XIV олимпијада

1. Докажи дека од секое множество од било кои десет различни двоцифрени природни броеви може да се одделат две дисјунктни подмножества такви што збировите на броевите во овие подмножества се еднакви.

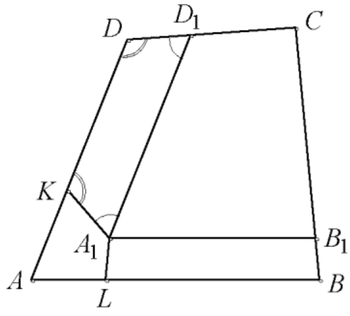
Решение. Да забележиме дека доволно е да докажеме дека постојат две различни подмножества кои имаат еднаков збир на елементите. Во тој случај се исфрлат заедничките елементи.

Разгледуваме на почеток колку различни подмножества има множество со 10 елементи. Секој број може но не мора да биде во бараното множество. Празното множество мораме да го исфрлиме, па затоа бројот на сите множества е $2^{10}-1=1023$. Секој број во групата може да има најголема вредност 99 па најголемиот збир не може да биде поголем од $99\cdot 10=990$, т.е. најмногу може да има 990 различни збирови. Според принципот на Дирихле меѓу 1023 подмножества мора да има две кои имаат еднаков збир.

2. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$. Докажи дека секој тетивен четириаголник може да се подели на n тетивни четириаголници.

Решение. Нека A е најмалиот агол на четириаголникот, а останатите темиња се B, C и D. Низ точката A, во внатрешноста на аголот $\measuredangle DAB$ повлекуваме полуправа. На таа полуправа постои точка A_1 таква што правите низ точката A_1 паралелни со страните AB и AD ги сечат страните BC и CD соодветно. Да ги означиме пресечните точки со B_1 и D_1. Четириаголникот $A_1B_1CD_1$ е тетивен, бидејќи има агли еднакви со соодветните агли на четириаголникот $ABCD$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle DAB$ е најмалиот агол на четириаголникот $ABCD$ тогаш $\measuredangle DAA_1<\measuredangle D_1DA$. На страната AD постои точка K, таква што $\measuredangle DKA_1=\measuredangle D_1DK$. Слично, на страната AB постои точка L, таква што $\measuredangle A_1LB=\measuredangle LBB_1$. Четириаголникот ALA_1K е тетивен, бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle ALA_1+\measuredangle A_1KA&=(\pi-\measuredangle ABC)+(\pi-\measuredangle CDA)\\&=2\pi-(\measuredangle ABC+\measuredangle CDA)=\pi.\end{aligned}$$



Четириаголникот A_1D_1DK е исто така тетивен, затоа што е рамнокрак трапез (како и LBB_1A_1).

Со тоа дадеиот четириаголник е разделен на четири тетивни четириаголници. За да тој биде разделен на $n\geq 4$ тетивни четириаголници, доволно е некој од рамнокраките трапези PBB_1A_1 или A_1D_1DQ да се поделат на $n-3$ рамнокраки трапези. Тоа може да се постиогне ако се повлечат $n-4$ прави паралелни со основите на трапезот.

3. Докажи дека

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}, \text{ за секои } m,n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Ќе докажеме дека максималниот степен на простиот број p со кој е делив броителот на дадената дропка, не е помал од максималниот степен на бројот p со кој е делив именителот на дадената дропка. Тогаш задачата ќе биде решена.

Лема 1. Степенот на простиот број p во каноничната репрезентација на бројот $n!$, е еднаков на

$$[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+[\tfrac{n}{p^3}]+\dots,$$

Доказ. Доволно е да се разгледа колку броеви има кои се деливи со p, $p^2, p^3,\dots$. ■

Лема 2. Нека $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогаш е исполнето неравенството

$$[2a]+[2b] \geq [a]+[b]+[a+b]$$

Доказ. Нека $a=[a]+\alpha$ и $b=[b]+\beta$, каде што $0 \leq \alpha < 1$ и $0 \leq \beta < 1$.

Ако $\alpha+\beta<1$, тогаш

$$[a+b]=[a]+[b]$$

и затоа

$$[2a]+[2b] \geq 2[a]+2[b]=[a]+[b]+[a+b]$$

Ако $\alpha+\beta \geq 1$, тогаш или $2\alpha \geq 1$ или $2\beta \geq 1$. Нека $2\alpha \geq 1$ (другиот случај се разгледува аналогно). Тогаш

$$[a+b]=[a]+[b]+1 \text{ и } [2a]=2[a]+1,$$

па според тоа

$$[2a]+[2b] \geq 2[a]+1+2[b]=[a]+[b]+[a+b]. \ ■$$

Нека p е прост број. Од лема 1, следува дека степенот на бројот p во броителот на дропката е

$$s=[\tfrac{2n}{p}]+[\tfrac{2n}{p^2}]+[\tfrac{2n}{p^3}]+\dots+[\tfrac{2m}{p}]+[\tfrac{2m}{p^2}]+[\tfrac{2m}{p^3}]+\dots,$$

а степенот на бројот p во именителот е

$$t=[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+[\tfrac{n}{p^3}]+\dots+[\tfrac{m}{p}]+[\tfrac{m}{p^2}]+[\tfrac{m}{p^3}]+\dots+[\tfrac{m+n}{p}]+[\tfrac{m+n}{p^2}]+[\tfrac{m+n}{p^3}]+\dots.$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 2, за $a=\frac{n}{p^k}$, $b=\frac{m}{p^k}$, $k=1,2,3,\dots$.

4. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот неравенки:

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0$$

Решение. Очигледно $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$, $a \in \mathbb{R}^+$ е решение на системот. Ќе докажеме дека тоа е единствено решение.

Нека претпоставиме дека постои друго решение на системот, во кое не се сите броеви x_i, $i = 1,2,3,4,5$ еднакви меѓу себе.

Бидејќи дадениот систем не се менува со циклична замена на променливите, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \ge x_i$, $i = 1,2,3,4,5$. Тогаш $x_1^2 - x_3x_5 \ge 0$ и $x_1^2 - x_2x_4 \ge 0$. Од првата и петтата неравенка добиваме $x_2^2 - x_3x_5 \le 0$ и $x_5^2 - x_2x_4 \le 0$.

Ако сите броеви x_2, x_3, x_4, x_5 се меѓу себе еднакви, тогаш од четвртата неравенка добиваме $(x_3 - x_1)^2 \le 0$, т.е. сите броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 се еднакви меѓу себе, што противречи на претпоставката. Значи, сите броеви x_2, x_3, x_4, x_5 не се еднакви меѓу себе. Исто така, меѓу x_2, x_3, x_4, x_5 броевите x_2 и x_5 не можат да бидат најголеми, па затоа најголем е x_3 или x_4. Да претпоставиме дека x_3 е најголем меѓу x_2, x_3, x_4, x_5. Значи $x_1 \ge x_3 \ge x_i$, $i = 2,4,5$. Тогаш $x_1x_3 \ge x_4^2$ и $x_1x_3 \ge x_5^2$ и од четвртото неравенство следува

$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) = 0 .$$

Значи, $x_4^2 = x_1x_3$ и $x_5^2 = x_1x_3$, т.е. $x_1 = x_3 = x_4$ или $x_1 = x_3 = x_5$. Во првиот случај, ако барем еден од броевите x_2 и x_5 е строго помал од $x_1 = x_3 = x_4$ добиваме противречност со третата неравенка. Во вториот случај x_5 е најголем меѓу x_2, x_3, x_4, x_5, а тоа е можно само ако тие четири броеви се еднакви. Но, $x_1 = x_3$, па затоа сите броеви се еднакви меѓу себе, што повторно е противречност.

Аналогно се разгледува случајот кога x_4 е најголем меѓу x_2, x_3, x_4, x_5.

Во двата случаи добиваме противречност, што значи дека единствено решение е $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$, $a \in \mathbb{R}^+$.

5. Нека $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и нека за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y) .$$

Докажи дека ако функцијата f не е идентична на нула и ако $|f(x)|\leq 1$, за секој $x\in\mathbb{R}$, тогаш $|g(y)|\leq 1$ за секој $y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $M=\sup|f(x)|$, (т.е. нека M е најмалиот од сите броеви k за кои $|f(x)|\leq k$ за секое x). Бројот M постои бидејќи $|f(x)|\leq 1$ и $M\neq 0$, бидејќи функцијата f не е идентично еднаква на нула. Тогаш е исполнето

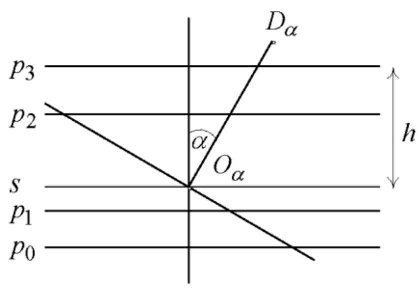
$$|2f(x)g(y)|=|f(x-y)+f(x+y)|\leq|f(x-y)|+|f(x+y)|\leq 2M$$

т.е. $|f(x)|\cdot|g(y)|\leq M$ за секои x и y. Нека за некој y_0, $|g(y_0)|>1$. Тогаш за секој x, $|f(x)|\leq\frac{M}{|g(y_0)|}<M$, па според тоа M не е супремум од $|f(x)|$, што противречи на претпоставката.

6. Дадени се четири различни паралелни рамнини. Докажи дека постои правилен тетраедар кој има по едно теме во секоја од дадените рамнини.

Решение. *Лема.* Нека во рамнина се дадени три паралелни прави. Тогаш постои единствен рамностран триаголник, таков што на секоја од правите се наоѓа по едно негово теме. Притоа должината на страната на рамностраниот триаголник зависи само од растојанието меѓу правите.

Доказ. Доволно е на една од правите да земеме произволна точка и една од другите две прави да ја ротираме за агол $\alpha=60^\circ$. Во пресекот со третата права го наоѓаме второто теме на рамностраниот триаголник. Сега лесно се конструира третото теме и се докажува тврдењето за должината на страната. ■



Нека π_0,π_1,π_2 и π_3 се дадени паралелни рамнини, при што претпоставуваме дека π_1,π_2 и π_3 се од иста страна на рамнината π_0, а нивните растојанија до π_0 ги означуваме со d_1,d_2 и d_3; ($0<d_1<d_2<d_3$). Земаме произволна рамнина ρ_α, таква што аголот меѓу нејзината нормала и нормалата на рамнината π_0 е α. Нејзините пресеци со рамнините π_0,π_1 и π_2 се паралелните прави $l_0^\alpha,l_1^\alpha,l_2^\alpha$. Ја применуваме лемата. Да забележиме дека растојанието од l_0^α до l_1^α и l_2^α е $\frac{d_1}{\sin\alpha}$ и $\frac{d_2}{\sin\alpha}$, соодветно. Нека $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ е рамностран триаголник чии темиња лежат на l_0^α,l_1^α и l_2^α, а должината на неговата страна е a_α. Со хомотетија во рамнината ρ_α, со центар во точката A_α и коефициент $k=\sin\alpha$ триаголникот $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ се пресликува во рамностран триаголник со должина на страната $a_\alpha\sin\alpha$ и со темиња на паралелни прави, од кои две се на растојание

d_1 и d_2 од третата права. Должината на страните на добиениот триаголник е еднозначно определена со големините d_1 и d_2 и таа е константна ако е фиксирана положбата на разгледуваните рамнини. Таа должина ќе ја означиме со a. Значи, $a = a_\alpha \sin\alpha$ или $a_\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Ќе го пресметаме растојанието на тежиштето O_α на триаголникот $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ до рамнината π_0. Нека E_α е средина на страната $B_\alpha C_\alpha$. Ја разгледуваме рамнината која ја содржи правата $B_\alpha C_\alpha$ и е нормална на рамнината π_0. Растојанието меѓу точката E_α и рамнината π_0 е $\frac{d_1+d_2}{2}$. Ако низ правата $A_\alpha E_\alpha$ поставиме рамнина која е нормална на π_0, и земеме во предвид дека $\overline{A_\alpha O_\alpha} = \frac{2}{3}\overline{A_\alpha E_\alpha}$, добиваме дека растојанието од O_α до π_0 е $\frac{2}{3}\frac{d_1+d_2}{2} = \frac{d_1+d_2}{3}$, т.е. тоа не зависи од α. Тоа значи, дека тежиштата на сите можни рамнострани триаголници со темиња во рамнините π_0, π_1 и π_2 лежат во една рамнина σ која е на константно растојание од π_0, што значи и од π_3. Нека растојанието од σ до π_3 е h.

Конструираме правилен тетраедар $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, чија основа е конструираниот триаголник $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$, при што од двете можности за D_α ја бираме онаа за која D_α е подалеку од π_0. Должината на висината $D_\alpha O_\alpha$ на конструираниот тетраедар е $a_\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$. Разгледуваме рамнина низ правата $D_\alpha O_\alpha$ која е нормална на π_0. Тогаш (види цртеж) p_0, p_1, p_2, p_3 и s се пресеците на таа рамнина со рамнините $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ и σ, од каде D_α е од оддалечена од σ за $a_\alpha \cos\alpha\sqrt{\frac{2}{3}} = a\mathrm{ctg}\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$. За да точката D_α припаѓа на рамнината π_3 потребно и доволно е најденото растојание да е еднакво на h, т.е. $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Бидејќи таков агол α постои, доказот на тврдењето е завршен.