Сојузен натпревар 1980

Седмо одделение

1. Во земјата Недојдија покрај другите банкноти има банкноти од 15 и 20 денари. Венди отишла да пазари и имала само банкноти од 15 и 20 денари. Петтина од парите ги потрошила за појадок кој го платила со точно две банкноти, а половина од парите кои и останале ги потрошила во месарницата каде што дала точно три банкноти. Колку пари имала Венди кога тргнала од дома?

   Решение. За појадок Венди потрошила 2 банкноти, т.е. 30 денари или 45 денари или 60 денари, а тоа е петтина од сите пари. Според условот на задачата за преостанатите дневни потреби дала два пати повеќе пари, т.е. 60 денари или 90 денари или 120 денари. Овој износ го платила со 3 банкноти, па затоа тој не може да биде поголем од 60 денари. Според тоа, Венди вкупно потрошила $30+60=90$ енари, што е три петтини од 150 денари.

   Конечно, кога Венди тргнала од дома таа имала 150 денари.

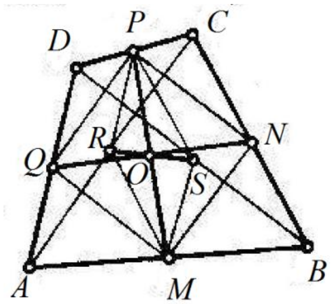
2. Реалните броеви a,b,c,d го задоволуваат условот
$$a^2+d^2-2(ab+bc+cd-b^2-c^2)=0.$$
   Докажи дека $a=b=c=d$.

   Решение. Дадениот услов е еквивалентен на условот
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2=0.$$
   Значи, збир на три ненегативни броја е еднаков на нула, па затоа овие броеви мора да се еднакви на нула. Конечно, од $a-b=0$, $b-c=0$ и $c-d=0$ следува $a=b=c=d$.

3. Докажи дека производот на два последователни цели броја е делив со 12, ако поголемиот од броевите е квадрат на некој природен број.

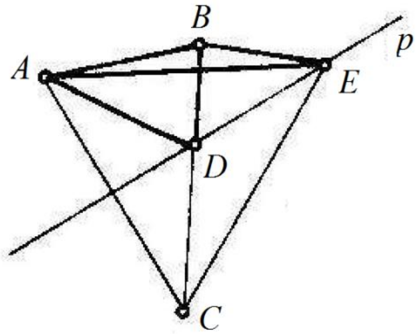
   Решение. Ако поголемиот број е k^2, тогаш помалиот број е k^2-1 и нивниот производ е $k^2(k^2-1)=(k-1)k(k+1)k$. Првите три множители се три последователни природни броја, па затоа нивниот производ е делив со 3. Ако k е непарен број тогаш $k-1$ и $k+1$ се парни броеви, па затоа призводот е делив со 4. Ако k е парен број, тогаш е јасно дека производот е делив со 4. Конечно, од $\mathrm{NZD}(3,4)=1$ следува дека разгледуваниот производ е делив со $3\cdot 4=12$.

4. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека M,N,P,Q,R,S се редоследно средините на отсечките AB,BC,CD,DA,AC,BD. Докажи дека правите MP,NQ,RS се сечат во една точка.



Решение. Во триаголникот ABC отсечката MN е средна линија, па таа е паралелна и еднаква на половина на страната AC. Понатаму, во триаголникот ACD отсечката PQ е средна линија, па таа е паралелна и еднаква на половина на страната AC. Според тоа, отсечките MN и PQ се паралелни и еднакви, па затоа четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм и неговите дијагонали се преполовуваат. Сега, разгледувајќе ги триаголниците ABD и ACD на потполно аналоген начин се докажува дека MR и PS се паралелни и еднакви меѓу себе. Значи, четириаголникот $MSPR$ е паралелограм и неговите дијагонали MP и RS се половат. Конечно, од претходните разгледувања следува дека MP,NQ,RS се сечат во една точка.

5. Дадени се права p и точки A и B кои не лежат на p и се на иста страна од p. Нека точката C е симетрична на точката A во однос на правата p. Правите p и BC се сечат во точката D. Нека E е произволна точка од p различна од D. Докажи дека периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE.



Решение. Точките A и C се симетрични во однос на правата p, па затоа $AD=CD$ и $AE=CE$. Точката D припаѓа на отсечката BC, па затоа периметарот на триаголникот ABD е еднаков на

$$AB+BD+AD=AB+BD+DC$$
$$=AB+BC.$$

Периметарот на триаголникот

ABE е еднаков на
$$AB+BE+AE=AB+BE+CE.$$
Сега, од неравенството на триаголник применето на триаголникот BCE добиваме $BC<BE+CE$, па затоа
$$AB+BC<AB+BE+CE,$$
што значи дека периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE.

Осмо одделение

1. Докажи дека во група од 6 ученици постојат 3 ученици така што секој ги познава другите два, или постојат 3 ученици така што секој не познава ниту еден од другите два ученика.
Решение. Нека A е еден од овие ученици. Од преостанатите 5 ученици постојат три кои се познаваат со A, или постојат три кои не се познаваат со A. Да го разгледаме случајот кога имаме три познаници на A. Ако меѓу овие ученици има двајца кои се познаваат, тогаш заедно со A имаме три ученици кои меѓусебно се познаваат. Во спротивно имаме три ученици така што секој не познава ниту еден од другите два ученика. Аналогно се разгледува случајот кога имаме три ученици кои не се познаници со A. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. Должините на страните на правоаголен триаголник се природни броеви. Дали може должините на двете катети да се непарни броеви?
Решение. Нека претпоставиме дека должините на катетите се непарни броеви и да означиме $a=2m+1$ и $b=2n+1$. Сега, од Питагоровата теорема следува
$$c^2=a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+m+n^2+n)+2.$$
Според тоа, c^2 е делив со 2, но не е делив со 4. Но, ако c^2 е делив со 2, тогаш и c мора да е делив со 2, па добиваме дека c^2 е делив со 4, што е противречност. Од добиената противречност следува дека должините на двете катети не може да се непарни броеви.

3. Горјан потрошил определена сума пари при купување на ранец, книга и пенкало. Ако ранецот бил 5 пати поефтин, пенкалото 2 пати поефтино, а книгата 2,5 пати поефтина од вистинската цена, тогаш Горјан

ќе платeл 160 денари. Ако ранецот бил 2 пати поефтин, пенкалото било 4 пати, а книгата 3 пати поефтина, тогаш Горјан ќе платeл 240 денари. Колку пари потрошил Горјан?

Решение. Со x да ја означиме цената на ранецот, со y цената на пенкалото и со z цената на книгата. Од условот на задачата следува

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=160 \text{ и } \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=240.$$

Дадените равенства се еквивалентни со равенствата

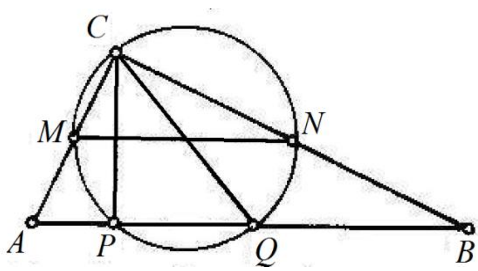
$$2x+5y+4z=1600 \text{ и } 6x+3y+4z=2880 .$$

Ако овие равенства ги собереме и добиеното равенство го поцелиме со 8 добиваме

$$x+y+z=560 .$$

Значи, Горјан потрошил 560 денари.

4. Правоаголен триаголник има катети со должини $60\,cm$ и $80\,cm$. Нека M и N се средините на овие катети. Кружницата со дијаметар MN ја сече хипотенузата во точките P и Q. Определи ја должината на отсечката PQ.



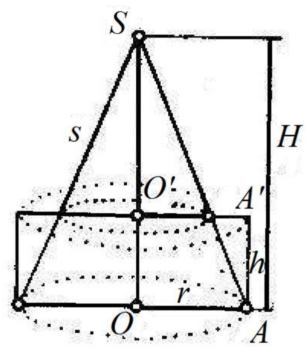
Решение. Дадениот триаголник има хипотенуза AB со должина $100\,cm$, па средната линија MN има должина $50\,cm$ (види цртеж). Дадената кружница минува низ темето C на правиот агол бидејќи аголот над дијаметар е прав агол. Точката која е симетрична на C во однос на правата MN лежи на хипотенузата, па како кружницата е симетрична во однос на дијаметарот MN заклучуваме дека оваа точка лежи на кружницата. Според тоа, таа е една од пресечните точки на хипотенузата и кружницата, да кажеме точката P. Заради симетријата отсечката CP е нормална на MN, што значи и на AB. Затоа $\measuredangle CPQ=90^\circ$. Оттука следува дека отсечката CQ е дијаметар на кружницата и нејзината должина е $50\,cm$. За плоштината на триаголникот ABC имаме $P=\frac{60\cdot 80}{2}=2400$ и $P=\frac{AB\cdot CP}{2}=50\cdot CP$, па затоа $50\cdot CP=2400$, т.е. $CP=48\,cm$.

Сега, од правоаголниот триаголник CPQ добиваме

$$PQ=\sqrt{CQ^2-CP^2}=\sqrt{50^2-48^2}=\sqrt{196}=14\,cm,$$

што и требаше да се определи.

5. Даден е конус со радиус на основата $r=3\,dm$. Над истата основа и од истата страна е конструиран цилиндар чија плоштина е еднаква на плоштината на конусот, а волуменот е еднаков на волуменот на конусот. Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое е пресек на конусот и цилиндарот.



Решение. Од еднаквоста на волумените добиваме $\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2H$, т.е. $H=3h$. Од еднаквоста на плоштините добиваме

$$2\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+\pi rs\text{, т.е. } r+2h=s,$$

па ако замениме $r=30\,cm$ добиваме $s=30+2h$. Сега, од Питагоровата теорема применета на правоаголниот триаголник SOA следува $s^2=r^2+H^2$, односно

$$(30+2h)^2=900+9h^2.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката $5h(h-24)=0$, од каде наоѓаме $h=24\,cm$, па затоа $H=72\,cm$ и $s=78\,cm$. Треба уште да ги определиме димензиите на конусот со висина $SO'=\frac{2}{3}H=48\,cm$. Триаголниците SOA и $SO'A'$ се слични, па затоа $O'A'=\frac{2}{3}r$ и $SA'=\frac{2}{3}s$. Бараниот волумен е еднаков на разликата на волумените на двата конуси

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2H-\frac{1}{3}\pi(\tfrac{2}{3}r)^2\cdot\tfrac{2}{3}H=28000\pi\,cm^3.$$

Плоштината е еднаква на збирот на плоштините на два круга, зголемена за разликата на омотачите на двата конуси:

$$P=\pi r^2+\pi(\tfrac{2}{3}r)^2+\pi rs-\tfrac{2}{3}\pi r\cdot\tfrac{2}{3}s=2600\pi\,cm^2.$$