МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 36

Самоил Малчески

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД VI – IX ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2023

Рецензент:
Д-р Даниел Велинов
Градежен факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 211 алгебарски задачи, повеќето од кои се задавани на математички натпревари во основното образование и тоа на белоруските, босанско-херцеговачките, италијанските, македонските, московските, новозеландските, српските, хрватските, холандските, украинските и швајцарските натпревари, а дел од задачите се обработувани со учениците од некои земји за учество на меѓународните матемтички натпревари.

Задачите се поделени во осум глави и тоа:

1. Цели броеви
2. Рационални броеви
3. Дробнорационални изрази
4. Ирационални изрази
5. Линеарна равенка и линеарна функција
6. Нелинеарни равенки
7. Неравенки
8. Неравенства

Повеќето од задачите се детално решени, а само мал број задачи се кратки решенија, кои се доволни за да се следи идејата на решението. Затоа, на читателот му препорачувам сите решенија детално да ги испише. Освен тоа, сакам да напоменам дека и покрај вложениот напор задачите не се идеално подредени според тежината на истите, бидејќи за ваков вид задачи тоа практично и не е можно целосно да се направи.

Сметам дека читателот треба прво самостојно да се обиде да ја реши секоја задача, а потоа да провери дали неговото решение се совпаѓа со понуденото решение, или пак ако не успеал сам да ја реши задачата, да го проучи понуденото решение. Имено, дел од подготовките за натпреварите треба да се одвива токму на самостојно откривање на решенијата на задачите кои претходно биле задавани на различни натпревари, почнувајќи од регионално ниво, па се до Јуниорската балканска математичка олимпијада, која покрај Европскиот математички куп (јуниори), Турнирот на градови

(основна и напредна варијанта за 8 и 9 одделение) и Иранската геометриска олимпијада (елементарно ниво), моментално се показател за нивото кое треба да го достигнат учениците на возраст до 15,5 години.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Даниел Велинов чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа мала збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како за националните, така и за меѓународните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

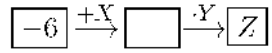
Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторот
август, 2023 г.

1. ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот
   а) $a-(b-c)$, б) $a-b+c$,
   каде $a=-5+1$, $b=-6-1$ и $c=|-7|$.

2. Во дијаграмот прикажан на цртежот десно X и Y се различни броеви од множеството $\{-3,-2,5,7\}$. Која е најголемата можна вредност за Z?



3. Пресметај ја вредноста на изразот:
   $$2^3\cdot(-2022:(2+0+2+2)-2023:(-2-0-2-3)):(-3).$$

4. Определи ја најмалата и најголемата можна вредност на збирот $\overline{TWO}$ во ребусот $\overline{ONE}+\overline{ONE}=\overline{TWO}$, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

5. Реши го бројниот ребус
   $$\overline{SLOVEN}+\overline{LOVEN}+\overline{OVEN}+\overline{VEN}+\overline{EN}+\overline{N}=\overline{OS9L7N},$$
   во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, на исти букви соодветствуваат исти цифри и цифрите 7 и 9 не соодвествуваат на ниту една буква.

6. Докажи дека секој непарен цел број може да се претстави како разлика на два цели броја.

7. Целите броеви x и y се такви, што бројот x^2+2y е точен квадрат. Докажи дека бројот x^2+y е еднаков на збир на два точни квадрати.

8. Определи природен број n, за кој $2^{182}+4^n+8^{700}$ е точен квадрат.

9. Докажи дека бројот $(n+2)^4-n^4$ не е точен куб за ниту еден природен

број n.

10. Пресметај го збирот на цифрите на збирот
$$n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9999...999}_{199 \text{ цифри } 9}.$$

11. Определи го збирот на цифрите на бројот:
$$A = 10 - 10^2 + 10^3 - 10^4 + 10^5 - ... - 10^{2022} + 10^{2023}.$$

12. Бројот $A = 111...111$ има 2023 цифри, секоја еднаква на 1. Определи го збирот на цифрите на бројот $2007A$.

13. Докажи дека бројот $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n}6$ е точен квадрат на природен број.

14. Пресметај го збирот
$$2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2022}.$$

15. Дадени се природните броеви $x_1, x_2, ..., x_{2018}$, кои се соодветно пропорционални со 1, 2, 3, ..., 2018. Ако $\frac{x_1 x_2 ... x_{2018}}{3^{2018}} = 2018!$, определи го збирот на дадените броеви.

16. Првиот број на низата е 7. Секој следен член на низата се добива така што претходниот се квадрира, се соберат цифрите на квадратот и се додаде 1. Така, следните два члена на низата се 14 и 17 ($7^2 = 49$, $4 + 9 + 1 = 14$; $14^2 = 196$, $1 + 9 + 6 + 1 = 17$). Определи го 1999-тиот член на низата.

17. Определи ги најмалата и најголемата вредност на изразот
$$u = 3x - y + 4z + 15$$
ако важи равенството
$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 14y - 12z + 148 = 0,$$
каде x, y, z се цели броеви.

18. Определи ги сите природни броеви n така што секоја од цифрите 0,

1, 2, ..., 9, се појавува точно еднаш во записите на броевите n^3 или n^4, но не и во двата броја истовремено.

Пример. Ако треба да се искористат само цифрите 1, 2, 7 и 8, тогаш решение е бројот 3. Секоја од цифрите 1, 2, 7 и 8 се појавува точно еднаш во $3^3 = 27$ или во $3^4 = 81$, но не и во двата броја истовремено.

19. Дадена е табела 10×10. Во секое поле од првата колона е запишан бројот 1, во секое поле од втората колона е запишан бројот 2, итн. во секое поле од десеттата колона е запишан бројот 10. Потоа се избришани броевите на дијагоналата која го поврзува горното лево поле со долното десно поле. Определи колку пати збирот на броевите над избришаната дијагонала е поголем од збирот на броевите под избришаната дијагонала.

20. Во бројот $N = \underbrace{444...4}_{n+1}\underbrace{888...8}_{n}a$ определи ја цифрата a така што за секој природен број n бројот N ќе биде точен квадрат на природен број.

2. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Дропките $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{3}$ се претставени на бројната оска соодветно со точките A и B. Која од овие точки е поблиску до точката M која е слика на бројот 1?

2. а) Пресметај $a=\frac{|-3\cdot 5^2|-|1-3^3|}{-2\cdot(-4)-3^2}$ и $b=\frac{(-6)^4\cdot 2^3}{5^2}:\frac{(-3)^4\cdot 2^6}{(-5)^3}$.

   б) Претстави ги броевите $\frac{1}{7}a$ и $2b$ на бројната оска и определи го растојанието меѓу нив.

3. Пресметај ја вредноста на изразот
$$-(b-a)-(a+(-b))+4ab,$$
ако $a=-2,5$ и $b=5,5$.

4. Нека
$$S=\frac{1}{2},\ E=\frac{\frac{3}{7}+1}{\frac{3}{7}-1},\ D=-2:\frac{5}{3}+1,1,\ A=3-0,2\cdot 2,\ M=100\cdot 0,03-5,25:\frac{1}{2}.$$
Пресметај ја вредноста на изразот: $S+E:D-A\cdot M$.

5. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\frac{0,3\cdot 1,4+0,6\cdot 2}{2,25\cdot(10-5:2,5)}.$$
Решение. Имаме
$$\frac{0,3\cdot 1,4+0,6\cdot 2}{2,25\cdot(10-5:2,5)}=\frac{0,42+1,2}{2,25\cdot(10-2)}=\frac{1,62}{2,25\cdot 8}=\frac{1,62}{18}=0,09.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$b=||-0,7|+(-3,7)+\frac{|-2,1-0,9|}{4}|+\frac{1-\frac{3}{4}\cdot|\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}|}{|-5|}.$$

7. Ако $a=\frac{2^{12}+2^{13}}{4^7-4^6}$ и $5\cdot 25^b=125^7$, колку е $a+b$?

8. Која цифра е на стотото место по децималната запирка во децималниот запис на дропката $\frac{28937513}{9999990}$?

9. Определи ја 2023-тата цифра по децималната запирка во дицималното претставување на дропката $\frac{35}{37}$.

10. Определи ја 914-тата децимала во децималниот запис на дропката $\frac{9}{14}$.

11. Пресметај го збирот на првите 450 децимали во децималниот запис на дропката $\frac{11}{7}$.

12. Во шесте квадратчиња запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 така што ќе биде точно равенството

$$\frac{\square}{\square}\ \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square}.$$

13. Определи ги сите дропки од видот $\frac{a}{b}\,(a,b\in\mathbb{N})$, ако $a<b$ и производот на именителот и броителот на таа дропка е еднаков на 30.

14. Определи го природниот број n, за кој збирот $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n}$ е природен број.

15. Вредноста на изразот $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})$ е еднаква на 2023. Колку множители има во овој производ.

16. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1-\frac{100}{101}+\frac{99}{101}-\frac{98}{101}+\frac{97}{101}-\ldots-\frac{2}{101}+\frac{1}{101}.$$

17. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

18. Пресметај го збирот

$$A=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}+\frac{1}{182}+\frac{1}{210}.$$

19. Пресметај го збирот
$$A=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

20. Пресметај го збирот
$$A=\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

21. Пресметај го збирот
$$A=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}.$$

22. Пресметај го збирот
$$A=\frac{2}{3}-8\left(\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\frac{1}{7\cdot9\cdot11}\right).$$

23. Пресметај го збирот
$$M=\frac{1}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1}{4\cdot7\cdot10}+\frac{1}{7\cdot10\cdot13}+\ldots+\frac{1}{19\cdot22\cdot25}.$$

24. Пресметај го збирот
$$A=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

25. Спореди ги броевите $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2017}{2018!}$ и 1.

26. Спореди ги броевите $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{2018}{2016!+2017!+2018!}$ и $\frac{1}{2}$.

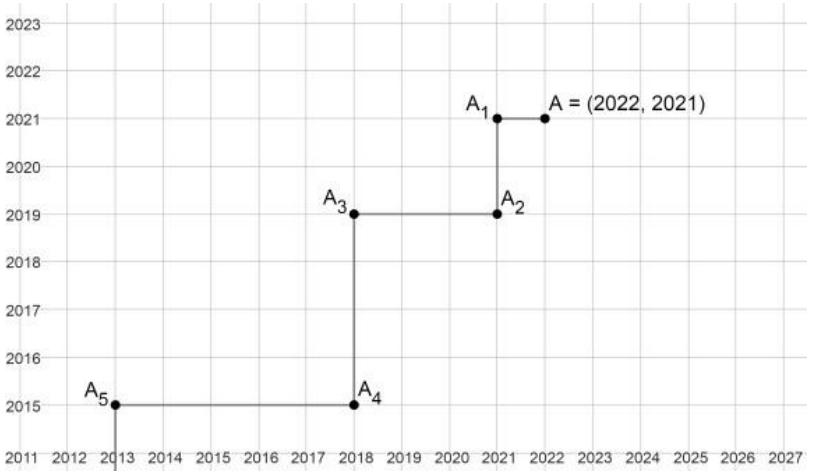
27. Пресметај го збирот
$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot4}+\ldots+\frac{99^2+100^2}{99\cdot100}.$$

28. Дадени се 100 броеви $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{99},a_{100}$. Познато е дека аритметичката средина на броевите a_1 и a_2 е 1, аритметиката средина на броевите a_2 и a_3 е 2, аритметичката средина на броевите a_3 и a_4 е 3, ..., аритметичката средина на броевите a_{99} и a_{100} е 99. Определи ја

аритметичката средина на броевите a_1 и a_{100}.

29. За познат x_n пресмеруваме x_{n+1} според формулата $x_{n+1}=\frac{1+x_n}{1-x_n}$. Ако $x_1=3$, пресмета ј го x_{1111}.

30. Вонземјанинот Грини (слика десно) почнал да се движи во координатната рамнина од точката $A(2022,2021)$, како што е прикажано на долниот цртеж: еден чекор лево, па два долу, па три лево, па четири долу, па пет лево итн. Точките во кои го менува пра-вецот на движење се означени редоследно со $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и во нив кратко се одмара.



Грини се одморил во точката $A_k(86,41)$. Кои се координатите на следната точка A_{k+1} во која Грини се одморил?

3. ДРОБНОРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Даден е изразот $B=\frac{a-9}{4}x+\frac{a+2}{3}x^2-x^3$.

   а) Ако за $x=-2$ вредноста на B е 16, да се определи a.

   б) Определи ја вредноста на B за $x=\frac{12^6\cdot 7^{2010}\cdot 28}{3^6\cdot 2^{18}\cdot 7^{2011}}$.

2. Определи го негативниот број a, за кој кога $b=\frac{17-7:(-5)}{|6{,}8-9{,}1|}$ вредноста на изразот $A=\frac{(ab^2)^4(a^3b)^2}{(a^2b^3)^3}$ е еднаква на 5000.

3. Пресметај ја вредноста на изразот

   $$A=1-n+n^2-n^3+\ldots+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n},$$

   ако $n=1370$.

4. За броевите a и b за секој број x го формираме бројот $ax+b$. Определи го збирот $a+b$, ако е познато дека за секој реален број x на бројот $ax+b$ му е придружен бројот $(a^2-a+2)x+2013$.

5. Нека a,b,c,d се меѓусебно различни природни броеви такви што $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$. Докажи дека $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2}+\frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број.

6. Нека за целите броеви a,b и n важи $b\neq 0$ и $\frac{a}{b}=\frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$. Докажи дека геометриската средина на броевите a и b е цел број.

7. Нека $a\otimes b=(a+1)(b+1)-1$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$. Докажи дека

   $$a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c.$$

8. Пресметај ја бројната вредност на изразот

$$A=\frac{x^{2013}+2x^{2012}}{3x^{2011}-4x^{2010}} \text{ за } x=-4 .$$

9. Упрости го изразот $A=\frac{(a\cdot a^n)^2\cdot(b^3)^{n-1}}{(a^2b^3)^n}$ и пресметај ја неговата вредност за $a=\frac{2^{61}+2^{60}}{2^{61}-2^{60}}$ и $27^b\cdot 3=(81^2)^2$.

10. Даден е полиномот

$$A=((-8+9x)^2+(3x-4)^3):(\tfrac{27}{4}x)-(y+2x)(2x-y),\ x\neq 0 .$$

а) Определи ја вредноста на полиномот A, ако

$$x=|1-3\tfrac{1}{4}|+\frac{6\cdot 3^4}{3^5+3^5},$$

а y е најголемиот цел негативен број.

б) Ако $x=1$, определи ја вредноста на y за која

$$A=(y-2)(y+2)+7y .$$

11. Разложи го на множители полиномот

$$(n-2)(n-1)(2n-3)+6(n-1)^2+6n^2 .$$

12. Разложи го на множители полиномот $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

13. Збирот на четири полиноми P_1,P_2,P_3,P_4 е $x^4-2x^3+4x^2-8x+13$. Полиномот P_1 е со степен 4, полиномот P_2 со степен 3, полиномот P_3 со степен 2 и полиномот P_4 со степен 1. Сите коефициенти на полиномот P_1 се еднакви, сите коефициенти на полиномот P_2 се еднакви и сите коефициенти на поиномот P_3 се еднакви. Определи го полиномот P_4.

14. Упрости го изразот $M=(y+2+\frac{8}{y-2}):\frac{y^2+4}{4-4y+y^2}$.

15. Упрости го изразот: $\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

16. Ако $ac+bd-ad-bc=68$ и $c-d=4$, пресметај $a-b+c-d$.

17. Ако
$$a^3+12a^2+49a+69=0 \text{ и } b^3-9b^2+28b-31=0,$$
пресметај го збирот $a+b$.

18. Пресметај $x+y$ ако $x+y+xy=4$ и $x^2+y^2+6xy=12$.

19. Ако $x+\sqrt{xy}+y=9$ и $x^2+xy+y^2=27$, пресметај ја вредноста на изразот $x-\sqrt{xy}+y$.

20. Нека a и b се реални броеви такви што $a-b=2$. Докажи дека
$$a^3-b^3=8+6ab.$$

21. Ако $x+\frac{1}{x}=a$, пресметај ја вредноста на изразот
$$M=\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{x^4+1}{x^2}+\frac{x^2+1}{x}.$$

22. Докажи дека за $a\neq 1$ важи
$$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}=\frac{a+2}{a-1}.$$

23. Ако $p\neq 2$, докажи дека
$$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-2p^2+8p}{p^2+2p+6}=p.$$

24. Ако x,y,z се различни меѓу себе броеви такви што
$$x^2-y=y^2-z=z^2-x,$$
определи ја вредноста на изразот:
$$(x+y+z+1)(y+z+1)(z+x+1).$$

25. Нека x,y,z се ненултри реални броеви такви што $x+y+z=2025$ и $xy+yz+zx=xyz$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}$.

26. Нека $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=\frac{19}{20}$. Пресметај го збирот $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$.

27. Дадени се реалните броеви $x_1, x_2, ..., x_{2022}$ кои се различни од 0 и -1. Ако

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_{2022}}=2022,$$

пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_2}}+...+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{2022}}}.$$

28. Ако $x, y, z>1$ и

$$\begin{cases} xy^2-y^2+4xy+4x-4y=4004, \\ xz^2-z^2+6xz+9x-6z=1009, \end{cases} \qquad (1)$$

определи ја вредноста на изразот

$$A=xyz+3xy+2xz-yz+6x-3y-2z.$$

29. Ако $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=2023$ за вредности на x, y, z при кои имениителите на трите дропки се различни од нула, да се определи вредноста на изразот:

$$A=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(x+y-z)^2}{x+y}.$$

4. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот $A=(2ab-a^2-b^2):\frac{a-b}{a+b}$, за $a=\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{7}$.

2. Пресметај ја вреднста на изразот: $\frac{(\sqrt{666}+\sqrt{888})^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}-2\sqrt{3}+3$.

4. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

5. Определи ги сите природни броеви a и b така што вредноста на изразот
$$p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
е рационален број.

6. Упрости го изразот:
$$w=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}-\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}.$$

7. Определи ги сите реални броеви x за кои важи:
$$\sqrt{\frac{x-7}{2015}}+\sqrt{\frac{x-6}{2016}}+\sqrt{\frac{x-5}{2017}}=\sqrt{\frac{x-2015}{7}}+\sqrt{\frac{x-2016}{6}}+\sqrt{\frac{x-2017}{5}}.$$

5. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

1. Реши ја равенката

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)-1)-1=2\,.$$

2. Реши ја равенката

$$\frac{(3-22\cdot 0{,}05)\cdot\frac{1}{19}}{9{:}180+x}=0{,}05\,.$$

3. Реши ја равенката

$$((2-x):1{,}5+17{,}4:29):(25\cdot 0{,}16)-0{,}05=0{,}4\,.$$

4. Реши ја равенката

$$6{,}86:x-3\tfrac{1}{2}:(-\tfrac{3}{4})=5\cdot(-\tfrac{2}{3})-\tfrac{1}{3}\cdot 10{,}3$$

5. Реши ја равенката:

$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{x+3}{4}}{1\frac{1}{5}}=\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{19}\,.$$

6. Реши ја равенката

$$\frac{x(x+3)}{2}=x-\frac{(3x-1)(2-x)}{6}\,.$$

7. Реши ја равенката

$$(2x-1)^2-x(10x+1)=x(1-x)(1+x)-(2-x)^3\,.$$

8. Ако $a\oplus b=\frac{a+b}{a-b}$, реши ја равенката

$$(3\oplus x)\oplus 2=0\,.$$

9. Реши ја равенката

$$(1-50a)x=2013+a\,,$$

каде $a=\frac{(-4^2)^3\cdot(-27)^2}{(2\cdot 6^2)^3}$.

10. Ако $x:(-2)=-5+1\cdot(-3)$ и $3-y=1{,}8+1{,}2:(-3)$, определи ја вредноста на изразот $(y-x):y$.

11. Пресметај го производот xy, ако
$$(5-x):(-6)=-1 \text{ и } 5-y:(-6)=-1.$$

12. Определи го производот $x(x-y)$ ако
$$1{,}1(x-3{,}3)=1{,}43 \text{ и } 1{,}1y-3{,}3=1{,}43.$$

13. Реши ја равенката
$$45:x-(-2)\cdot(-6)=-4\cdot 5\tfrac{1}{4}.$$

14. Ако $a=(9{,}8:2+9:0{,}3)\cdot 0{,}1+0{,}01$ и $b=(4{,}9\cdot 9-0{,}9\cdot 46):0{,}5$ реши ја равенката $b:x+1=2a$.

15. По непознатата x реши ја равенката $ac+bx=174$, ако
$$a=12{,}9\cdot 15+18\cdot 12{,}9+17{,}1\cdot 15+18\cdot 17{,}1,$$
$$b=125\cdot 4{,}8+3{,}1\cdot 82+3{,}1\cdot 43-125\cdot 6{,}7,$$
$$c=(0{,}96\cdot 0{,}36):(0{,}48\cdot 7{,}2).$$

16. Пресметај ја вредноста на изразот $A=\frac{|a-x|}{3}-\frac{|-a+2x|}{2}$, каде
$$a=\frac{-5:(-\frac{1}{7})+2{,}1:(-0{,}3)}{5:(-\frac{1}{3})-2:(-0{,}25)},$$
а x е решение на равенката $-3\frac{1}{3}\cdot 1{,}2-x=-3{,}25\cdot 1\frac{3}{13}-6$.

17. Реши ја равенката
$$\frac{3x+2}{x}-\frac{2x+10}{x+4}+\frac{4}{x^2+4x}=1.$$

18. Бројот 5^{2013} запиши го како збир на пет последователни природни

броја.

19. Збирот на педесет природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот број е за 5 поголем од третиот, ... , педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најголемиот и најмалиот собирок во дадениот збир.

20. Пресметај го збирот $x+y$, ако x е решение на равенката

$$\frac{x}{100}=\frac{5}{9}\cdot 17\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9},$$

а

$$y=120\cdot\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{1+2+3+4+5}+(13\frac{1}{2}+\frac{3}{2})\cdot\frac{3}{5}+555.$$

21. Пресметај го збирот на целите негативни броеви кои се поголеми од решението на равенката

$$(-2):(-0,25)-25:(x+3)=13.$$

22. Реши ја равенката

$$2023\cdot\frac{27\frac{2}{2023}-17\frac{1}{2023}}{20:0,01-1\frac{1}{3}x}=\frac{2,023:0,0001+1}{148}.$$

23. За кои вредности на x изразот $(x+1)^2(13-x)$ е за 18 помал од изразот $(x-1)^2(9-x)$.

24. Збирот на три петцифрени броеви од видот $\overline{mat31}, \overline{mat41}$ и $\overline{mat51}$ е еднаков на 202023. Пресметај го збирот $m+a+t$.

25. Реши ја равенката

$$\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{9}=\frac{9x^2-24x^3+6}{27}.$$

26. Реши ја равенката

$$\frac{6x+5}{4x+3}-\frac{7-3x}{3-4x}=\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}.$$

27. Определи го збирот на решенијата на равенката
$$||x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}|=\sqrt{5}.$$

28. Реши ја равенката $|4-|x||=A$, каде $A=\frac{(-2)^{2013}+5\cdot 2^{2012}}{2^{2011}+4^{1005}}$.

29. Реши ја равенката
$$|x+|2x-|3x|||=2021.$$

30. Реши ја равенката
$$|2x+21|-|x-20|=2021.$$

31. Реши ја равенката
$$x|x-1|+|x|(x-1)=0.$$

32. Реши ја равенката
$$2x-|5x+2|+5=0.$$

33. Реши ја равенката
$$|x-1|+|x-2|=1.$$

34. Реши ја равенката
$$(ax-x-5)(ax-x+3)=0,$$
каде a е реален параметар.

35. Определи го реалниот број a така што равенките
$$(2a-\tfrac{2}{3})x=a-\tfrac{x}{3}+4 \text{ и } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-x)=x-\tfrac{x+1}{2}$$
ќе бидат еквивалентни.

36. Реши ги равенките
$$(x+2)^2=(4x-1)^2 \text{ и } |10x+a|=6.$$
За кои вредости на параметарот a тие се еквивалентни.

37. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката
$$||ax-20|-2011|=11$$
има четири решенија, секое од кои е цел број.

38. Реши ја равенката

$$\frac{x+a}{x+1}+\frac{x+2a}{1-x^2}=\frac{2x-a}{2x+2},$$

каде a е параметар.

39. За кои вредности на параметарот a равенката

$$a^4x+a^3(3a+2)-\sqrt{5}=(a^3-4)(a^2+5a+2)-\sqrt{5}+16x$$

има бесконечно многу решенија.

40. Нека a е цел број и нека равенката $|2ax-x-b|=b$ има две решенија x_1 и x_2, кои се цели броеви. Ако збирот на целите броеви од интервалот (x_1,x_2) е 15, докажи дека b е непарен број.

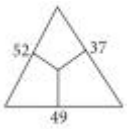
41. Реши ја равенката

$$\frac{x^3-ab}{4}+(2x^2+a)(x+2)-x(\frac{9}{4}x^2-3ax+a^2)=x^2(4+3a),$$

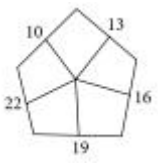
каде a и b се реални параметри.

42. Реши ја равенката $\frac{p+x}{q}-1=\frac{qx}{p}$, каде p и q се параметри.

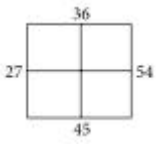
43. Во четириаголничињата на цртежот десно запиши броеви така што бројот придружен на секоја страна на триаголникот ќе биде еднаков на збирот на двата броја од четириаголничињата чии страни се делови од таа страна.



44. Во четириаголничињата на цртежот десно запиши броеви така што бројот придружен на секоја страна на петаголникот ќе биде еднаков на збирот на двата броја од четириаголничињата чии страни се делови од таа страна.



45. Во четириаголничињата на цртежот десно запиши броеви така што бројот придружен на секоја страна на квадратот ќе биде еднаков на збирот на двата броја од четириаголничињата чии страни се делови од таа страна.



46. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x:y:z=3:5:9, \\ x+y+z=34. \end{cases}$$

47. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{2x-3y}{4}-\frac{2y-3x}{2}=1, \\ -2x+y=2. \end{cases}$$

48. Збирот на три природни броја е 100. Ако првиот број го поделиме со вториот се добива количник 1 и остаток еднаков на третиот број. Вториот број е за 10 поголем од третиот број. Колку е производовот на овие броеви?

49. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3x+y+z+u=2a, \\ x+3y+z+u=4b, \\ x+y+3z+u=2b, \\ x+y+z+3u=4a. \end{cases}$$

50. Пресметај го збирот $2x+y$, каде x и y се такви што изразот $4x^2+13y^2-12xy-4y+2$ прима најмала можна вредност.

51. Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c$ ако

$$a^2+2b^2+c^2=2ab+4b+6c-13.$$

52. а) Определи ги x и y за кои важи равенството

$$49x^2+28x+y^2-6y+13=0.$$

б) Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=49x^2+28x+y^2-6y+16.$$

53. Нека a,b,c се ненегативни броеви такви што

$$\begin{cases} a(b+c)=36, \\ b(c+a)=50, \\ c(a+b)=56. \end{cases}$$

Пресметај ја вредноста на производот abc .

54. Определи ги вредностите на параметрите a и b за кои системот

$$\begin{cases} 7x-2ay=5, \\ (4-5a)x-4by=7, \end{cases}$$

има решение $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{9}{5}$.

55. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x+(2-a)y=6, \\ (a+1)x+y=3, \end{cases}$$

каде a е реален параметар. За кои вредности $a\neq 0$ системот има целобројни решенија?

56. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=1, \\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots.+nx_1=2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n+2x_1+3x_2+\ldots+nx_{n-1}=n. \end{cases}$$

57. Определи го реалниот број $m\,(m\neq\frac{1}{2}, m\neq -2)$ така што графикот на линеарната функција

$$(m+2)x+(1-2m)y+2=0$$

на координатните оски отсекува отсечки со еднакви должини.

58. Дадена е функцијата $f(x)=3x-2$.

а) Определи ја функцијата $g(x)$ ако $f(2x-g(x))=-3(1+2m)x+34$.

б) Реши ја равенката $g(x)=(4m-1)x-4(m+1), m\in\mathbb{R}$.

59. Определи ја вредноста на параметарот m за која правите

$$x+(2m+3y+m+6=0 \text{ и } (2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$$

се сечат на $y-$оската.

6. НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1. Определи го производот на решенијата на равенката
$$x^2(2b+3)=2b^3+3b^2,$$
каде b е позитивен параметар.

2. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$|(-x-1)^2-2(x+4)|=18.$$

3. Едното решение на равенката
$$(x+a^2)(x-a+5)=0$$
е $x=4$. Определи го другото решение.

4. Реши ја равенката
$$(n^2+16n+10)^2-14(n^2+16n+10)=6840.$$

5. Докажи, дека во множеството реални броеви равенката
$$x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$$
има само едно решение.

6. Ако $n=\frac{12^7-(-12)^6}{(2^3)^4\cdot 3^5}$, определи го бројот a, за кој важи $4\cdot 2^a=8^n$.

7. Нека a и b се реални броеви такви што $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Определи ги сите можни вредности на изразот
$$A=a^2+2ab+b^2+2a^2b+2ab^2+a^2b^2.$$

8. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} 8y=x^2, \\ x=y^2. \end{cases}$$

9. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} (x-y)(y-z)(z-x) = xyz, \\ (x^3-y^3)(y^3-z^3)(z^3-x^3) = x^3y^3z^3, \\ x+y+z = 8. \end{cases}$$

10. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} xy + yz = 882, \\ yz + zx = 992, \\ zx + xy = 572. \end{cases}$$

11. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y - z = -1, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1, \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1. \end{cases}$$

12. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3, \\ x^2y + y^2x = 6a^3, \end{cases}$$

каде a е реален број.

7. НЕРАВЕНКИ

1. Определи го најголемиот природен број n за кој е исполнето неравенството
$$\frac{3^n-239}{2} < \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{11}.$$

2. Определи ги сите тројки природни броеви (x, y, z), такви што
$$x^2 \le y+z,\ y^2 \le z+x,\ z^2 \le x+y.$$

3. Определи го најмалото целобројно решение на неравенката
$$\frac{(3+2x)(2x-3)}{4} - \frac{x-5}{8} \le (x+\frac{1}{2})^2.$$

4. Определи го најмалиот цел број кој е решение на неравеннката
$$(2-x)^3 - x(3-x)(3+x) - \frac{2(3x+1)^2+1}{3} < 27.$$

5. Определи ги сите вредности на a и b такви што
$$a^2+ab+b^2 > 3(a+b-1).$$

6. Реши ја неравенката
$$2\sqrt{2}x - 3 \le 3x - 2\sqrt{2}.$$

7. Реши ја неравенката:
$$|x-1| > \frac{x+1}{2}.$$

8. Реши ја неравенката
$$|2kx - \frac{3k-1}{2}| > (k-1)x^2+5,$$
за вредности на k кои се решенија на равенката
$$\frac{x+1}{x-1} = 1 - \frac{9}{x+2}.$$

9. Реши ја неравенката

$$|\tfrac{2x+4}{x+2}-\tfrac{4x+1}{2x}|\geq 1.$$

10. Определи рационален број со именител 7 кој е помал од $-\frac{5}{19}$, а е поголем од $-\frac{6}{19}$.

11. а) Докажи дека за секој позитивен реален број x важи $x+\frac{4}{x}\geq 4$.

    б) Определи ги сите ненулти реални броеви x за кои важи

$$\min\{4, x+\tfrac{4}{x}\}\geq 8\min\{x, \tfrac{1}{x}\}.$$

12. Реши ја равенката

$$4x(2-x)^2-5(x-1)^3+x=(x+1)^2(1-x)$$

    и провери дали нејзиите решенија се решенија на неравенката

$$(3x-1)^2+7(1-x)^2>(4x-1)^2+1.$$

13. Реши ја равенката

$$(1-2a)^2x-a^2(4x-5)=0,$$

    каде a е реаен параметар. Определи за кои вредности на a равенката има позитивно решение.

14. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$a^2(x-3)+4(a+3-x)=a^3$$

    има единствен цел позитивен корен, кој го задоволува неравенството $\frac{x+9}{6}-\frac{x-2}{3}>1$.

8. НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека бројот 3^{2013} има најмалку 957 цифри.

2. Спореди ги вредноста на изразот $\frac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}$ и бројот $\sqrt{\frac{79}{25}}$.

3. Која од дропките е поголема: $\frac{5553}{5557}$ или $\frac{6664}{6669}$?

4. Дадени се дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Ако $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, докажи, дека
$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

5. Позитивните броеви a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 ги задоволуваат условите $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ и $a_2^2+b_2^2=c_2^2$. Докажи дека $a_1a_2+b_1b_2\le c_1c_2$.

6. Ако $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}$, подреди ги по големина броевите $x,x^2,\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}$.

7. Нека $a=\frac{1}{21^2}+\frac{1}{22^2}+...+\frac{1}{40^2}$ и $b=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+...+\frac{1}{19^2}$. Докажи дека
$$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<\frac{1}{2}.$$

8. Докажи дека
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<0,99.$$

9. Докажи дека
$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}.$$

10. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{2}{2022}} < \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022} < \sqrt{\frac{3}{2023}}\,.$$

11. Нека a,b,m се три позитивни реални броеви и $a>b$. Кој од броевите $A=\sqrt{a+m}-\sqrt{a}$ и $B=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$ е поголем?

12. Ако $x>0,\ y>0,\ z>0$ и $x+y+z=1$, докажи дека
$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\le\frac{9}{4}.$$

13. Докажи дека за секои реални броеви x и y важи:
$$x^2+y^2-xy-x-y+1\ge 0\,.$$

14. Докажи дека засекои реални броеви x и y важи
$$x^2+2y^2-2xy+2x-4y+2\ge 0\,. \qquad (1)$$
Кога важи знак за равенство?

15. Нека a,b,c се природни броеви такви што $28a+30b+31c=365$. Докажи дека $a+b+c=12$.

16. Ако a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$, докажи дека
$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{3}{2}.$$

17. Докажи дека
$$\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2022}<\frac{1}{9}\,.$$

18. За кои реални броеви x вредноста на изразот
$$A=(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023$$
е минимална? Определи го тој минимум.

19. Која од дропките е поголема $\frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1}$ или $\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}$?

20. Спореди ги вредностите на дропките: $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2}$ и $\frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$.

21. Нека $m \geq n > 0$. Докажи го неравенството
$$\sqrt{2mn-n^2}+\sqrt{m^2-n^2} \geq m .$$

22. Ако $a > b > c$, докажи дека
$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c} > \frac{2}{a-c} .$$

23. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви за кои важи $a \geq b \geq c$. Докажи го неравенството
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} .$$

24. За ненегативните реални броеви a,b,c важи
$$2a^3b+2b^3c+2c^3a = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 .$$
Докажи го неравенството
$$2ab(a-b)^2+2bc(b-c)^2+2ca(c-a)^2 \geq (ab+bc+ca)^2 .$$

25. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$(\tfrac{1+c}{a}+2)(\tfrac{1+a}{b}+2)(\tfrac{1+b}{c}+2) \geq 216 .$$
Кога важи знак за равенство?

26. Нека x и y се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy} \leq 1 \leq \frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy} . \qquad (1)$$

27. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 1+a+b .$$

28. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2 \geq \tfrac{100}{3} .$$

29. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$xy + yz + zx - xyz \le \frac{8}{27}.$$

30. а) Определи ја најмалата вредност m_a на дропката $\frac{x^2+1}{x}$, за $x > 0$.

б) Определи ја најмалата вредност m_b на дропката $\frac{x^3+3x+9}{x^2}$, за $x > 0$.

в) Определи ја најмалата вредност m_c на дропката $\frac{(x+1)(y+2)(xy+2)}{xy}$, за $x > 0$ и $y > 0$.

г) Определи ја најмалата вредност m_d на дропката $\frac{(x+4)(y+1)(xy+864)}{xy}$, за $x > 0$ и $y > 0$.

31. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \ge \frac{a+b+c}{3} \cdot \sqrt[3]{(abc)^2}. \qquad (1)$$

32. Нека се a, b, c реални броеви кои припаѓаат на интервалот [0,1] и го задоволуваат условот $ab + bc + ca = 1$. Определи ги најмалата и најголемата можна вредност на изразот $a^3 + b^3 + c^3$.

33. Нека x, y, z се ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 3. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A = \frac{1}{(x+3)(y+3)} + \frac{1}{(y+3)(z+3)} + \frac{1}{(z+3)(x+3)}.$$

34. Нека a и b се реални броеви такви што $a^2 + b^2 = 2011$. Докажи дека

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2011}} + \frac{b}{\sqrt{2012}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2012}} + \frac{b}{\sqrt{2011}}\right) < \frac{4023}{2012}.$$

35. Определи ја најголемата можна вредност на збирот $a + b + c$, ако броевите a, b, c се позитивни и $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$. Како се менува одговорот ако се испушти условот броевите a, b, c да се позитивни.

36. (Неравенство на Шур). Докажи дека

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0, \qquad (1)$$

каде a,b и c се позитивни броеви и $r\geq 0$.

37. Ако a,b и c се должини на страни на триаголник, докажи дека $a^2+b^2>\frac{1}{2}c^2$.

38. Нека ABC е произволен триаголник. Докажи дека

$$P_{ABC}\leq \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$$

и знак за равенство важи ако и само ако $\measuredangle BAC=90^\circ$

39. На страните AB и CD на квадратот $ABCD$ со страна $6\,cm$ земени се соодветно точки M и N. Отсечките AN и DM се сечат во точка P, а отсечките BN и CM се сечат во точка Q. Определи ја најголемата можна плоштина на четириаголникот $MPNQ$

40. Нека A_1,B_1,C_1 се допирните точки на впишаната кружница во триаголникот ABC со неговите страни $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ \overline{AB}=c$, соодветно, и нека $\overline{AC_1}=p,\ \overline{BA_1}=q,\ \overline{CB_1}=r$. Докажи дека

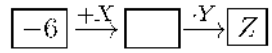
$$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот
   а) $a-(b-c)$, б) $a-b+c$,
   каде $a=-5+1$, $b=-6-1$ и $c=|-7|$.
   Решение. Имаме: $a=-4, b=-7, c=7$, па затоа
   а) $a-(b-c)=-4-(-7-7)=-4-(-14)=-4+14=10$,
   б) $a-b+c=-4-(-7)+7=-4+7+7=10$.

2. Во дијаграмот прикажан на цртежот десно X и Y се различни броеви од множеството $\{-3,-2,5,7\}$. Која е најголемата можна вредност за Z?



   Решение. Најголемата можна вредност на Z се добива кога $X=-2$ и $Y=-3$ и е еднаква на $(-6-2)\cdot(-3)=24$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$2^3\cdot(-2022:(2+0+2+2)-2023:(-2-0-2-3)):(-3).$$
   Решение. Имаме:
$$\begin{aligned}2^3\cdot(-2022:(2+0+2+2)-2023:(-2-0-2-3)):(-3)&=\\ =2^3\cdot(-2022:6-2023:(-7)):(-3)&\\ =2^3\cdot(-337+289):(-3)&\\ =2^3\cdot(-48):(-3)&\\ =128.&\end{aligned}$$

4. Определи ја најмалата и најголемата можна вредност на збирот $\overline{TWO}$ во ребусот $\overline{ONE}+\overline{ONE}=\overline{TWO}$, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.
   Решение. Збирот на единиците е парен број, што значи дека цифрата O е парна. Понатаму, збирот е трицифрен број, па затоа $O\le 4$. Според тоа, O е 2 или 4.
   Најмалата можна вредност на збирот се добива за $O=2$. Притоа збирот на единиците на $E+E=2E$ е 2 или 12, што значи дека $E=1$

или $E=6$, соодветно. Ако $E=1$, тогаш најмалата можна вредност на цифрата N е 0, но тогаш и W е 0, што не е можно. Сега, бидејќи $O=2$, мора да е $N=3$, од што се добива решението $231+231=462$. Ако $E=6$, тогаш најмалата можна вредност на цифрата N е 0 и притоа го добиваме решението $206+206=412$. Според тоа, најмалата можна вредност на $\overline{TWO}$ е 412.

Најголемата можна вредност на збирот се добива за $O=4$. Притоа збирот на единиците на $E+E=2E$ е 4 или 14, што значи дека $E=2$ или $E=7$, соодветно. За $E=2$ најголемата можна вредност на N е 9, но тогаш и T е 9, што не е можно. Според тоа, во овој случај најголемата можна вредност на N е 8 и го добиваме решението $482+482=964$. За $E=7$ најголемата можна вредност на N е 9, но тогаш и T е 9, што не е можно. Следната вредност за N е 8, но тогаш W е 7, што не е можно. Следната вредност за N е 6 и го добиваме решението $467+467=934$. Според тоа, најголемата можна вредност на $\overline{TWO}$ е 964.

5. Реши го бројниот ребус

$$\overline{SLOVEN}+\overline{LOVEN}+\overline{OVEN}+\overline{VEN}+\overline{EN}+\overline{N}=\overline{OS9L7N},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, на исти букви соодветствуваат исти цифри и цифрите 7 и 9 не соодвествуваат на ниту една буква.

Решение. Од збирот на единиците следува дека производот $6N$ завршува на N, што значи дека цифрата N е парна. Најголемиот можен пренос кон десетките е 4 (за $6\cdot 8=48$), а збирот на тој пренос и $5E$ завршува на 7. Оттука следува дека цифрата E е непарна и преносот од единиците е еднаков на 2. Но, тоа значи дека $6N$ има цифра на десетките 2, па затоа $N=4$.

Преносот од стотките кон илјадитите е најмногу 3, а збирот на тој пренос и $3O$ завршува на 9. Според тоа, за цифрата O имаме три можности $O=2,3$ или 6. За секоја од овие можности од збирот на стоилјадитите (со пренос 1 од десетилјадитите) соодветно наоѓаме $S=1,2$ или 5. Да забележиме, дека за да има пренос 1 од десетилјадитите, L треба да е поголема или еднаква на 4.

Нека $O=2, S=1$. Тогаш од збирот на илјадитите нема пренос кон десетилјадитите и $2L$ завршува на 1, што не е можно.

Нека $O=6, S=5$. Тогаш од збирот на илјадитите има пренос 1 кон

десетилјадитите и $1+2L$ завршува на 5. Според тоа, L е 2 или 7. Тоа не е можно, бидејќи по услов $L \neq 7$ и $L \geq 4$.
Нека $O=3, S=2$. Тогаш $L=6, V=1$ и $E=5$.
Конечно, $\overline{SLOVEN}=263254$ и

$$263154+63154+3154+154+54+4=329674.$$

6. Докажи дека секој непарен цел број може да се претстави како разлика на два цели броја.
Решение. Нека $2n+1$ е произволен цел број. Тогаш

$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1,$$

што и требаше да се докаже.

7. Целите броеви x и y се такви, што бројот x^2+2y е точен квадрат. Докажи дека бројот x^2+y е еднаков на збир на два точни квадрати.
Решение. Нека $x^2+2y=a^2$, каде a е цел број. Тогаш x и a се со иста парност и важи $y=\frac{a^2-x^2}{2}$. Според тоа,

$$x^2+y=x^2+\frac{a^2-x^2}{2}=\frac{a^2+x^2}{2}=(\frac{a+x}{2})^2+(\frac{a-x}{2})^2.$$

Сега, бидејќи броевите x и a се со иста парност, добиваме дека $\frac{a+x}{2}$ и $\frac{a-x}{2}$ се цели броеви, со што тврдењето е докажано.

8. Определи природен број n, за кој $2^{182}+4^n+8^{700}$ е точен квадрат.
Решение. Имаме

$$2^{182}+4^n+8^{700}=(2^{91})+2\cdot 2^{91}\cdot 2^{2008}+(2^n)^2,$$

од каде следува дека за $n=2008$ се добива квадратот на бројот $2^{91}+2^{2008}$.

9. Докажи дека бројот $(n+2)^4-n^4$ не е точен куб за ниту еден природен број n.
Решение. Имаме

$$(n+2)^4-n^4=((n+2)^2-n^2)((n+2)^2+n^2)$$
$$=(n+2-n)(n+2+n)(n^2+4n+4+n^2)$$

$$= 8(n+1)(n^2+2n+2)$$
$$= 8(n+1)((n+1)^2+1)$$
$$= 8((n+1)^3+(n+1))$$
$$= 8(k^3+k),$$

каде $k = n+1$. Бројот k^3+k не може да е точен куб, бидејќи се наоѓа меѓу два последователни кубови, т.е. $k^3 < k^3+k < (k+1)^3$.

10. Пресметај го збирот на цифрите на збирот
$$n = 9+99+999+...+\underbrace{9999...999}_{199\text{ цифри }9}.$$

Решение. Имаме,
$$n = 9+99+999+...+\underbrace{9999...999}_{199\text{ цифри }9}$$
$$= (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^{199}-1)$$
$$= 10+10^2+10^3+...+10^{199}-199$$
$$= \underbrace{1111...11110}_{200\text{ цифри}}-199$$
$$= \underbrace{1111...10911}_{200\text{ цифри}},$$

па затоа бараниот збир на цифри е $198+9=207$.

11. Определи го збирот на цифрите на бројот:
$$A = 10-10^2+10^3-10^4+10^5-...-10^{2022}+10^{2023}.$$

Решение. Имаме:
$$A = (10^{2023}-10^{2022})+...+(10^5-10^4)+(10^3-10^2)+10$$
$$= 9\cdot 10^{2022}+9\cdot 10^{2020}+...+9\cdot 10^4+9\cdot 10^2+10.$$

Сега, лесно се гледа дека во записот на бројот A има 1011 цифри 9, 1011 цифри 0 и една цифра 1. Значи, збирот на цифрите на бројот A е еднаков на $1011\cdot 9+1=9100$.

12. Бројот $A = 111...111$ има 2023 цифри, секоја еднаква на 1. Определи го збирот на цифрите на бројот $2007A$.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$2007\cdot 111 = 222777$, $2007\cdot 1111 = 2229777$ и $2007\cdot 11111 = 22299777$.

Забележуваме дека и во двата производа резултатот е број започнува со три двојки, завршува со три седумки и меѓу нив има три деветки помалку отколку што е бројот на единиците со кои е запишан вториот множител. Оттука е логично да претпоставиме дека за секој природен број $n \geq 3$ важи

$$2007 \cdot \underbrace{111...111}_{n} = 222\underbrace{999...999}_{n-3}777 .$$

Последното ќе го докажеме со индукција по n. За $k = 3,4,5$ погоре видовме дека тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $k \geq 5$. Тогаш $k+1$ добиваме

$$\begin{aligned} 2007 \cdot \underbrace{111...111}_{k+1} &= 2007 \cdot \underbrace{111...1110}_{k} + 2007 \\ &= 222\underbrace{999...999}_{k-3}7770 + 2007 , \\ &= 222\underbrace{999...999}_{k+1-3}777 \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој природен број n.

Сега, од претходно докажаното тврдење добиваме дека

$$2007 \cdot \underbrace{111...111}_{2023} = 222\underbrace{999...999}_{2020}777 ,$$

па затоа збирот на цифрите на бројот $2007A$ е еднаков на

$$3 \cdot (2+7) + 2020 \cdot 9 = 2023 \cdot 9 = 18207 .$$

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned} 2007A &= 2007 \cdot \underbrace{111...111}_{2023} \\ &= (2000+7) \cdot \underbrace{111...111}_{2023} \\ &= 2000 \cdot \underbrace{111...111}_{2023} + 7 \cdot \underbrace{111...111}_{2023} \\ &= \underbrace{222...2}_{2023}000 + \underbrace{777...7777}_{2023} \\ &= 222\underbrace{222...2}_{2020}000 + \underbrace{777...7777}_{2020}777 \\ &= 222\underbrace{999...999}_{2020}777 \end{aligned}$$

па затоа збирот на цифрите на бројот $2007A$ е еднаков на

$$3 \cdot (2+7) + 2020 \cdot 9 = 2023 \cdot 9 = 18207 .$$

13. Докажи дека бројот $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n}6$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме:

$$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6 = \underbrace{11...1}_{2n} + 4\cdot\underbrace{11...1}_{n} + 1 = \frac{1}{9}(\underbrace{99...9}_{2n} + 4\cdot\underbrace{99...9}_{n} + 9)$$
$$= \frac{1}{9}(\underbrace{99...9}_{2n} + 1 + 4\cdot(\underbrace{99...9}_{n} + 1) + 4)$$
$$= \frac{1}{9}(10^{2n} + 4\cdot 10^{n} + 4) = \frac{1}{9}(10^{n} + 2)^2$$
$$= (\tfrac{1}{3}(10^{n} + 2))^2 = (\underbrace{33...3}_{n} + 1)^2 = \underbrace{33...3}_{n-1}4^2,$$

што и требаше да се докаже.

14. Пресметај го збирот

$$2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2022}.$$

Решение. Имаме

$$2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2022} = 1\cdot(2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2022})$$
$$= (2-1)\cdot(2^{2022} + 2^{2021} + ... + 2^3 + 2^2 + 2)$$
$$= 2^{2023} - 2^{2022} + 2^{2022} - 2^{2021} + ... + 2^4 - 2^3 + 2^3 - 2^2 + 2^2 - 2$$
$$= 2^{2023} - 2.$$

15. Дадени се природните броеви $x_1, x_2, ..., x_{2018}$, кои се соодветно пропорционални со 1, 2, 3, ..., 2018. Ако $\frac{x_1 x_2 ... x_{2018}}{3^{2018}} = 2018!$, определи го збирот на дадените броеви.

Решение. За да го определиме збирот треба да го определиме коефициентот на пропорционалност k. Од условот следува дека $x_1 < x_2 < ... < x_{2018}$. Имаме,

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = ... = \frac{x_{2018}}{2018} = k,$$

од каде следува

$$x_1 = k, x_2 = 2k, ..., x_{2018} = 2018k.$$

Заменуваме во условот и добиваме

$$2018! = \frac{x_1 x_2 ... x_{2018}}{3^{2018}} = \frac{k\,2k\cdot 3k\cdot ...\cdot 2018k}{3^{2018}} = \frac{k^{2018}\cdot 2018!}{3^{2018}},$$

па затоа $\frac{k^{2018}}{3^{2018}} = 1$, т.е. $k = 3$.

Бараниот збир е

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2018} = 3 + 6 + 9 + ... + 6054 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 2018)$$
$$= 3 \cdot \frac{2018 \cdot (2018+1)}{2} = 3 \cdot 1009 \cdot 2019 = 6220539.$$

16. Првиот број на низата е 7. Секој следен член на низата се добива така што претходниот се квадрира, се соберат цифрите на квадратот и се додаде 1. Така, следните два члена на низата се 14 и 17 ($7^2 = 49$, $4 + 9 + 1 = 14$; $14^2 = 196$, $1 + 9 + 6 + 1 = 17$). Определи го 1999-тиот член на низата.

Решение. Ако ги пресметаме првите неколку членови на низата добиваме

$$7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, ...$$

Според тоа, по четвртиот член низата е периодична со период 3. Имаме $1999 - 4 = 1995$, па како $1995 = 3 \cdot 665$ заклучуваме дека 1999-тиот член на низата се совпаѓа со третиот член на периодот, т.е. тоа е бројот 11.

17. Определи ги најмалата и најголемата вредност на изразот

$$u = 3x - y + 4z + 15$$

ако важи равенството

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 14y - 12z + 148 = 0,$$

каде x, y, z се цели броеви.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$(x-8)^2 + (y-7)^2 + (z-6)^2 - 8^2 - 7^2 - 6^2 + 148 = 0,$$
$$(x-8)^2 + (y-7)^2 + (z-6)^2 = 1.$$

Бидејќи x, y, z се цели броеви, последното равенство е можно само ако еден од собирците е еднаков на 1, а другите се еднакви на 0. Значи, имаме шест случаи и тоа:

1) $x-8=1, y-7=0, z-6=0$, т.е. $x=9, y=7, z=6$ и тогаш $u=59$,
2) $x-8=-1, y-7=0, z-6=0$, т.е. $x=7, y=7, z=6$ и тогаш $u=53$,
3) $x-8=0, y-7=1, z-6=0$, т.е. $x=8, y=8, z=6$ и тогаш $u=55$,
4) $x-8=0, y-7=-1, z-6=0$, т.е. $x=8, y=6, z=6$ и тогаш $u=57$,
5) $x-8=0, y-7=0, z-6=1$, т.е. $x=8, y=7, z=7$ и тогаш $u=60$,

6) $x-8=0, y-7=0, z-6=-1$, т.е. $x=8, y=7, z=5$ и тогаш $u=52$,
Според тоа,при дадените услови најмалата вредност на изразот е 52, а најголемата е 60.

18. Определи ги сите природни броеви n така што секоја од цифрите 0, 1, 2, ..., 9, се појавува точно еднаш во записите на броевите n^3 или n^4, но не и во двата броја истовремено.
Пример. Ако треба да се искористат само цифрите 1, 2, 7 и 8, тогаш решение е бројот 3. Секоја од цифрите 1, 2, 7 и 8 се појавува точно еднаш во $3^3=27$ или во $3^4=81$, но не и во двата броја истовремено.
Решение. Ако n е едноцифрен број, тогаш

$$n^3 \le 9^3 = 729 \text{ и } n^4 \le 9^4 = 6561,$$

односно потребни се најмногу 7 цифри за да се напишат броевите n^3 и n^4. Ако n има повеќе од две цифри, тогаш

$$n^3 \ge 100^3 = 10^6 \text{ и } n^4 \ge 100^4 = 10^8,$$

па за да се запишат броевите n^3 и n^4 потребни се најмалку 16 цифри. Значи, n е двоцифрен број, па n^3 е најмалку четирицифрен, а n^4 е најмалку петцифрен. Може да заклучиме дека мора n^3 да е четирицифрен, а n^4 да е шестцифрен број (не може двата броја да се петцифрени броеви кога n е двоцифрен број). Тогаш $1000 \le n^3 \le 9999$, од каде $10 \le n \le 21$, а од $100000 \le n^4 \le 999999$, имаме дека $18 \le n \le 31$. Тоа значи дека $n \in \{18,19,20,21\}$. Бидејќи секој од броевите 20^3 и 20^4 завршуваат на 0, а секој од 21^3 и 21^4 завршуваат 1, во овие случаи имаме повторување на цифрите во записите на броевите, па броевите 20 и 21 не се решенија на задачата. Во записот на бројот $19^4 = 130321$ има повторување на цифри, па и бројот 19 не е решение на задачата. Бидејќи $18^3 = 5832$ и $18^4 = 104976$ единствениот број кој го задоволува бараното својство е бројот 18.

19. Дадена е табела 10×10. Во секое поле од првата колона е запишан бројот 1, во секое поле од втората колона е запишан бројот 2, итн. во секое поле од десеттата колона е запишан бројот 10. Потоа се избри-

шани броевите на дијагоналата која го поврзува горното лево поле со долното десно поле. Определи колку пати збирот на броевите над избришаната дијагонала е поголем од збирот на броевите под избришаната дијагонала.

Решение. За секое од разгледуваните дијагонални полиња ќе ги пресметаме збирот на броевите, запишани лево од него и збирот на броевите запишани над него. Лево од полето во k – тиот ред се броевите $1,2,...,k-1$ и нивниот збир е $\frac{k(k-1)}{2}$, а над него се запишани $k-1$ броја еднакви на k и збирот им е $k(k-1)$, т.е. е два пати поголем. Според тоа, збирот на сите броеви запишани над дијагоналата е два пати поголем од збирот на сите броеви запишани по дијагоналата.

20. Во бројот $N=\underbrace{444...4}_{n+1}\underbrace{888...8}_{n}a$ определи ја цифрата a така што за секој природен број n бројот N ќе биде точен квадрат на природен број.

Решение. За $n=1$ го добиваме бројот $\overline{448a}$, па бидејќи

$$66^2=4356<\overline{448a}<4624=68^2,$$

а $67^2=4489$ добиваме дека за $n=1$ цифрата a е 9. Понатаму, за $n=2$ го добиваме бројот $\overline{44488a}$, па бидејќи

$$666^2=443556<\overline{44488a}<446224=668^2,$$

а $667^2=444889$ добиваме дека за $n=2$ цифрата a повторно е 9. Затоа ќе ја направиме следнава трансформација

$$N = \underbrace{444...4}_{n+1}\underbrace{888...8}_{n}a = \underbrace{444...4}_{n+1}\underbrace{888...8}_{n}9 + (a-9)$$
$$= 4\cdot\underbrace{111...11}_{2n+2} + 4\cdot\underbrace{111...11}_{n+1} + 1 + (a-9)$$
$$= \frac{4\cdot\underbrace{999...99}_{2n+2} + 4\cdot\underbrace{999...99}_{n+1} + 9}{9} + (a-9) = \frac{4\cdot(\underbrace{999...99}_{2n+2}+1) + 4\cdot(\underbrace{999...99}_{n+1}+1) + 1}{9} + (a-9)$$
$$= \frac{\underbrace{4000...00}_{2n+2} + \underbrace{4000...00}_{n+1} + 1}{9} + (a-9) = \frac{\underbrace{2000...00}_{n+1}^2 + 2\cdot\underbrace{2000...00}_{n+1} + 1}{9} + (a-9)$$
$$= \frac{(\underbrace{2000...00}_{n+1}+1)^2}{9} + (a-9) = (\frac{1}{3}\cdot 2\underbrace{000...01}_{n})^2 + (a-9)$$
$$= \underbrace{666...6}_{n}7^2 + (a-9).$$

Сега е јасно дека за секој едноцифрен број a се исполнети неравенствата

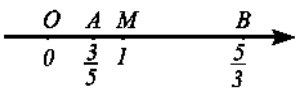
$$\underbrace{666...6}_{n}6^2 < N < \underbrace{666...6}_{n}8^2,$$

па како за $a = 9$ важи $N = \underbrace{666...6}_{n}7^2$, добиваме решението на задачата е $a = 9$.

2. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Дропките $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{3}$ се претставени на бројната оска соодветно со точките A и B. Која од овие точки е поблиску до точката M која е слика на бројот 1?

Решение. Должините на отсечките AM и BM се:



$$\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = 1 - \tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{5},$$

$$\overline{BM} = \overline{OB} - \overline{OM} = \tfrac{5}{3} - 1 = \tfrac{2}{3}.$$

Бидејќи $\frac{2}{5} < \frac{5}{3}$, добиваме $\overline{AM} < \overline{BM}$ и точката A е поблиску до точката M.

2. а) Пресметај $a = \frac{|-3\cdot 5^2|-|1-3^3|}{-2\cdot(-4)-3^2}$ и $b = \frac{(-6)^4\cdot 2^3}{5^2} : \frac{(-3)^4\cdot 2^6}{(-5)^3}$.

б) Претстави ги броевите $\frac{1}{7}a$ и $2b$ на бројната оска и определи го растојанието меѓу нив.

Решение. а) Имаме

$$a = \frac{|-3\cdot 5^2|-|1-3^3|}{-2\cdot(-4)-3^2} = \frac{|-3\cdot 25|-|1-27|}{8-9} = \frac{|-75|-|-26|}{-1} = \frac{75-26}{-1} = -49,$$

$$b = \frac{(-6)^4\cdot 2^3}{5^2} : \frac{(-3)^4\cdot 2^6}{(-5)^3} = \frac{2^4\cdot 3^4\cdot 2^3}{5^2}\cdot\frac{-5^3}{3^4\cdot 2^6} = -2\cdot 5 = -10.$$

б) Пресметуваме $\frac{1}{7}a = \frac{1}{7}\cdot(-49) = -7$ и $2b = 2\cdot(-10) = -20$, (направи цртеж). Растојанието меѓу двете точки на бројната оска е еднакво на $|-7-(-20)| = 13$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот

$$-(b-a)-(a+(-b))+4ab,$$

ако $a = -2,5$ и $b = 5,5$.

Решение. Имаме:

$$-(b-a)-(a+(-b))+4ab = -b+a-a+b+4ab = 4ab,$$

па затоа за $a = -2,5$ и $b = 5,5$ вредноста на изразот е

$$4\cdot(-2,5)\cdot 5,5=-55\,.$$

4. Нека

$$S=\tfrac{1}{2},\ E=\frac{\frac{3}{7}+1}{\frac{3}{7}-1},\ D=-2:\tfrac{5}{3}+1,1,\ A=3-0,2\cdot 2,\ M=100\cdot 0,03-5,25:\tfrac{1}{2}\,.$$

Пресметај ја вредноста на изразот: $S+E:D-A\cdot M$.

Решение. Имаме:

$$S=\tfrac{1}{2}=0,5,$$

$$E=\frac{\frac{3}{7}+1}{\frac{3}{7}-1}=\frac{\frac{10}{7}}{-\frac{4}{7}}=-\tfrac{5}{2}=-2,5,$$

$$D=-2:\tfrac{5}{3}+1,1=-2\cdot\tfrac{3}{5}+1,1=-1,2+1,1=-0,1,$$

$$A=3-0,2\cdot 2=3-0,4=2,6,$$

$$M=100\cdot 0,03-5,25:\tfrac{1}{2}=3-5,25\cdot 2=3-10,5=-7,5.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}S+E:D-A\cdot M&=0,5+(-2,5):(-0,1)-2,6\cdot(-7,5)\\&=0,5+25+19,5=45.\end{aligned}$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{0,3\cdot 1,4+0,6\cdot 2}{2,25\cdot(10-5:2,5)}\,.$$

Решение. Имаме

$$\frac{0,3\cdot 1,4+0,6\cdot 2}{2,25\cdot(10-5:2,5)}=\frac{0,42+1,2}{2,25\cdot(10-2)}=\frac{1,62}{2,25\cdot 8}=\frac{1,62}{18}=0,09\,.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$b=\Big|\,|-0,7|+(-3,7)+\frac{|-2,1-0,9|}{4}\,\Big|+\frac{1-\frac{3}{4}\cdot\left|\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}\right|}{|-5|}\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}b&=\Big|\,|-0,7|+(-3,7)+\frac{|-2,1-0,9|}{4}\,\Big|+\frac{1-\frac{3}{4}\cdot\left|\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}\right|}{|-5|}\\&=\Big|\,0,7-3,7+\frac{3}{4}\,\Big|+\frac{1-\frac{3}{4}\cdot\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right|}{5}\\&=\Big|\,-3+\frac{3}{4}\,\Big|+\frac{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}{5}=\frac{9}{4}+\frac{3}{20}=\frac{12}{5}.\end{aligned}$$

7. Ако $a=\frac{2^{12}+2^{13}}{4^7-4^6}$ и $5\cdot 25^b=125^7$, колку е $a+b$?

Решение. Имаме,

$$a=\frac{2^{12}+2^{13}}{4^7-4^6}=\frac{2^{12}(1+2)}{4^6(4-1)}=\frac{2^{12}\cdot 3}{(2^2)^6\cdot 3}=1.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}
&5\cdot 25^b=125^7,\\
&5\cdot (5^2)^b=(5^3)^7,\\
&5\cdot 5^{2b}=5^{3\cdot 7},\\
&5^{2b+1}=5^{21},\\
&2b+1=21,\\
&b=10.
\end{aligned}$$

Според тоа, $a+b=11$.

8. Која цифра е на стотото место по децималната запирка во децималниот запис на дропката $\frac{28937513}{9999990}$?

Решение. Имаме,

$$\frac{28937513}{9999990}=2,8(937541).$$

Периодата во децималниот запис е со должина 6 и таа започнува по првото децимално место, па затоа треба да определиме која цифра е на 99-тото место во периодичниот дел на децималниот запис. Сега, бидејќи $99=6\cdot 16+3$, заклучуваме дека тоа е трета цифра од периодата, т.е. цифрата 7.

9. Определи ја 2023-тата цифра по децималната запирка во дицималното претставување на дропката $\frac{35}{37}$.

Решение. Имаме $\frac{35}{37}=0,(945)$ и бидејќи $2023=674\cdot 3+1$ заклучуваме дека 2023-тата цифра по децималната запирка е првата цифра во периодата, што значи дека тоа е цифрата 9.

10. Определи ја 914-тата децимала во децималниот запис на дропката $\frac{9}{14}$.

Решение. Имаме, $\frac{9}{14}=0,64(285974)$. Значи, имаме бесконечен децимален запис кој има двоцифрена предпериода 64, а потоа следува

шестцифрена периода. Значи, треба да ја определиме $914-2=912$-тата цифра која следува по препериодата. Бидејќи $912:6=152$, бараната цифра е последната цифра во периодата, т.е. тоа е цифрата 4.

11. Пресметај го збирот на првите 450 децимали во децималниот запис на дропката $\frac{11}{7}$.

Решение. Имаме, $11:7=1,571428(571428)$, што значи дека дропката $\frac{11}{7}$ има бесконечен периодичен децимален запис со 6 цифри во периодот. Бидејќи $450:6=75$ и $5+7+1+4+2+8=27$, добиваме дека збирот на првите 450 децимали е еднаков на $75\cdot 27=2025$.

12. Во шесте квадратчиња запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 така што ќе биде точно равенството

$$\frac{\square}{\square}\ \frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}.$$

Решение. Јасно, еден од именителите на трите дропки мора да е заеднички содржател на другите два. Последното е можно само ако во некој редослед именителите на дропките се: 1, 2, 4 или 1, 3, 6 или 2, 3, 6. Случаите 1, 2, 4 и 1, 3, 6 не се можни (Провери!). Во случај кога именителите се 2, 3 и 6 се добива единственото решение $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

13. Определи ги сите дропки од видот $\frac{a}{b}\,(a,b\in\mathbb{N})$, ако $a<b$ и производот на именителот и броителот на таа дропка е еднаков на 30.

Решение. Од $30\cdot 1=15\cdot 2=10\cdot 3=6\cdot 5=30$ следува дека дропките кои го задоволуваат условот на задачата се $\frac{1}{30},\frac{2}{15},\frac{3}{10}$ и $\frac{5}{6}$. Нивниот збир е

$$\frac{1}{30}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}+\frac{5}{6}=\frac{1+4+9+25}{30}=\frac{39}{30}.$$

14. Определи го природниот број n, за кој збирот $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n}$ е природен број.

Решение. Имаме, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n}=\frac{19}{20}+\frac{1}{n}$. Сега, од $\frac{19}{20}<1$ и $\frac{1}{n}\le 1$ следува $\frac{19}{20}+\frac{1}{n}<2$. Значи, ако збирот е природен број, тогаш $\frac{19}{20}+\frac{1}{n}=1$, од

каде добиваме $n=20$.

15. Вредноста на изразот $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})$ е еднаква на 2023. Колку множители има во овој производ.

Решение. Бидејќи

$$2023=(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1+\tfrac{1}{n})$$
$$=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n+1}{n}=\tfrac{n+1}{2},$$

добиваме $\frac{n+1}{2}=2023$, па затоа $n+1=4046$, односно $n=4045$. Според тоа, во производот има $n-1=4045-1=4044$ множители.

16. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+\tfrac{97}{101}-\ldots-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}.$$

Решение. Имаме:

$$1-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+\ldots-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}=\tfrac{101}{101}-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+\ldots-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}$$
$$=\tfrac{101-100}{101}+\tfrac{99-98}{101}+\tfrac{97-96}{101}+\ldots+\tfrac{3-2}{101}+\tfrac{1}{101}$$
$$=\underbrace{\tfrac{1}{101}+\tfrac{1}{101}+\ldots+\tfrac{1}{101}}_{50\text{ пати}}+\tfrac{1}{101}=\tfrac{51}{101}.$$

17. Пресметај го збирот

$$\tfrac{1}{10\cdot11}+\tfrac{1}{11\cdot12}+\ldots+\tfrac{1}{19\cdot20}.$$

Решение. Ако го искористиме равенството $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, добиваме

$$\tfrac{1}{10\cdot11}+\tfrac{1}{11\cdot12}+\ldots+\tfrac{1}{19\cdot20}=\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{12}+\ldots+\tfrac{1}{19}-\tfrac{1}{20}=\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{20}=\tfrac{1}{20}.$$

18. Пресметај го збирот

$$A=\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{42}+\tfrac{1}{56}+\tfrac{1}{72}+\tfrac{1}{90}+\tfrac{1}{110}+\tfrac{1}{132}+\tfrac{1}{156}+\tfrac{1}{182}+\tfrac{1}{210}.$$

Решение. Имаме

$$A=\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{42}+\tfrac{1}{56}+\tfrac{1}{72}+\tfrac{1}{90}+\tfrac{1}{110}+\tfrac{1}{132}+\tfrac{1}{156}+\tfrac{1}{182}+\tfrac{1}{210}$$
$$=\tfrac{1}{4\cdot5}+\tfrac{1}{5\cdot6}+\tfrac{1}{6\cdot7}+\tfrac{1}{7\cdot8}+\tfrac{1}{8\cdot9}+\tfrac{1}{9\cdot10}+\tfrac{1}{10\cdot11}+\tfrac{1}{11\cdot12}+\tfrac{1}{12\cdot13}+\tfrac{1}{13\cdot14}+\tfrac{1}{14\cdot15}$$
$$=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\ldots+\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{14}-\tfrac{1}{15}$$
$$=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{15}=\tfrac{11}{60}.$$

19. Пресметај го збирот

$$A=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Решение. За секој природен број n важи

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

па затоа

$$A=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

20. Пресметај го збирот

$$A=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Решение. Според претходната задача имаме :

$$\begin{aligned}A&=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{(2\cdot 1)^2-1+1}{1\cdot 3}+\frac{(2\cdot 2)^2-1+1}{3\cdot 5}+\frac{(2\cdot 3)^2-1+1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{(2n)^2-1+1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\&=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2^2-1}{1\cdot 3}+\frac{4^2-1}{3\cdot 5}+\frac{6^2-1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{(2n)^2-1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(n+\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

21. Пресметај го збирот

$$A=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}.$$

Решение. За секој природен број $n\geq 2$ имаме

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\frac{n+1-(n-1)}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right),$$

па затоа

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right),\\\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right),\\\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 6}\right),\\\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\cdot 6}-\frac{1}{6\cdot 7}\right).\end{aligned}$$

Според тоа,

$$A=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{6\cdot 7}\right)=\frac{1}{14}.$$

22. Пресметај го збирот

$$A=\frac{2}{3}-8\left(\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\frac{1}{7\cdot9\cdot11}\right).$$

Решение. За секој природен број $n\geq 3$ имаме

$$\frac{1}{(n-2)n(n+2)}=\frac{1}{4}\frac{n+2-(n-2)}{(n-2)n(n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n-2)n}-\frac{1}{n(n+2)}\right),$$

па затоа

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}\right),$$
$$\frac{1}{3\cdot5\cdot7}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right),$$
$$\frac{1}{5\cdot7\cdot9}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}\right),$$
$$\frac{1}{7\cdot9\cdot11}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7\cdot9}-\frac{1}{9\cdot11}\right).$$

Според тоа,

$$A=\frac{2}{3}-8\left(\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\frac{1}{7\cdot9\cdot11}\right)=\frac{2}{3}-8\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{9\cdot11}\right)=\frac{2}{99}.$$

23. Пресметај го збирот

$$M=\frac{1}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1}{4\cdot7\cdot10}+\frac{1}{7\cdot10\cdot13}+\ldots+\frac{1}{19\cdot22\cdot25}.$$

Решение. За секој природен број n имаме

$$\frac{1}{(n-3)n(n+3)}=\frac{1}{6}\frac{n+3-(n-3)}{(n-3)n(n+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(n-3)n}-\frac{1}{n(n+3)}\right),$$

па затоа

$$\frac{1}{1\cdot4\cdot7}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1\cdot4}-\frac{1}{4\cdot7}\right),$$
$$\frac{1}{4\cdot7\cdot10}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4\cdot7}-\frac{1}{7\cdot10}\right),$$
$$\frac{1}{7\cdot10\cdot13}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7\cdot10}-\frac{1}{10\cdot13}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{19\cdot22\cdot25}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{19\cdot22}-\frac{1}{22\cdot25}\right),$$

што значи

$$M=\frac{1}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1}{4\cdot7\cdot10}+\frac{1}{7\cdot10\cdot13}+\ldots+\frac{1}{19\cdot22\cdot25}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1\cdot4}-\frac{1}{22\cdot25}\right)=\frac{91}{2200}.$$

24. Пресметај го збирот

$$A=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Решение. *Прв начин*. Ќе определиме константи A,B,C,D такви што

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}+\frac{D}{n+3}.$$

Ако горното равенство го помножиме со $n(n+1)(n+2)(n+3)$, по средувањето на добиеното равенство наоѓаме

$(A+B+C+D)n^3+(6A+5B+4C+3D)n^2+(11A+6B+3C+2D)n+6A=1$

од каде со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на n го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ 6A+5B+4C+3D=0, \\ 11A+6B+3C+2D=0, \\ 6A=1. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}, D=-\frac{1}{6}$. Сега, за бараниот збир добиваме

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n})-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1})+ \\ &\quad +\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2})-\tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}+\tfrac{1}{n+3}) \\ &= \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{1}{n+2}-\tfrac{1}{n+3})-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n+2}). \end{aligned}$$

Втор начин. Ако искористиме дека

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\frac{n+3-n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right),$$

добиваме

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right). \end{aligned}$$

25. Спореди ги броевите $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2017}{2018!}$ и 1.

Решение. Секоја од дропките во дадениот збир е од видот $\frac{n-1}{n!}$ и притоа важи

$$\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2017}{2018!} &= \frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{2017}{2017!}-\frac{1}{2017!}+\frac{2018}{2018!}-\frac{1}{2018!} \\ &= 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}+\frac{1}{2017!}-\frac{1}{2018!} \\ &= 1-\frac{1}{2018!}<1. \end{aligned}$$

26. Спореди ги броевите $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{2018}{2016!+2017!+2018!}$ и $\frac{1}{2}$.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} n!+(n+1)!+(n+2)! &= n!+(n+1)\cdot n!+(n+1)(n+2)\cdot n! \\ &= (1+n+1+(n+1)(n+2))\cdot n! \\ &= ((n+2)+(n+1)(n+2))\cdot n! \\ &= (n+2)(n+1+1)\cdot n! \\ &= (n+2)^2\cdot n!. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)^2\cdot n!}=\frac{1}{(n+2)\cdot n!}=\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned} &\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{2017}{2015!+2016!+2017!}+\frac{2018}{2016!+2017!+2018!}= \\ &=\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{2017}{2017!}-\frac{1}{2017!}+\frac{2018}{2018!}-\frac{1}{2018!} \\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}+\frac{1}{2017!}-\frac{1}{2018!} \\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{2018!}<\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

27. Пресметај го збирот

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{99^2+100^2}{99\cdot 100}.$$

Решение. Да ги разледаме збировите на првите неколку членови:

$$\begin{aligned} &\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}=\frac{5}{2}=\frac{1\cdot 5}{2}=\frac{(2-1)\cdot(2\cdot 2+1)}{2}, \\ &\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}=\frac{14}{3}=\frac{2\cdot 7}{3}=\frac{(3-1)\cdot(2\cdot 3+1)}{3}, \\ &\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}=\frac{27}{4}=\frac{3\cdot 9}{4}=\frac{(4-1)\cdot(2\cdot 4+1)}{4}. \end{aligned}$$

Од горните три равенства логично е да претпоставиме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ е точно равенството.

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{(n-1)^2+n^2}{(n-1)\cdot n}=\frac{(n-1)(2n+1)}{n}. \qquad (1)$$

Горното равенство ќе го докажеме со математичка индукција. Погоре покажавме дека равенството е точно за $n=1,2,3$. Нека претпоставиме дека равенството е точно за некој природен број $n=k$. Тогаш за $n=k+1$, од индуктивната претпоставка следува

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{(k-1)^2+k^2}{(k-1)\cdot k}+\frac{k^2+(k+1)^2}{k\cdot(k+1)}=\frac{(k-1)(2k+1)}{k}+\frac{k^2+(k+1)^2}{k\cdot(k+1)}$$
$$=\frac{(k^2-1)(2k+1)+k^2+(k+1)^2}{k\cdot(k+1)}$$
$$=\frac{2k^3+k^2-2k-1+k^2+k^2+2k+1}{k\cdot(k+1)}$$
$$=\frac{2k^3+3k^2}{k\cdot(k+1)}=\frac{k(2k+3)}{k+1}$$
$$=\frac{(k+1-1)(2(k+1)+1)}{k+1},$$

што значи дека равенството (1) важи и за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството (1) е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

Да се вратиме на задачата. Ако во (1) ставиме $n=100$, добиваме

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{99^2+100^2}{99\cdot 100}=\frac{99\cdot 201}{100}.$$

28. Дадени се 100 броеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_{99}, a_{100}$. Познато е дека аритметичката средина на броевите a_1 и a_2 е 1, аритметиката средина на броевите a_2 и a_3 е 2, аритметичката средина на броевите a_3 и a_4 е 3, ..., аритметичката средина на броевите a_{99} и a_{100} е 99. Определи ја аритметичката средина на броевите a_1 и a_{100}.

Решение. Од условот на здачата имаме

$$\frac{a_1+a_2}{2}=1,\ \frac{a_2+a_3}{2}=2,\ \frac{a_3+a_4}{2}=3,\ \ldots,\ \frac{a_{99}+a_{100}}{2}=99,$$

па затоа

$$a_1+a_2=2\cdot 1,$$
$$a_2+a_3=2\cdot 2,$$
$$a_3+a_4=2\cdot 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{99}+a_{100}=2\cdot 99.$$

Ги собираме горните равенства и добиваме

$$a_1+2(a_2+a_3+\ldots+a_{99})+a_{100}=2\cdot(1+2+3+\ldots+99)$$
$$a_1+2(a_2+a_3+\ldots+a_{99})+a_{100}=2\cdot\frac{99\cdot(99+1)}{2},$$
$$a_1+2(a_2+a_3+\ldots+a_{99})+a_{100}=2\cdot 4950.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned} a_2+a_3+\ldots+a_{99} &= (a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\ldots+(a_{98}+a_{99}) \\ &= 2\cdot 2+2\cdot 4+\ldots+2\cdot 98 \\ &= 2\cdot(2+4+\ldots+98) \\ &= 2\cdot(2\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+2\cdot 49) \\ &= 2\cdot 2\cdot(1+2+\ldots+49) \\ &= 4\cdot\tfrac{49\cdot(49+1)}{2} = 4\cdot 1225 = 4900. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$a_1+2\cdot 4900+a_{100} = 2\cdot 4950,$$
$$\tfrac{a_1+a_{100}}{2} = 4950-4900,$$
$$\tfrac{a_1+a_{100}}{2} = 50.$$

29. За познат x_n пресмеруваме x_{n+1} според формулата $x_{n+1}=\frac{1+x_n}{1-x_n}$. Ако $x_1=3$, пресмета ј го x_{1111}.

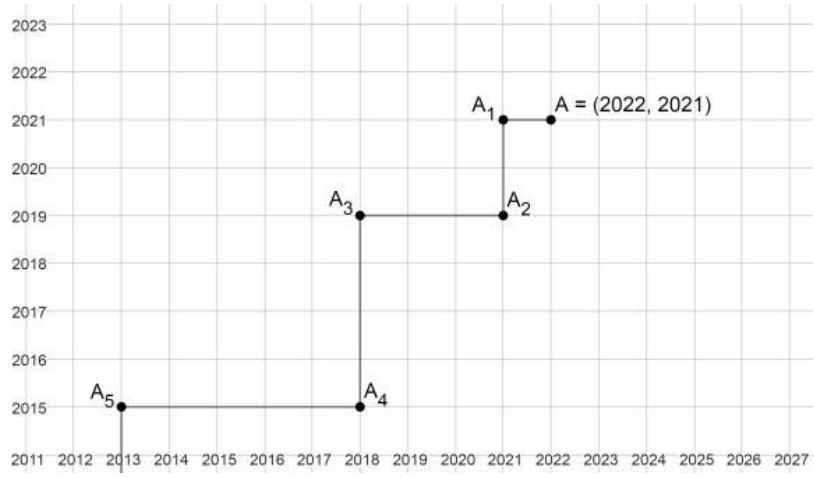
Решение. Станува збор за низа броеви во која секој следен член се пресметува со помош на неговиот претходник. Ќе ги пресметаме првите неколку члена на низата. Имаме,

$$x_1=3,$$
$$x_2=\frac{1+x_1}{1-x_2}=\frac{1+3}{1-3}=-2,$$
$$x_3=\frac{1+x_2}{1-x_2}=\frac{1+(-2)}{1-(-2)}=-\frac{1}{3},$$
$$x_4=\frac{1+x_3}{1-x_3}=\frac{1+(-\frac{1}{3})}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1}{2},$$
$$x_5=\frac{1+x_4}{1-x_4}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3,$$
$$x_6=\frac{1+x_5}{1-x_5}=\frac{1+3}{1-3}=-2.$$

Според тоа, членовите на низата периодично се повторуваат, при што $x_{n+4}=x_n$, за $n=1,2,3,\ldots$. Сега, бидејќи $1111=277\cdot 4+3$, заклучуваме дека $x_{1111}=x_3=-\frac{1}{3}$.

30. Вонземјанинот Грини (слика десно) почнал да се движи во координатната рамнина од точката $A(2022,2021)$, како што

е прикажано на долниот цртеж: еден чекор лево, па два долу, па три лево, па четири долу, па пет лево итн. Точките во кои го менува правецот на движење се означени редоследно со $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и во нив кратко се одмара.



Грини се одморил во точката $A_k(86, 41)$. Кои се координатите на следната точка A_{k+1} во која Грини се одморил?

Решение. Нека k е непарен број, т.е. $k = 2m-1, m \in \mathbb{N}$. Тогаш од A во A_{2m-1} се стигнува со одење $1+3+5+\ldots+(2m-1)$ единици лево и $2+4+6+\ldots+(2m-2)$ единици долу. Според тоа,

$$2021-(2+4+6+\ldots+(2m-2))=41,$$
$$2(1+2+\ldots+(m-1))=2021-41,$$
$$2\cdot\frac{m(m-1)}{2}=1980,$$
$$m(m-1)=1980,$$
$$m=45.$$

Меѓутоа, за $m=45$ имаме

$$1+3+5+\ldots+(2m-1)=1+3+5+\ldots+99=2025>1936=2022-86,$$

што противречи на условот на задачата.

Нека k е парен број, т.е. $k=2m, m\in\mathbb{N}$. Тогаш од A во A_{2m} се стигнува со одење $1+3+5+\ldots+(2m-1)$ единици лево и $2+4+6+\ldots+2m$ единици долу (двата збира имаат по m собирци). Според тоа,

$$2021-(2+4+6+\ldots+2m-2)=41,$$
$$2(1+2+\ldots+m)=2021-41,$$

$$2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 1980,$$
$$m(m+1) = 1980,$$
$$m = 44.$$

За $m = 44$ имаме

$$1 + 3 + 5 + ... + (2m - 1) = 1 + 3 + 5 + ... + 97 = 1936 = 2022 - 86,$$

што значи дека Грини се одморил во точката A_{88}, а следната точка во која ќе се одмори е A_{89} и истата се наоѓа на 89 единици лево од A_{88}, па тоа е точката $A_{89}(86 - 89, 41) \equiv A_{89}(-3, 41)$.

3. ДРОБНОРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Даден е изразот $B=\frac{a-9}{4}x+\frac{a+2}{3}x^2-x^3$.

   а) Ако за $x=-2$ вредноста на B е 16, да се определи a.

   б) Определи ја вредноста на B за $x=\frac{12^6\cdot 7^{2010}\cdot 28}{3^6\cdot 2^{18}\cdot 7^{2011}}$.

   Решение. а) За $x=-2$ имаме

   $$\frac{a-9}{4}(-2)+\frac{a+2}{3}(-1)^2-(-2)^3=16,$$
   $$-\frac{a-9}{2}+\frac{4(a+2)}{3}+8=16,$$
   $$-3(a-9)+8(a+2)=48,$$
   $$a=1.$$

   б) Наоѓаме $x=\frac{12^6\cdot 7^{2010}\cdot 28}{3^6\cdot 2^{18}\cdot 7^{2011}}=\frac{2^{12}\cdot 3^6\cdot 7^{2010}\cdot 2^2\cdot 7}{3^6\cdot 2^{18}\cdot 7^{2011}}=\frac{1}{2^4}$. Сега, за $a=1$ добиваме

   $$B=-2x+x^2-x^3=-2\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^{12}}=\frac{-2^9+2^4-1}{2^{12}}=-\frac{497}{4096}.$$

2. Определи го негативниот број a, за кој кога $b=\frac{17-7:(-5)}{|6{,}8-9{,}1|}$ вредноста на изразот $A=\frac{(ab^2)^4(a^3b)^2}{(a^2b^3)^3}$ е еднаква на 5000.

   Решение. Имаме

   $$b=\frac{17-7:(-5)}{|6{,}8-9{,}1|}=\frac{17+1{,}4}{|-2{,}3|}=18{,}4:2{,}3=8 \text{ и}$$
   $$A=\frac{(ab^2)^4(a^3b)^2}{(a^2b^3)^3}=\frac{a^4b^8a^6b^2}{a^6b^2}=a^4b.$$

   Сега, од $A=5000$ следува $8a^4=5000$, од каде добиваме $a^4=625=5^4$ и како a треба да е негативен број, следува $a=-5$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот

   $$A=1-n+n^2-n^3+\ldots+n^{98}-n^{99}+\frac{n^{100}}{1+n},$$

   ако $n=1370$.

   Решение. Имаме:

$$A = 1 - n + n^2 + n^3 - \ldots + n^{98} - n^{99} + \frac{n^{100}}{1+n}$$
$$= \frac{(1+n)(1-n+n^2-n^3+\ldots+n^{98}-n^{99})+n^{100}}{1+n}$$
$$= \frac{(1-n+n^2-n^3+\ldots+n^{98}-n^{99})+(n-n^2-n^3+n^4-\ldots-n^{98}+n^{99}-n^{100})+n^{100}}{1+n}$$
$$= \frac{1}{1+n}.$$

Според тоа, за $n = 1370$ вредноста на дадениот израз е $\frac{1}{1370+1} = \frac{1}{1371}$.

4. За броевите a и b за секој број x го формираме бројот $ax + b$. Определи го збирот $a + b$, ако е познато дека за секој реален број x на бројот $ax + b$ му е придружен бројот $(a^2 - a + 2)x + 2013$.

Решение. Според правилото на бројот $ax + b$ му е придружен бројот $a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$. Затоа, за секој реален број x важи

$$(a^2 - a + 2)x + 2013 = a^2x + ab + b.$$

Оттука, со замена во претходното равенство за $x = 0$ добиваме дека $ab + b = 2013$, а ако земеме $x = 1$ добиваме

$$a^2 - a + 2 + 2013 = a^2 + ab + b$$

и како $ab + b = 2013$, добиваме дека важи $a^2 - a + 2 = a^2$. Од последното равенство следува $a = 2$. Сега, $2b + b = 2013$, т.е. $b = 671$. Според тоа, $a + b = 673$.

5. Нека a, b, c, d се меѓусебно различни природни броеви такви што $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$. Докажи дека $\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2} + \frac{b^6c^6}{2a^2d^2}}$ е квадрат на природен број.

Решение. Равенството од условот на задачата последователно е еквивалентно со равенствата

$$(a^2 - b^2)(c^2 + d^2) = (c^2 - d^2)(a^2 + b^2),$$
$$a^2c^2 + a^2d^2 - b^2c^2 - b^2d^2 = a^2c^2 + b^2c^2 - a^2d^2 - b^2d^2,$$
$$a^2d^2 = b^2c^2.$$

Според тоа,

$$\sqrt{\frac{a^6d^6}{2b^2c^2} + \frac{b^6c^6}{2a^2d^2}} = \sqrt{\frac{(a^2d^2)^3}{2b^2c^2} + \frac{(b^2c^2)^3}{2a^2d^2}} = \sqrt{\frac{(b^2c^2)^3}{2b^2c^2} + \frac{(b^2c^2)^3}{2b^2c^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b^2c^2)^2}{2} + \frac{(b^2c^2)^2}{2}} = \sqrt{(b^2c^2)^2} = b^2c^2 = (bc)^2,$$

што и требаше да се докаже.

6. Нека за целите броеви a, b и n важи $b \neq 0$ и $\frac{a}{b} = \frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$. Докажи дека геометриската средина на броевите a и b е цел број.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$ab^2 + an^2 = ba^2 + bn^2,$$
$$ab^2 - a^2b + an^2 - bn^2 = 0,$$
$$ab(b-a) - n^2(ab - n^2) = 0,$$
$$(b-a)(ab - n^2) = 0.$$

Според тоа, $b - a = 0$ или $ab - n^2 = 0$. Ако $b - a = 0$, тогаш $a = b$, па затоа $\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = |a|$ е цел број, а ако $ab - n^2 = 0$, тогаш $ab = n^2$, па затоа $\sqrt{ab} = \sqrt{n^2} = |n|$ е цел број, што и требаше да се докаже.

7. Нека $a \otimes b = (a+1)(b+1) - 1$, за секои $a, b \in \mathbb{R}$. Докажи дека

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c\ .$$

Решение. Имаме:

$$a \otimes b = (a+1)(b+1) - 1 = ab + a + b + 1 - 1 = ab + a + b\ .$$

Затоа

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (bc + b + c) = abc + ab + ac + bc + a + c + a,$$
$$(a \otimes b) \otimes c = (ab + a + b) \otimes c = abc + ac + bc + ab + a + b + c,$$

т.е.

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c\ .$$

8. Пресметај ја бројната вредност на изразот $A = \frac{x^{2013} + 2x^{2012}}{3x^{2011} - 4x^{2010}}$ за $x = -4$.

Решение. Имаме:

$$A = \frac{x^{2013} + 2x^{2012}}{3x^{2011} - 4x^{2010}} = \frac{x^{2012}(x+2)}{x^{2010}(3x-4)} = \frac{x^2(x+2)}{3x-4}.$$

Значи, за $x = -4$ вредноста на дадениот израз е

$$A=\frac{(-4)^2(-4+2)}{3(-4)-4}=\frac{16\cdot(-2)}{-12-4}=2.$$

9. Упрости го изразот $A=\frac{(a\cdot a^n)^2\cdot(b^3)^{n-1}}{(a^2b^3)^n}$ и пресметај ја неговата вредност за $a=\frac{2^{61}+2^{60}}{2^{61}-2^{60}}$ и $27^b\cdot 3=(81^2)^2$.

Решение. Имаме

$$a=\frac{2^{61}+2^{60}}{2^{61}-2^{60}}=\frac{2^{60}(2+1)}{2^{60}(2-1)}=3$$

и

$$\begin{aligned}&27^b\cdot 3=(81^2)^2,\\&(3^3)^b\cdot 3=(3^4)^4,\\&3^{3b+1}=3^{16},\\&3b+1=16,\\&b=5.\end{aligned}$$

Понатаму,

$$A=\frac{(a\cdot a^n)^2\cdot(b^3)^{n-1}}{(a^2b^3)^n}=\frac{(a^{n+1})^2\cdot b^{3(n-1)}}{a^{2n}b^{3n}}=\frac{a^{2n+2}b^{3n-3}}{a^{2n}b^{3n}}=\frac{a^2}{b^3}$$

и за $a=3$ и $b=5$ добиваме

$$A=\frac{3^2}{5^3}=\frac{9}{125}.$$

10. Даден е полиномот

$$A=((-8+9x)^2+(3x-4)^3):(\tfrac{27}{4}x)-(y+2x)(2x-y),\ x\neq 0.$$

а) Определи ја вредноста на полиномот A, ако

$$x=|1-3\tfrac{1}{4}|+\frac{6\cdot 3^4}{3^5+3^5},$$

а y е најголемиот цел негативен број.

б) Ако $x=1$, определи ја вредноста на y за која

$$A=(y-2)(y+2)+7y.$$

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}A&=((-8+9x)^2+(3x-4)^3):(\tfrac{27}{4}x)-(y+2x)(2x-y),\ x\neq 0\\&=(81x^2-144x+64+27x^3-108x^2+144x-64):(\tfrac{27}{4}x)-(4x^2-y^2)\end{aligned}$$

$$= (27x^3 - 27x^2) : (\tfrac{27}{x}x) - 4x^2 + y^2$$
$$= 4x^2 - 4x - 4x^2 + y^2 = -4x + y^2.$$

Освен тоа, $x = |1 - 3\frac{1}{4}| + \frac{6 \cdot 3^4}{3^5 + 3^5} = x = |-2\frac{1}{4}| + \frac{6 \cdot 3^4}{2 \cdot 3^5} = 2\frac{1}{4} + 1 = 3\frac{1}{4}$ и $y = -1$.

Според тоа, бараната вредност е

$$A(3\tfrac{1}{4}, -1) = -4\tfrac{13}{4} + (-1)^2 = -3 + 1 = -12 .$$

б) Во $-4x + y^2 = (y-2)(y+2) + 7y$ ставаме $x = 1$ и добиваме $7y = 0$, од каде наоѓаме $y = 0$.

11. Разложи го на множители полиномот

$$(n-2)(n-1)(2n-3) + 6(n-1)^2 + 6n^2 .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(n-2)(n-1)(2n-3) + 6(n-1)^2 + 6n^2 &= \\ &= (n-1)((n-2)(2n-3) + 6(n-1)) + 6n^2 \\ &= (n-1)(2n^2 - n) + 6n^2 \\ &= (n-1)n(2n-1) + 6n^2 \\ &= n((n-1)(2n-1) + 6n) \\ &= n(2n^2 + 3n + 1) \\ &= n(2n^2 + 2n + n + 1) \\ &= n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

12. Разложи го на множители полиномот $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3 + (y+z)^3 + 3x(y+z)(x+y+z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + 3x(y+z)(x+y+z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3yz(x+y+z) + 3x(y+z)(x+y+z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx),\end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx))\end{aligned}$$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Втор начин. Од формулата $x^3+y^3=-3xy(x+y)+(x+y)^3$ имаме

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz \\ &= (x+y+z)((x+y)^2-(x+y)z+z^2)-3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-yz+z^2-3xy) \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx). \end{aligned}$$

13. Збирот на четири полиноми P_1, P_2, P_3, P_4 е $x^4-2x^3+4x^2-8x+13$. Полиномот P_1 е со степен 4, полиномот P_2 со степен 3, полиномот P_3 со степен 2 и полиномот P_4 со степен 1. Сите коефициенти на полиномот P_1 се еднакви, сите коефициенти на полиномот P_2 се еднакви и сите коефициенти на поиномот P_3 се еднакви. Определи го полиномот P_4.

Решение. *Прв начин*. Според услвот на задачата

$$P_1+P_2+P_3+P_4 = x^4-2x^3+4x^2-8x+13,$$

при што P_1 е единствен полином со степен 4. Понатаму, коефициентите на P_1 се еднакви, па затоа $P_1 = x^4+x^3+x^2+x+1$. Сега, заменуваме во горното равенство и по средувањето добиваме

$$P_2+P_3+P_4 = -3x^3+3x^2-9x+12.$$

Во последното равемнство само полиномот P_2 е со степен 3, па како сите негови коефициенти се еднакви добиваме $P_2 = -3x^3-3x^2-3x-3$. Сега заменуваме во горното равенство и добиваме

$$P_3+P_4 = 6x^2-6x+15.$$

Во последното равемнство само полиномот P_3 е со степен 2, па како сите негови коефициенти се еднакви добиваме $P_3 = 6x^2+6x+6$. Сега заменуваме во горното равенство и добиваме

$$P_4 = -12x+9.$$

Втор начин. Нека сите коефициенти на P_1 се еднакви на a, сите коефициенти на P_2 се еднакви на b, сите коефициенти на P_3 се еднакви на c и нека $P_4 = dx+e$. Според тоа

$$P_1+P_2+P_3+P_4=ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+$$
$$+(a+b+c+d)x+(a+b+c+e)$$
$$P_1+P_2+P_3+P_4=x^4-2x^3+4x^2-8x+13$$

од каде добиваме: $a+b+c=4$, $a+b+c+d=-8$ и $a+b+c+e=13$. Сега,

$$d=a+b+c+d-(a+b+c)=-8-8=-12,$$
$$e=a+b+c+e-(a+b+c)=13-4=9,$$

па затоа $P_4=-12x+9$.

14. Упрости го изразот

$$M=(y+2+\frac{8}{y-2}):\frac{y^2+4}{4-4y+y^2}.$$

Решение. Дадениот израз е определен за $y\neq 2$. Имаме:

$$M=(y+2+\frac{8}{y-2}):\frac{y^2+4}{4-4y+y^2}$$
$$=\frac{y^2-4+8}{y-2}:\frac{y^2+4}{(y-2)^2}$$
$$=\frac{y^2+4}{y-2}\cdot\frac{(y-2)^2}{y^2+4}=y-2.$$

15. Упрости го изразот: $\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

Решение. Дадениот израз има смисла за $a\neq -2$. Ако за $a\neq -2$ го трансформираме дадениот израз, добиваме

$$\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}=\frac{a(a^2-1)+a(a-1)}{a|a+2|-(a^2-4)}=\frac{a(a-1)(a+2)}{a|a+2|-(a-2)(a+2)}.$$

1) Ако $a<-2$, тогаш

$$\frac{a(a-1)(a+2)}{a|a+2|-(a-2)(a+2)}=\frac{a(a-1)(a+2)}{-a(a+2)-(a-2)(a+2)}=\frac{a(a-1)(a+2)}{-(a+2)(a+a-2)}=-\frac{a}{2}.$$

2) Ако $a>-2$, тогаш

$$\frac{a(a-1)(a+2)}{a|a+2|-(a-2)(a+2)}=\frac{a(a-1)(a+2)}{a(a+2)-(a-2)(a+2)}=\frac{a(a-1)(a+2)}{(a+2)(a-a+2)}=\frac{a(a-1)}{2}.$$

Конечно, за $a<-2$ вредноста на дадениот израз е $-\frac{a}{2}$, а за $a>-2$ неговата вредност е $\frac{a(a-1)}{2}$.

16. Ако $ac+bd-ad-bc=68$ и $c-d=4$, пресметај $a-b+c-d$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} &ac+bd-ad-bc=68,\\ &a(c-d)-b(c-d)=68,\\ &(c-d)(a-b)=68,\\ &4(a-b)=68,\\ &a-b=17, \end{aligned}$$

па затоа $a-b+c-d=17+4=21$.

17. Ако

$$a^3+12a^2+49a+69=0 \text{ и } b^3-9b^2+28b-31=0,$$

пресметај го збирот $a+b$.

Решение. Да ставиме $x=a+4$ и $y=b-3$. Тогаш

$$x^3+x+1=(a+4)^3+(a+4)+1=a^3+12a^2+49a+69=0,$$

$$y^3+y-1=(b-3)^3+(b-3)-1=b^3-9b^2+28b-31=0.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} &x^3+x+y^3+y=0,\\ &(x+y)(x^2-xy+y^2+1)=0,\\ &(x+y)((x-\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3y^2}{4}+1)=0. \end{aligned}$$

Сега, бидејќи $(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4}+1>0$, од последното равенство следува $x+y=0$, што значи $a+b=-1$.

18. Пресметај $x+y$ ако $x+y+xy=4$ и $x^2+y^2+6xy=12$.

Решение. Равенството $x^2+y^2+6xy=12$ е еквивалентно со равенството $(x+y)^2+4xy=12$. Понатаму, $xy=4-(x+y)$ и ако замение во претходното равенство, последователно добиваме

$$\begin{aligned} &(x+y)^2+4(4-(x+y))=12,\\ &(x+y)^2+16-4(x+y)=12,\\ &(x+y)^2-4(x+y)+4=0\\ &(x+y-2)^2=0,\\ &x+y-2=0. \end{aligned}$$

Значи, $x+y=2$.

19. Ако $x+\sqrt{xy}+y=9$ и $x^2+xy+y^2=27$, пресметај ја вредноста на изразот $x-\sqrt{xy}+y$.

Решение. Имаме

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y),$$

па затоа

$$x-\sqrt{xy}+y=\frac{x^2+xy+y^2}{x+\sqrt{xy}+y}=\frac{27}{9}=3.$$

20. Нека a и b се реални броеви такви што $a-b=2$. Докажи дека

$$a^3-b^3=8+6ab.$$

Решение. Имаме $a=b+2$, па затоа важи

$$\begin{aligned} a^3 &= b^3+6b^2+12b+8 \\ &= b^3+6b(b+2)+8 \\ &= b^3+6ab+8, \end{aligned}$$

од каде следува $a^3-b^3=8+6ab$.

21. Ако $x+\frac{1}{x}=a$, пресметај ја вредноста на изразот

$$M=\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{x^4+1}{x^2}+\frac{x^2+1}{x}.$$

Решение. Од $x+\frac{1}{x}=a$ следува $\frac{x^2+1}{x}=a$. Понатаму,

$$\frac{x^4+1}{x^2}=(\frac{x^2+1}{x})^2-2=a^2-2,$$

$$\frac{x^8+1}{x^4}=(\frac{x^4+1}{x^2})^2-2=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2,$$

па затоа

$$M=a^4-4a^2+2+a^2-2+a=a^4-3a^2+a.$$

22. Докажи дека за $a\neq 1$ важи

$$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}=\frac{a+2}{a-1}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}=\frac{a^3+2a^2-4a^2-8a+13a+26}{a^3-a^2-4a^2+4a+13a-13}$$
$$=\frac{a^2(a+2)-4a(a+2)+13(a+2)}{a^2(a-1)-4a(a-1)+13(a-1)}$$
$$=\frac{(a+2)(a^2-4a+13)}{(a-1)(a^2-4a+13)}$$
$$=\frac{a+2}{a-1},$$

што и требаше да се докаже.

