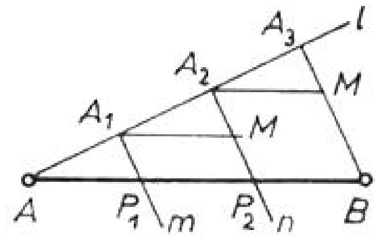
Šefket Arslanagić (Trebinje) — Dragoljub Milošević (Pranjani)

PODELA DUŽI NA TRI JEDNAKA DELA*

Podela duži na 3 jeonaka dela, uz upotrebu samo šestara i lenjira, izvodi se obično na sledeći način.

Ako treba datu duž AB (sl.1) podeliti na 3 jednaka dela, treba iz jedne od njenih krajnjih tačaka (na primer iz tačke A) povući proizvoljnu polupravu l, i na nju preneti 3 jednake duži $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Zatim treba nacrtati duž A_3B i kroz tačke A_2 i A_3 povući poluprave m i n, paralelne sa A_3B, koje seku datu duž AB u tačkama P_1 i P_2. Tačkama P_1 i P_2 biće data duž AB podeljena na 3 jednaka dela.



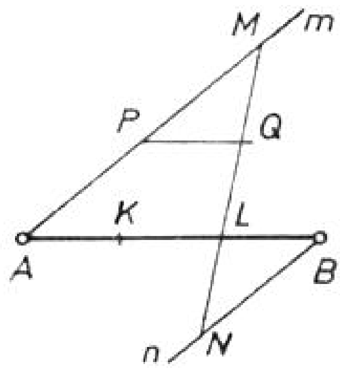
Sl. 1

Jednakost delova AP_1, P_1P_2 i P_2B lako se dokazuje s obzirom na podudarnost trouglova AP_1A_1, $A_1M_1A_2$ i $A_2M_2A_3$ ($A_1M_1 \parallel AB$, $A_2M_2 \parallel AB$) i na poznata svojstva paralelograma $A_1P_1P_2M_1$ i $A_2P_2BM_2$.

No podela duži na 3 jednaka dela samo pomoću šestara i lenjira može se izvesti i drugojače i ovde će biti izložena 4 različita načina ove deobe.

Prvi način. Neka je data duž AB. Povucimo proizvoljne poluprave $Am \parallel Bn$ (sl. 2). Na njih nanesimo šestarom tačke M i N tako da je $AM = 2BN$. Spojmo tačke M i N. U preseku duži AB i MN dobija se tačka L, takva da je $AL = 2BL$. Prema tome, ako se iz tačke A prenese na duž AB duž $AK = BL$, duž AB biće tačkama K i L podeljena na 3 jednaka dela.

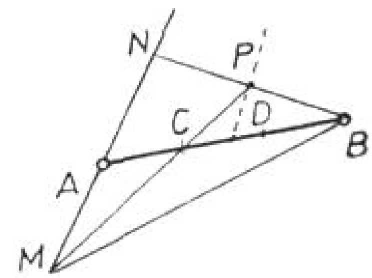
Dokaz. Neka je $AP = PM = BN$ i neka je $PQ \parallel AB$, što znači da je $AL = 2PQ$. Kako je pak $\Delta PQM \cong \Delta BLN$ ($PQ = BN$, $\sphericalangle M = \sphericalangle = N$, $\sphericalangle P = \sphericalangle B$), to je $PQ = BL$. Usled toga je $AL = 2BL$, pa je duž AB tačkama K i L podeljena na 3 jednaka dela.



Sl. 2

* Tema »Podela duži na m jednakih delova« pojavljuje se eksplicitno samo u nekim od naših republičkih i pokrajinskih nastavnih programa za učenike osnovnih škola, dok se u ostalima ne navodi; no i tamo gde se ta tema pominje, ona se vezuje svugde za Talesovu teoremu. Međutim, podela duži na 3 jednaka dela samo pomoću šestara i lenjira može se izvesti i nezavisno od opštepoznatog postupka koji se zasniva na Talesovoj teoriemi, i o tome su nam poslali svoje priloge, nezavisno jedan od drugog, naši saradnici Šefket Arslanagić i Dragoljub Milošević. Kako se njihova izlaganja delimično poklapaju, odlučili smo da ih objavimo, uz njhovu saglasnost, u vidu jednog članka. *Uredništvo*

