## КОЛИКО РЕШЕЊА ИМА ЈЕДНАЧИНА $x^2 = x$?

Зоран Каделбург, Београд

Верујемо да би скоро сваки ученик старијих разреда основне школе на питање постављено у наслову одговорио „два“, односно да су та решења бројеви 0 и 1.

Већина „седмака“ и „осмака“ би умела и да докаже да су то и једина решења, тако што примети да је дата једначина еквивалентна једначини $x(x - 1) = 0$ и искористи чињеницу да је производ два броја једнак нули само ако је један од њих једнак нули.

Поставимо, међутим, проблем мало другачије. Одредимо најпре оне цифре $a$ које имају особину да се број $a^2$ завршава такође цифром $a$. Лако је видети да су то, осим 0 и 1, још цифре 5 и 6. Сада испитајмо да ли постоје двоцифрени бројеви $\overline{ba}$, такви да се број $\overline{ba}^2$ завршава са $\overline{ba}$. То бисмо могли да урадимо „пробањем“, али имајући у виду даља разматрања, покушајмо да до одговора дођемо другачије.

Јасно је да мора бити $a = 5$ или $a = 6$ (случај $a = 0$ би као одговор дао 00, а случај $a = 1$ би дао 01, што не сматрамо двоцифреним бројевима). Ако је $a = 5$, тражени број ће имати облик $\overline{b5} = 10b + 5$, па број $(10b + 5)^2$ треба да има двоцифрени завршетак $\overline{b5}$. Другим речима, потребно је да разлика $(10b + 5)^2 - (10b + 5)$ буде дељива са 100. Но, како је, према правилу о квадрату бинома,

$$(10b + 5)^2 - (10b + 5) = 100b^2 + 100b + 25 - (10b + 5) = 100b^2 + 90b + 20 = 100b^2 + 10(9b + 2),$$

то је очигледно потребно (и довољно) да број $9b + 2$ буде дељив са 10. Једноставна провера показује да је то испуњено само за $b = 2$, па је једини број траженог облика 25.

Сличним поступком се у случају броја са последњом цифром 6 добија да мора бити

$$\begin{aligned}(10b + 6)^2 - (10b + 6) &= 100b^2 + 120b + 36 - (10b + 6)\\ &= 100b^2 + 110b + 30\\ &= 100b^2 + 100b + 10(b + 3)\end{aligned}$$

дељиво са 100, тј. $b + 3$ дељиво са 10. Једина могућност је сада $b = 7$, па је тражени број 76.

Можемо ли да наставимо оваква разматрања? Очигледно, следеће питање јесте да ли постоје троцифрени бројеви $\overline{cba}$ такви да се $\overline{cba}^2$ завршава са $\overline{cba}$. Према претходно изведеном, јасно је да долазе у обзир само бројеви облика $\overline{c25}$ или $\overline{c76}$. У првом случају мора бити

$$\begin{aligned}(100c + 25)^2 - (100c + 25) &= 10000c^2 + 5000c + 625 - (100c + 25)\\ &= 10000c^2 + 4900c + 600\\ &= 10000c^2 + 4000c + 100(9c + 6),\end{aligned}$$

дељиво са 1000, односно $9c + 6$ дељиво са 10. Провера показује да је једина могућност $c = 6$, па се добија јединствено решење 625.

У другом случају, аналоган рачун показује да

$$
\begin{aligned}
(100c+76)^2-(100c+76) &= 10000c^2+15200c+5776-(100c+76)\\
&= 10000c^2+15100c+5700\\
&= 10000c^2+15000c+5000+100(c+7),
\end{aligned}
$$

треба да буде дељиво са 1000, тј. треба да $c+7$ буде дељиво са 10. Јасно је да мора бити $c = 3$ и тражени број је 376.

Сада је вероватно јасно како се овакав поступак може продужити. Препуштамо читаоцима да, пажљивим рачуном, покажи да су једини четвороцифрени бројеви $\overline{dcba}$ који имају особину да им се квадрати завршавају истом том комбинацијом цифара, бројеви

0625 и 9376.

(условно ћемо број 0625 звати четвороцифрени, с обзиром на оно што следи).
Даљи рачун постаје све гломазнији, али вероваћете нам да се на овај начин добијају следећа два низа бројева:

5, 25, 625, 0625, 90625, 890625, 2890625, ...

и

6, 76, 376, 9376, 09376, 109376, 7109376, ...

који сви имају особину да им се квадрати завршавају истом комбинацијом цифара (и то су једини такви бројеви, ако се изузму 0 и 1). Притом се оба ова низа могу неограничено продужити.

А сада замислимо да смо формирали „бројеве" са бесконачно много цифара, тако да смо наставили неограничено да дописујемо с леве стране све нове и нове цифре добијене на претходно описани начин.

...2890625 и ...7109376.

Покушајмо да одредимо квадрате ових „бројева". С обзиром да се операције сабирања и множења (па, дакле, и квадрирања) природних бројева изводе са цифрама посматраним „здесна на лево", то можемо редом да одређујемо све цифре тих квадрата. Као резултат ћемо добијати исти низ цифара (посматран здесна на лево). Другим речима, квадрати наведених „бројева" са бесконачно много цифара биће они сами.

Дакле, добили смо још два „решења" једначине $x^2 = x$!

За оне ученике који знају да постоји и записивање природних бројева у основама различитим од 10, поменимо на крају да се слична разматрања могу спровести за такве основе. За неке од њих могу се такође наћи оваква бесконачноцифрена „решења" дате једначине. Али, то би већ могла бити тема неког другог чланка.

## Задаци

1. Покажи да се производ два броја која се завршавају са 625 такође завршава са 625. Слично за 376.

2. Покажи да следећи бројеви који имају двоцифрени запис у систему с основом 6: $(13)_6$ и $(44)_6$, имају особину да им се квадрати завршавају истом двоцифреном комбинацијом цифара.

**Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија**