JMMO 2020

1. Нека S е множеството природни броеви n такви што секој од броевите $n+1, n+3, n+4, n+5, n+6$ и $n+8$ е сложен. Определи го најголемиот број k со својство: За секој $n \in S$ во множеството
$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9\}$$
постојат барем k последователни сложени броеви
Решение. Ќе докажеме дека $k=7$.
Ако $n=87$ тогаш
$$\{n+1, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8\} = \{88, 90, 91, 92, 93, 95\}$$
се сите сложени броеви, па значи $S \neq \varnothing$. Во множеството
$$\{n, n+1, n+2, ..., n+9\} = \{88, 89, 90, ..., 96\}$$
најдолгата низа последователни сложени броеви има должина 7. Значи, $k \leq 7$.
i) Нека $n \in S$ и $n+2$ е прост број. Тогаш тој е непарен, па затоа $n+7$ и $n+9$ се парни броеви поголеми од 2, што значи дека се сложени броеви. Според тоа, $n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8$ и $n+9$ се седум последователни сложени броеви.
ii) Ако $n \in S$ и $n+7$ е прост број. Тогаш $n+7$ е непарен број, па затоа n и $n+2$ се парни броеви поголеми од 2, што значи дека се сложени ($2 \notin S$ бидејќи $n+1=3$ е прост број). Со тоа докажавме дека $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ и $n+6$ се седум последователни сложени броеви.
iii) Ако $n \in S$ и $n+2$ и $n+7$ се сложени броеви, тогаш тврдењето е очигледно (во случајов има барем 9 сложени броеви).

2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy+yz+zx=27$. Докажи го неравенството
$$x+y+z \geq \sqrt{3xyz}\ .$$
Решение. *Прв начин*. Со користење на условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за xy, yz, zx се добива
$$27^3 = (xy+yz+zx)^3 \geq 27 \cdot xy \cdot yz \cdot zx = 27(xyz)^2\ ,$$
од каде следува
$$xyz \geq 27\ . \qquad (1)$$
Понатаму, со квадрирање, користење на почетниот услов, групирање на

членовите, користење на неравенството (1), користење на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, како и неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &= x^2+y^2+z^2+2\cdot 27\\ &= (x^2+9)+(y^2+9)+(z^2+9)+27\\ &\geq 2\sqrt{9x^2}+2\sqrt{9y^2}+2\sqrt{9z^2}+xyz\\ &= 18\cdot\tfrac{x+y+z}{3}+xyz\\ &\geq 18\cdot\tfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+xyz\\ &= 18\cdot\tfrac{3xyz}{xy+yz+zx}+xyz\\ &= \tfrac{54xyz}{27}+xyz = 3xyz,\end{aligned}$$

од каде следува неравенството

$$x+y+z\geq\sqrt{3xyz}\ .$$

Знак за равенство важи ако и само ао $xy=yz=zx$, $x^2=y^2=z^2=9$, од каде следува $x=y=z=3$.

Втор начин. Од

$$(x+y+z)^3\geq 27xyz \text{ и } (xy+yz+zx)^3\geq 27xy\cdot yz\cdot zx=27(xyz)^2$$

добиваме

$$\begin{aligned}27^3(x+y+z)^{12} &= (xy+yz+zx)^3((x+y+z)^3)^4\\ &\geq 27(xyz)^2(27xyz)^4=27^5(xyz)^6,\end{aligned}$$

од каде

$$(x+y+z)^{12}\geq 27^2(xyz)^6=(3xyz)^6\ .$$

Сега, од последното неравенство заради $x,y,z>0$ следува

$$x+y+z\geq\sqrt{3xyz}\ ,$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=3$.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^5+2=3\cdot 101^y\ .$$

Решение. Нека (x,y) е решение на равенката. Ако $y<0$, тогаш постои природен број $k>0$ таков што $y=-k$, па равенката гласи

$$x^5+2=3\cdot 101^{-k}.$$

Ако двете страни ги помножиме со 100^k, добиваме

$$101^k(x^5+2)=3.$$

Но, 101^k и x^2+3 се цели броеви, па како $k>0$ од последното равенство следува $101|3$, што е противречност. Според тоа, y е ненегативен цел број.

Ќе докажеме дека $y=0$. Нека $y\geq 1$. Тогаш

$$x^5+2=3\cdot 101^y\equiv 0(\text{mod}101),$$

т.е. $x^5\equiv -2(\text{mod}101)$, од каде добиваме

$$x^{100}\equiv (x^5)^{20}\equiv (-2)^{20}(\text{mod}101).$$

Од почетната равенка е јасно дека x не е делив со 101, па од Малата теорема на Ферма применета за простиот број 101 следува дека

$$x^{100}\equiv 1(\text{mod}101).$$

Сега, од $(-2)^{20}=(2^{10})^2=1024^2\equiv 14^2(\text{mod}101)$ и горните конгруенции следува

$$1\equiv x^{100}\equiv 14^2\equiv 95(\text{mod}101),$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека останува да го разгледаме само случајот $y=0$. Тогаш равенката го добива видот $x^5+2=3$, од каде следува $x^5=1$, т.е. $x=1$.

Конечно, парот $(x,y)=(1,0)$ е единствено решение на дадената равенка.

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AC. На страните AC и BC соодветно се избрани точки D и E такви што $\overline{CD}=\overline{DE}$. Нека H,J и K се средини на DE,AE и BD, соодветно. Опишната кружница околу триаголникот DHK ја сече AD во точка F, а опишаната кружница околу триаголникот HEJ ја сече BE во точка G. Правата низ K паралелна со AC ја сече AB во точка I. Нека $IH\cap GF=M$. Докажи дека точките J,M и K се колинеарни.

Решение. Прво ќе докажеме дека четириаголникот $ABED$ е тетивен. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{BC}$, важи $\measuredangle ABC=180^\circ-2\measuredangle ACB$. Од условот на задачата имаме и дека $\overline{CD}=\overline{DE}$, па важи

$$\measuredangle CDE = 180^\circ - 2\measuredangle DCE = 180^\circ - 2\measuredangle ACB = \measuredangle ABC .$$

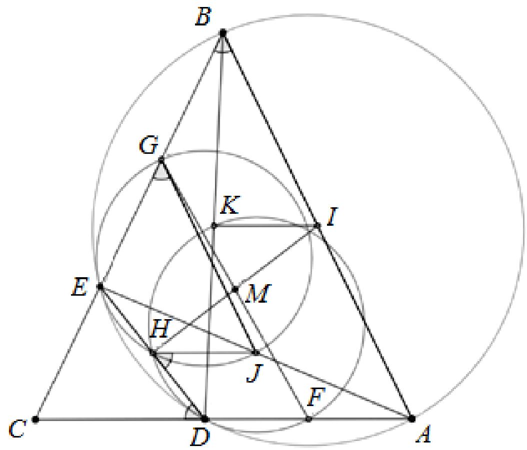
Според тоа, точките A, B, D, E лежат на една кружниа.

Бидејќи K е средина на BD, правата низ K паралелна со AC е средна линија на триаголникот ABD, па затоа I е средина на AB.

Ќе докажеме дека G е средина на BE, а F е средина на AD.

Четириаголникот $JGEH$ е тетивен, па имаме

$$\measuredangle JGE = 180^\circ - \measuredangle JHE = \measuredangle JHD.$$



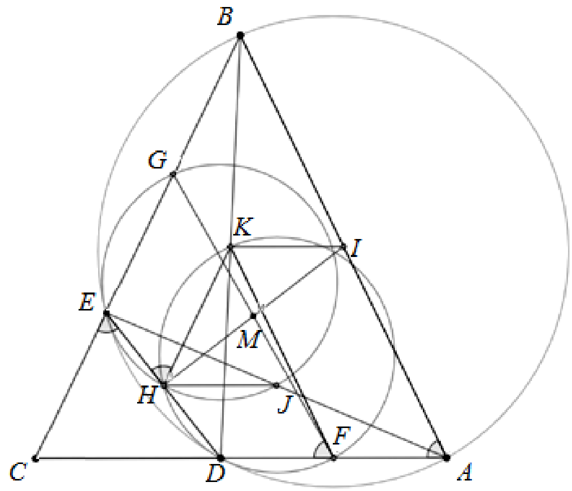
Бидејќи H и J се средини на DE и AE, следува дека HJ е средна линија на триаголникот AED и затоа HJ е паралелна со AD. Од еднаквоста на аглите со паралелни краци добиваме

$$\measuredangle JHD = \measuredangle CDH = \measuredangle CDE = \measuredangle ABC .$$

Оттука следува дека JG е паралелна со AB. Бидејќи J е средина на AE и JG е средна линија на ABE, следува дека G е средина на BE.

Аналогно од

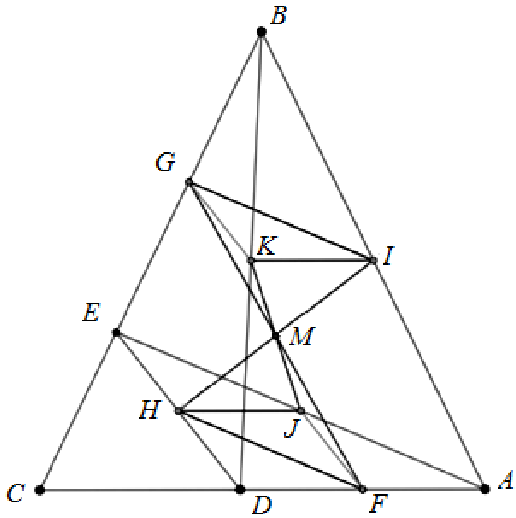
$$\measuredangle KFD = \measuredangle KHE = \measuredangle CEH = \measuredangle CAB$$



следува дека KF е паралелна со AB. Бидејќи K е средина на BD и KF е средна линија на ABD, добиваме дека F е средина на AD.

Понатаму, HJ е средна линија на AED, па затоа HJ е паралелна со AC и $\overline{HJ} = \frac{\overline{AD}}{2}$, додека KI е средна линија на ABD, па затоа KI е паралелна со AC и $\overline{KI} = \frac{\overline{AD}}{2} = \overline{HJ}$. Според тоа, четириаголникот $HJIK$ е паралелограм и неговите

дијагонали се половат.
Исто така, GK е средна лнија на триаголникот DEB, а JF е средна линија на AED, па на сличен начин заклучуваме дека четириаголникот $JFKG$ е паралелограм. Тоа значи дека KJ и GF се половат, па оттука слеува дека M е заедничка средина на KJ, IH и GF, што значи дека точките J, M и K се колинеарни.



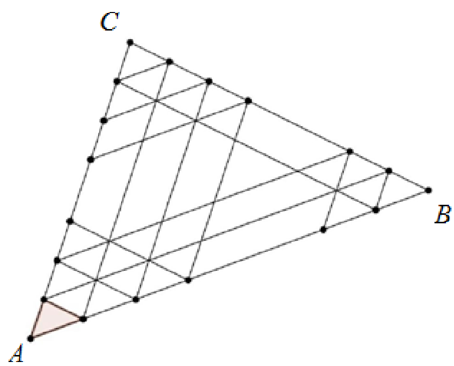
5. Нека T е триаголник со темиња во точки со целобројни координати таков што секоја страна на T содржи точно m точки со целобројни координати. Ако плоштината на T е помала од 2020 определи ја најголемата можна вредност на m.

Решение. Да забележиме дека ако точките со целобројни координати (a,b) и (c,d) лежат на една права, тогаш и точките

$$(a+k(c-a), b+k(d-b)),\ k\in\mathbb{Z}$$

лежат на истата права и растојанието меѓу две соседни точки од нив е еднакво. Бараниот триаголник (со максимална вредност на m) да го означиме со ABC.

Од условот на задачата и од горната дискусија следува дека растојанијата меѓу соседните точки од страните на триаголникот ABC мора да се еднакви. Во спротивно од сите растојанија меѓу соседните точки со целобројни координати на една од страните го избираме минималното и заради горната дискусија добиваме дека бројот на точки со целобројни координати е поголем од m.



Во секоја од точките со целобројни координати повлекуваме прави паралелни со страните на триаголникот ABC. Заради сличноста, секоја од правите повлечена во точките од страна на ABC мора да минува низ некоја од целобројните точки на другите две страни. Како резултат на ова добиваме мрежа формирана од складни триаголници. Нека плоштината на еден од овие триаголници е P. Тогаш

$$P_{ABC} = (1+3+...(2m-3))P$$

и имаме

$$(m-1)^2 P < 2020. \qquad (1)$$

Според тоа, задачата се сведува на наоѓање на триаголник со целобројни координати со минимана плоштина.

Лема. Плоштината на триаголник со темиња во точки со целобројни координати е поголема или еднаква на $\frac{1}{2}$.

Доказ. Лемата е непосредна последица од теоремата на Пик, која гласи: Нека е даден многуаголник чии темиња имаат целобројни координати. Ако i е бројот на точки со целобројни координати кои се наоѓаат во внатрешноста на многуаголникот, а b е бројот точки со целобројни координати кои се темиња на многуаголникот или лежат на неговите страни, тогаш неговата плоштина е $P = i + \frac{b}{2} - 1$. Според тоа, $P = \frac{k}{2}$ за некој $k \in \mathbb{N}$. ■

Од неравенството (2) добиваме дека

$$(m-1)^2 < 4040 \text{ или } m \leq 64.$$

Вредноста $m = 64$ се достгнува само кога $P = \frac{1}{2}$. Еден таков триаголник со плоштина $P = \frac{1}{2}$ е триаголникот со темиња во точките (0,0), (1,0) и (0,1). Заради мрежата дадена на почетокот, еден од можните триаголници ABC ќе има темиња во точките со координати (0,0), (63,0) и (0,63).