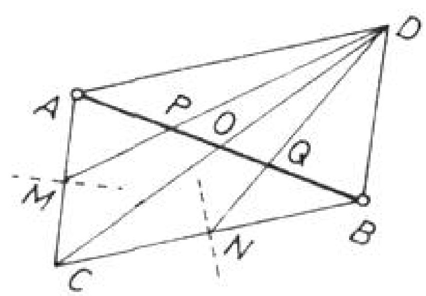
Drugi način. Kroz krajnju tačku A date duži AB povuče se proizvoljna prava l i na njoj se odaberu 2 tačke M i N tako da je $AM=AN$ (sl. 3). Spajanjem tačaka M i N sa tačkom B dobija se trougao MBN, u kojem je data duž jedna od njegovih težišnih duži. Ako se konstruiše još jedna od težišnih duži ovog trougla, na primer duž MP, ona će preseći datu duž AB u tački C tako da će biti $BC=2AC$. Duž AC predstavljaće, prema tome, jednu trećinu duži AB. Zato, ako se iz tačke C prenese na duž AB duž $CD=AC$, tačka C i D deliće duž AB na 3 jednaka dela.



Sl. 3

D o k a z. Poznato je da se sve tri težišne linije svakog trougla seku u jednoj tački tako da ih ta tačka deli po razmeri 2 : 1. Prema tome, $BC=2CA$, pa je navedeni postupak za deljenje duži na tri jednaka dela ispravan.

Treći način. Neka je data duž AB. Ako se nad ovom duži, kao nad dijagonalom, konstruiše proizvoljan paralelogram $ABCD$ (sl. 4), i ako jedno od dva temena C i D (na primer teme D) spojimo sa središtima M i N dveju susednih stranica AC i BC paralelograma $ACBD$, duži DM i DN seći će duž AB u dvema tačkama P i Q tako da je $AP\ =PQ=QB$. Prema tome tome, data duž AB biće tačkama P i Q podeljena na tri jednaka dela.

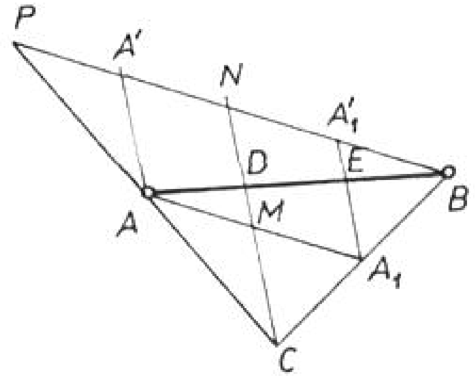


Sl. 4

D o k a z. Spojmo temena C i D dijagonalnom CD, i obeležimo tačku preseka dveju dijagonala sa O. Kako su DN i BO dve težišne duži u trouglu CBD, to je $OQ=BQ/2$. Na isti način se dolazi i do zaključka da je $PO=AP/2$. Kako je $\Delta\, CBD \cong \Delta\, ACD$ $(AC=BD,\ CB=DA,\ CD=CD)$, to je $AP=BQ$, $OP=OQ$. Prema tome je $PQ=2OP=$ $=2\,OQ=AP=BQ$.

N a p o m e n a. Da bi se navedena kaonstrukcija izvela što brže i što lakše, najpodesnije je da se nad datom duži AB, kao nad dijagonalom, konstruiše romb. U tom slučaju oko tačke A i tačke B opisuju se kružni luci sa istim otvorom šestara a polovina jedne stanice romba predstavlja istovremeno i polovinu druge stranice.

Četvrti način. Konstruišimo trougao ABC čija je jedna stranica data duž AB (sl. 5). Nacrtajmo težišnu duž AA_1 i potom odredimo središte M te duži. U preseku pravih CM i AB dobijamo tačku D, kojom je data duž podeljena u odnosu 2 : 1. Ako na duž AB nanesemo duž $DE=AD$, tačka E predstavljaće središte duži BD, pa će tačkama D i E duž AB biti podeljena na tri jednaka dela.



Sl. 5

D o k a z. Konstruišimo iz tačke B polupravu paralelnu težišnoj duži AA_1 i odredimo njen presek P sa produženotkom stranice CA preko tačke A. U preseku prave CD i duži BP dobijamo tačku N. Ako se konstruišu duži $AA' \| CN$ i $A_1A_1' \| CN$, lako se dokazuje da je N središte duži BP, i da je A središte duži CP. Prema tome su duži AB i CN dve težišne duži trougla BCP, pa njihova tačka D deli svaku od njih u odnosu 1 : 2.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија