline{AH} = \overline{AB}(\overline{AH} + \overline{BH}) = \overline{AB}\cdot\overline{AB} = c^2 . ■$$

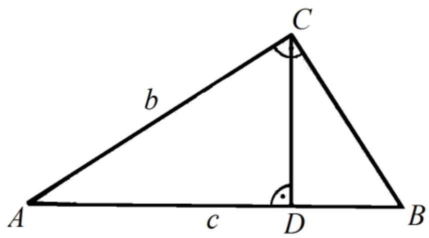
Доказ 5. Нека е даден правоаголен $\triangle ABC$ со катети a и b и хипотенуза c (цртеж десно). Нека $\triangle DBC$ е осносиметричен во однос на $\triangle ABC$. Тогаш $\triangle DAB$ е рамнокрак правоаголен со краци c, основа $2b$ и висина a. Имаме, $P_{DAB} = ab$. Полупериметарот на овој триаголник е $s = \frac{2b+2c}{2} = b + c$, па од Хероновата формула следува



$$P = \sqrt{s(s-2b)(s-c)(s-c)}$$
$$= \sqrt{(b+c)(c-b)b^2} = b\sqrt{c^2 - b^2}.$$

Според тоа, $ab = b\sqrt{c^2 - b^2}$, од каде добиваме $a^2 = c^2 - b^2$, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$. ■

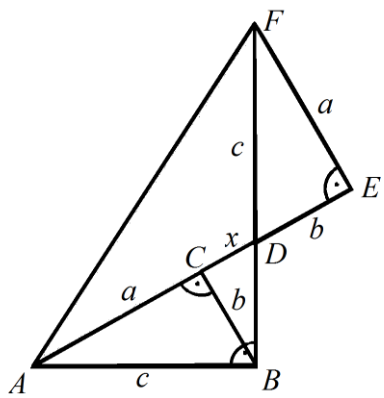
Доказ 6. При тандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$, нека CD е висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB на $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle CBD$ и $\triangle ABC$ се слични важи $\frac{P_{CBD}}{P_{ABC}} = (\frac{a}{c})^2$, а бидејќи $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$ се слични важи $\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = (\frac{b}{c})^2$. Според тоа,



$$(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{P_{CBD}}{P_{ABC}} + \frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{P_{CBD}+P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{P_{ABC}}{P_{ABC}} = 1,$$

од каде $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Доказ 7. Ја продолжуваме страната AC преку темето C и во темето B повлекуваме нормала, при што во пресекот со правата AC ја наоѓаме точката D. Потоа конструираме триаголник DFE складен со триаголникот ABC (цртеж десно). Понатаму триаголниците FDE и BDC се слични, од каде добиваме $b^2 = ax$. Сега за плоштината на триаголникот ADF имаме

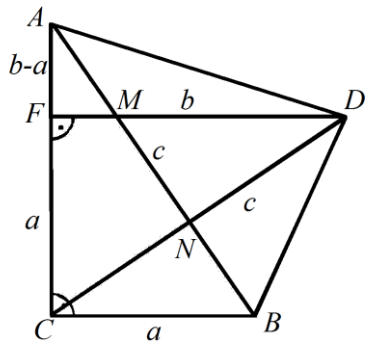


$$P = \frac{\overline{FD} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{c^2}{2}$$

и

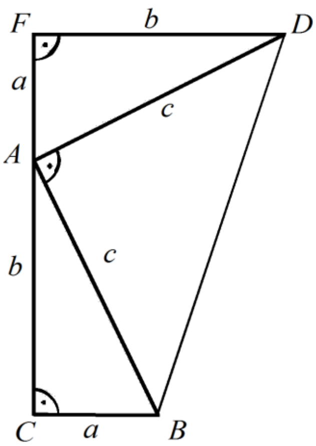
$$P = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{(a+x)a}{2} = \frac{(a+\frac{b^2}{a})a}{2} = \frac{a^2+b^2}{2},$$

аа затоа $\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$. ■



Доказ 8 (Џон Кавамура). Нека е даден триаголникот ABC и да конструираме триаголник DCF складен со триаголникот ABC (цртеж десно). Бидејќи $FD \| CB$ имаме $\measuredangle NMC = \measuredangle CBN$ и $\measuredangle MDN = \measuredangle NCA$, што значи дека триаголниците CBN и DMN се слични. Но, $\measuredangle MDN + \measuredangle CBN = 90^\circ$, па затоа $\measuredangle MND = 90^\circ$. Според тоа, $AB \perp CD$. Значи дијагоналите на четириаголникот $ACBD$ се заемно нормални, па затоа од

$\frac{c^2}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = P_{ACBD} = P_{CBD} + P_{ACD} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CF}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{FD}}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$. ■



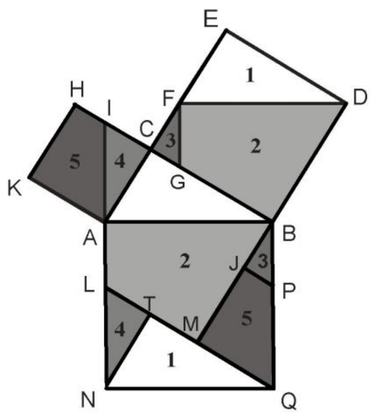
Доказ 9 (Џемс Гарфиелд). Преку точката A ја продолжуваме страната AC и цртаме триаголник ADF складен на триаголникот BAC (цртеж десно). Плоштината на триаголникот ABD можеме да ја пресметаме на два начина и тоа

$$P_{ABD} = \frac{c^2}{2}, \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} P_{ABD} &= P_{FDBC} - P_{ABC} - P_{ADF} \\ &= \frac{(a+b)(a+b)}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) следува $a^2 + b^2 = c^2$. ■

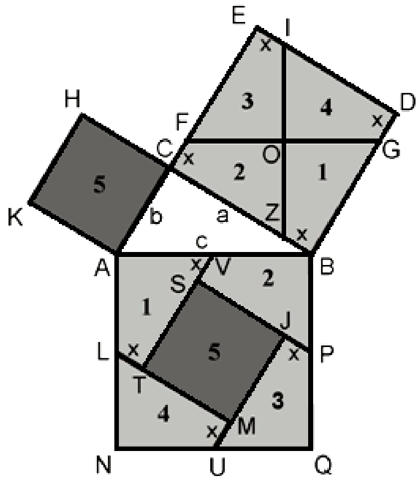


Доказ 10. На страните на триаголникот ABC ги конструираме квадратите $BCED$, $ACHK$ и $ABQN$, а потоа ја продолжуваме страната NA до пресекот I со страната CH. Конструираме прави $FD \| AB$, $FG \| NA$, $QL \| BC$, $NT \| AC$, $BM \| AC$, точка P на BQ таква што $\overline{BP} = \overline{FG}$ и $PJ \| BC$, цртеж десно. Лесно се докажува дека триаголниците и четириаголниците означени со еднакви броеви се складни. Затоа важи

$$\begin{aligned} P_{ABQN} &= P_{ABML} + P_{BPJ} + P_{TQN} + P_{JPQM} + P_{LTN} \\ &= P_{FDBG} + P_{FCG} + P_{EDF} + P_{HIAK} + P_{ICA} \\ &= P_{CBDE} + P_{CAKH} \end{aligned}$$

односно $a^2 + b^2 = c^2$. ■

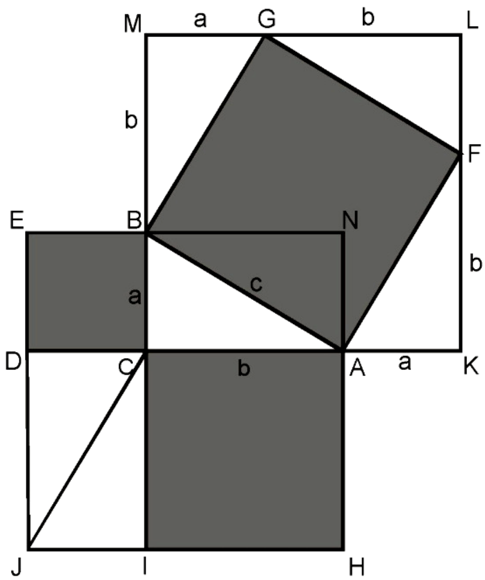
Доказ 11 (Хенри Перигајл). Лесно се покажува дека на цртежот десно четириаголниците *LMUN, VTLA, PSVB, UJPQ, GBZO, ZCFO, FEIO* и *IDGO* се складни и дека четириаголниците *TMJS* и *ACKH* се складни. Оттука следува дека



$$\begin{aligned} P_{NQBA} &= P_{LMUN} + P_{VTLA} + P_{PSVB} + \\ &\quad + P_{UJPQ} + P_{TMJS} \\ &= P_{GBZO} + P_{ZCFO} + P_{FEIO} + \\ &\quad + P_{IDGO} + P_{KHCA} \\ &= P_{CBDE} + P_{KHCA} \end{aligned}$$

односно $a^2+b^2=c^2$. ■

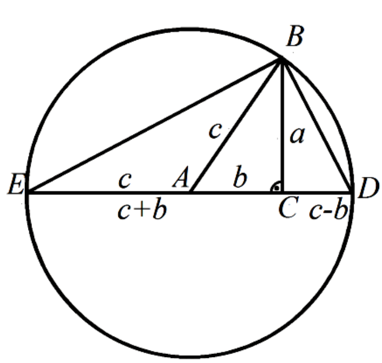
Доказ 12. Нека $a \le b < c$ се страните на правоаголниот триаголник ABC (цртеж десно). Го дополнуваме квадратот $BAFG$ конструиран над хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC со складните триаголници BAC, FAK, GFL и BGM. Добиената фигура е квадрат со $a+b$ (зошто?). Унијата на квадратите конструирани над катетите ја дополнуваме со складните триаголници JDC, CIJ, BNA и CAB со што се добива квадратот $JHNE$ со должина на страна $a+b$. Затоа, $P_{JHNE} = P_{CKLM}$, т.е.



$$4P_{ABC} + P_{AFBG} = 4P_{ABC} + P_{BCDE} + P_{ACIH},$$

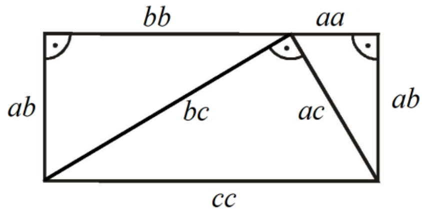
од каде следува $a^2+b^2=c^2$. ■

Доказ 13. Нека е даден правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Конструираме кружница со центар во A и радиус $r=\overline{AB}$ (цртеж десно). Ја продолжуваме катетата AC до пресекот E со кружницата. Триаголникот EDB е правоаголен со прав агол во темето B (периферен агол над дијаметарот ED). Тогаш $\triangle ECB \sim \triangle BCD$, па



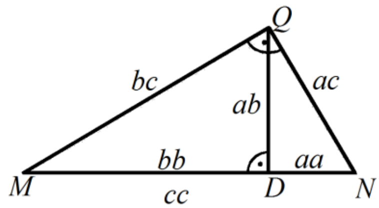
затоа $\overline{BC}^2 = \overline{EC} \cdot \overline{CD}$, што значи $a^2 = (c-b)(c+b)$, односно $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Доказ 14 (Џефри Маргју). За правоаголниот триаголникот со катети a и b и хипотенуза c конструираме сличен триаголник со коефициент на сличност c, а потоа над катетата со должина ac конструираме слечеин триаголник на почетниот триаголник со коефициент на



сличност a, а над катетата со должина bc конструираме сличен триаголник со коефициент на сличност b (цртеж десно). Добиената фигура е правоаголник (зошто?), чија една страна е со должина ab, а другата страна има должина $cc = c^2$, односно $aa + bb = a^2 + b^2$, па затоа $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Доказ 15 (Биркоф). За правоаголниот триаголникот со катети a и b и хипотенуза c конструираме сличен триаголник MNQ со коефициент на сличност c, а потоа во овој триаголник ја повлекуваме висината QD и добиваме триаголник NQD кој е сличен на



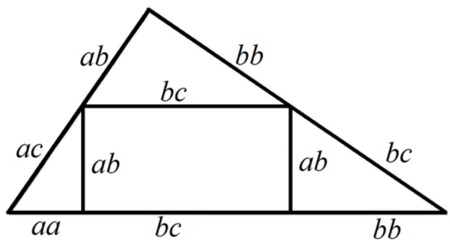
почетниот триаголнк со коефициент на сличност a и триаголник QMD кој е сличен на почетниот триаголник со коефициент на сличност b (види цртеж). Конечно, од $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN}$ следува $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Доказ 16. Плоштината на триаголникот на цртежот десно можеме да ја пресметаме на два начина:

$$P = \frac{(ac+ab)(bb+bc)}{2} = \frac{acb^2+abc^2+ab^3+acb^2}{2}$$

$$= acb^2 + ab\frac{c^2+b^2}{2}$$

и $P = ab\frac{a^2}{2} + abb^2 + acb^2$



па затоа последователно добиваме

$$acb^2 + ab\frac{c^2+b^2}{2} = ab\frac{a^2}{2} + abb^2 + acb^2, \text{ т.е. } c^2 = a^2 + b^2. \ ■$$

Литература

1. Đ. G. Marković, *Geomtrijski poliformizam,* 3 Makarije, Podgorica, 2006
2. E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*, NCTM, 1968
3. E. Maor, *The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2007

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