23. Ако $p\neq 2$, докажи дека

$$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-2p^2+8p}{p^2+2p+6}=p\,.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-2p^2+8p}{p^2+2p+6}=\frac{p^3+2p^2+2p^2+4p+6p+12}{p^3+2p^2-3p^2-6p+8p+16}\cdot\frac{p(p^2-2p+8)}{p^2+2p+6}$$
$$=\frac{p^2(p+2)+2p(p+2)+6(p+2)}{p^2(p+2)-3p(p+2)+8(p+2)}\cdot\frac{p(p^2-2p+8)}{p^2+2p+6}$$
$$=\frac{(p+2)(p^2+2p+6)}{(p+2)(p^2-3p+8)}\cdot\frac{p(p^2-2p+8)}{p^2+2p+6}=p.$$

24. Ако x,y,z се различни меѓу себе броеви такви што

$$x^2-y=y^2-z=z^2-x\,,$$

определи ја вредноста на изразот:

$$(x+y+z+1)(y+z+1)(z+x+1)\,.$$

Решение. Од условот непосредно следува

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=y-z$, т.е. $(x-y)(x+y)=y-z$,

$y^2-z^2=(y-z)(y+z)=z-x$, т.е. $(y-z)(y+z)=z-x$,

$z^2-x^2=(z-x)(z+x)=x-y$, т.е. $(z-x)(z+x)=x-y$.

Ако на двете страни на горните равенства соодветно додадеме $x-y,\ y-z,\ z-x$, добиваме

$$(x-y)(x+y+1)=x-z,$$
$$(y-z)(y+z+1)=y-x,$$
$$(z-x)(z+x+1)=z-y.$$

Конечно, со множење на последните три равенства, по скратувањето

со $(x-y)(y-z)(z-x)$, добиваме

$$(x+y+z+1)(y+z+1)(z+x+1)=-1.$$

25. Нека x, y, z се ненултри реални броеви такви што $x+y+z=2025$ и $xy+yz+zx=xyz$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y} &= \frac{xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)}{xyz}\\ &= \frac{xy(2025-z)+yz(2025-x)+zx(2025-y)}{xyz}\\ &= \frac{2025(xy+yz+zx)-3xyz}{xyz}\\ &= \frac{2025xyz-3xyz}{xyz}=2022.\end{aligned}$$

26. Нека $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=\frac{19}{20}$. Пресметај го збирот $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$.

Решение. Нека $A=\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}$ и $X=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$. Тогаш

$$\begin{aligned}A+2X &= \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}+2\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)\\ &= \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}+\frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}\\ &= \frac{a+2}{a+2}+\frac{b+2}{b+2}+\frac{c+2}{c+2}=3,\end{aligned}$$

па затоа $2X=3-A$, т.е. $2X=3-\frac{19}{20}$, од каде добиавме $X=\frac{41}{20}$.

27. Дадени се реалните бреви $x_1, x_2, ..., x_{2022}$ кои се различни од 0 и -1. Ако

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_{2022}}=2022,$$

пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_2}}+...+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{2022}}}.$$

Решение. Да означиме

$$A=\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_{2022}} \text{ и } B=\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_2}}+...+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{2022}}}.$$

Бидејќи за секој реален број z важи $\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{z}{1+z}$, добиваме

$$B=\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\ldots+\frac{x_{2022}}{1+x_{2022}}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}A+B&=\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_{2022}}+\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\ldots+\frac{x_{2022}}{1+x_{2022}}\\&=\frac{1+x_1}{1+x_1}+\frac{1+x_2}{1+x_2}+\ldots+\frac{1+x_{2022}}{1+x_{2022}}\\&=2022\end{aligned}$$

и како $A=2022$, добиваме $B=0$.

28. Ако $x,y,z>1$ и

$$\begin{cases}xy^2-y^2+4xy+4x-4y=4004,\\xz^2-z^2+6xz+9x-6z=1009,\end{cases}\qquad(1)$$

определи ја вредноста на изразот

$$A=xyz+3xy+2xz-yz+6x-3y-2z.$$

Решение. Имаме

$$A-6=(x-1)(y+2)(z+3).$$

Понатаму, равенствата (1) може да се запишат како:

$$\begin{cases}xy^2-y^2+4xy+4x-4y-4=400,\\xz^2-z^2+6xz+9x-6z-9=1000,\end{cases}$$

односно

$$\begin{cases}(x-1)(y+2)^2=4000,\\(x-1)(z+3)^2=1000,\end{cases}$$

Тогаш

$$\begin{aligned}(A-6)^2&=(x-1)^2(y+2)^2(z+3)^2\\&=(x-1)(y+2)^2(x-1)(z+3)^2\\&=4000\cdot1000\\&=4000000.\end{aligned}$$

Според тоа, $A-6=\pm2000$. Но, од $x,y,z>1$ следува $A-6>0$, па затоа $A-6=2000$, односно $A=2006$.

29. Ако $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=2023$ за вредности на x,y,z при кои именителите на трите дропки се различни од нула, да се определи вредноста

на изразот:

$$A=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(x+y-z)^2}{x+y}.$$

Решение. Ако го искористиме равенството $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=2023$, добиваме

$$\begin{aligned}A-2023&=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(x+y-z)^2}{x+y}-\frac{x^2}{y+z}-\frac{y^2}{z+x}-\frac{z^2}{x+y}\\&=\frac{(y+z-x)^2-x^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2-y^2}{z+x}+\frac{(x+y-z)^2-z^2}{x+y}\\&=\frac{(y+z-2x)(y+z)}{y+z}+\frac{(z+x-2y)(z+x)}{z+x}+\frac{(x+y-2z)(x+y)}{x+y}\\&=y+z-2x+z+x-2y+x+y-2z=0,\end{aligned}$$

па затоа $A=2023$.

4. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот $A=(2ab-a^2-b^2):\frac{a-b}{a+b}$, за $a=\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{7}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A&=(2ab-a^2-b^2):\tfrac{a-b}{a+b}=-(a-b)^2:\tfrac{a-b}{a+b}\\ &=-(a-b)^2\cdot\tfrac{a+b}{a-b}=(b-a)(b+a)\\ &=b^2-a^2. \end{aligned}$$

Заменуваме $a=\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{7}$ во A и добиваме $A=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2=1$.

2. Пресметај ја вреднста на изразот: $\frac{(\sqrt{666}+\sqrt{888})^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{666}+\sqrt{888})^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}&=\frac{(\sqrt{111\cdot 6}+\sqrt{111\cdot 8})^2-\sqrt{(111\cdot 6)^2+(111\cdot 8)^2}}{444}\\ &=\frac{(\sqrt{111}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{111}\cdot\sqrt{8})^2-\sqrt{111^2\cdot(6^2+8^2)}}{444}\\ &=\frac{111\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{8})^2-111\cdot\sqrt{(6^2+8^2)}}{111\cdot 4}\\ &=\frac{6+2\sqrt{48}+8-10}{4}=\frac{4+2\sqrt{3\cdot 16}}{4}\\ &=\frac{4+8\sqrt{3}}{4}=1+2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}-2\sqrt{3}+3$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \sqrt{4-2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+2}-2\sqrt{3}+3&=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}-\frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}-2\sqrt{3}+3\\ &=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}-\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-2^2}-2\sqrt{3}+3\\ &=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}+3=0. \end{aligned}$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\\&=\frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}+\frac{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\&=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}+\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}^2-1^2}\\&=\frac{2}{2-1}+\frac{2}{3-1}=2+1=3.\end{aligned}$$

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\&=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}^2-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1}\\&=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}\\&=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\&=2+1=3.\end{aligned}$$

5. Определи ги сите природни броеви a и b така што вредноста на изразот

$$p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$

е рационален број.

Решение. Имаме

$$p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}\ \Leftrightarrow\ p\sqrt{3}+p\sqrt{b}=\sqrt{2}+\sqrt{a}\ \Leftrightarrow\ p\sqrt{b}-\sqrt{a}=\sqrt{2}-p\sqrt{3}\,.$$

Последното равенство го квадрираме и добиваме

$$\begin{aligned}p^2b+a-2p\sqrt{ab}&=2+3p^2-2p\sqrt{6}\qquad\Leftrightarrow\\2p(\sqrt{ab}-\sqrt{6})&=p^2b+a-2-3p^2\in\mathbb{Q},\end{aligned}$$

од каде следува $\sqrt{ab}-\sqrt{6}=q\in\mathbb{Q}$, т.е. $\sqrt{ab}=q+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$. Ако го квадрираме последното равенство, добиваме

$$ab=6+q^2+2q\sqrt{6}\ \Leftrightarrow\ 2q\sqrt{6}=ab-6-q^2\in\mathbb{Q}\,,$$

што е можно само ако $q=0$. Затоа $\sqrt{ab}-\sqrt{6}=0$, односно $ab=6$. Можни се следниве случаи:

1) $a=1, b=6$ и тогаш $p=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\notin\mathbb{Q}$,

2) $a=2, b=3$ и тогаш $p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\notin\mathbb{Q}$,

3) $a=3, b=2$ и тогаш $p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1\in\mathbb{Q}$,

4) $a=6, =\mathbf{1}$ и тогаш $p=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Конечно, единствено решение е $a=3, b=2$.

6. Упрости го изразот:

$$w=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}-\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}\,.$$

Решение. Од $\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}>\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}$ следува $w>0$. Да ставиме $a=\sqrt{1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}$ и $b=\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}}$. Тогаш

$$a^2=1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}} \text{ и } b^2=1-1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}},$$

па затоа $a^2+b^2=2$. Од друга страна имаме

$$\begin{aligned} ab&=\sqrt{(1+\sqrt{-3+2\sqrt{3}})(1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}})}\\ &=\sqrt{1-\sqrt{-3+2\sqrt{3}}^2}=\sqrt{1-(-3+2\sqrt{3})}\\ &=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}\\ &=|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1. \end{aligned}$$

Сега,

$$w^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=2-(2\sqrt{3}-1)=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2,$$

па затоа $w=\sqrt{3}-1$.

7. Определи ги сите реални броеви x за кои важи:

$$\sqrt{\frac{x-7}{2015}}+\sqrt{\frac{x-6}{2016}}+\sqrt{\frac{x-5}{2017}}=\sqrt{\frac{x-2015}{7}}+\sqrt{\frac{x-2016}{6}}+\sqrt{\frac{x-2017}{5}}\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(\sqrt{\frac{x-7}{2015}}-\sqrt{\frac{x-2015}{7}})+(\sqrt{\frac{x-6}{2016}}-\sqrt{\frac{x-2016}{6}})+(\sqrt{\frac{x-5}{2017}}-\sqrt{\frac{x-2017}{5}})=0 \quad (1)$$

Забележуваме дека секој израз е од видот

$$A=\sqrt{\frac{x-a}{b}}-\sqrt{\frac{x-b}{a}}\,, \tag{2}$$

каде $a<b$ и $a+b=2022$. Понатаму, сите корени се определени за $x\geq 2017$, а изразот A е со ист знак како и изразот

$$B=\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{ax-a^2-bx+b^2}{ab}=\frac{(a-b)x-(a^2-b^2)}{ab}$$
$$=\frac{(a-b)(x-(a+b))}{ab}=\frac{(a-b)(x-2022)}{ab}.$$

Сега, заради $a<b$, имаме три случаи:

1) $2017\leq x<2022$, што значи $A>0$, па секој израз во заградите на (1) е позитивен, што значи дека за ниту еден ваков x не важи (1), т.е. не важи даденото равенство.
2) $x>2022$, што значи $A<0$, па секој израз во заградите на (1) е негативен, што значи дека за ниту еден ваков x не важи (1), т.е. не важи даденото равенство.
3) $x=2022$, што значи дека секој израз во заградите на (1) е еднаков на 0, што значи дека за $x=2022$ важи (1), односно тоа е единствено решение на дадената равенка.

5. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

1. Реши ја равенката

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)-1)-1=2.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)-1)-1=2,$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)-1)=3,$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)-1=6,$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1)=7,$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)-1=14,$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x-1)=15,$$
$$\tfrac{1}{2}x-1=30,$$
$$x=62.$$

2. Реши ја равенката

$$\frac{(3-22\cdot0,05)\cdot\frac{1}{19}}{9:180+x}=0,05.$$

Решение. Имаме

$$(3-22\cdot0,05)\cdot\tfrac{1}{19}=(3-1,1)\cdot\tfrac{1}{19}=1,9\cdot\tfrac{1}{19}=0,1 \text{ и } 9:180=0,05,$$

па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{0,1}{0,05+x}=0,05$$
$$0,05+x=\frac{0,1}{0,05}$$
$$x=2-0,05$$
$$x=1,95.$$

3. Реши ја равенката

$$((2-x):1,5+17,4:29):(25\cdot0,16)-0,05=0,4.$$

Решение. Последователно дадената равенка е еквивалентна со равенките

$$((2-x):1,5+0,6):4-0,05=0,4$$
$$((2-x):1,5+0,6):4=0,45$$
$$(2-x):1,5+0,6=0,45\cdot 4$$
$$(2-x):1,5+0,6=1,8$$
$$(2-x):1,5=1,8-0,6$$
$$(2-x):1,5=1,2$$
$$2-x=1,2\cdot 1,5$$
$$2-x=1,8$$
$$x=2-1,8$$
$$x=0,2.$$

4. Реши ја равенката

$$6,86:x-3\tfrac{1}{2}:(-\tfrac{3}{4})=5\cdot(-\tfrac{2}{3})-\tfrac{1}{3}\cdot 10,3$$

Решение. Имаме $-3\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4})=\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$ и

$$5\cdot(-\tfrac{2}{3})-\tfrac{1}{3}\cdot 10,3=10\cdot(-\tfrac{1}{3})-\tfrac{1}{3}\cdot 10,3=-\tfrac{1}{3}(10+10,3)=-\frac{20,3}{3},$$

па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$6,86:x+\frac{14}{3}=-\frac{20,3}{3}$$
$$6,86:x=-\frac{20,3}{3}-\frac{14}{3}$$
$$6,86:x=-\frac{34,3}{3}$$
$$x=-6,86\cdot\frac{3}{34,3}=-\frac{3}{5}.$$

5. Реши ја равенката: $\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{x+3}{4}}{1\frac{1}{5}}=\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{19}$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{x+3}{4}}{\frac{6}{5}}=\frac{5}{7}(\frac{6}{19}+\frac{13}{19}),$$
$$\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{x+3}{4}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{7},$$

$$\frac{6}{7}\cdot\frac{x+3}{4}=\frac{6}{7}-\frac{1}{7},$$
$$\frac{x+3}{4}=\frac{5}{7}:\frac{6}{7},$$
$$x+3=4\cdot\frac{5}{6},$$
$$x=\frac{10}{3}-3,$$
$$x=\frac{1}{3}.$$

6. Реши ја равенката

$$\frac{x(x+3)}{2}=x-\frac{(3x-1)(2-x)}{6}.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$3x(x+3)=6x-(3x-1)(2-x),$$
$$3x^2+9x=6x-6x+2+3x^2-x,$$
$$10x=2,$$
$$x=\frac{1}{5}.$$

7. Реши ја равенката

$$(2x-1)^2-x(10x+1)=x(1-x)(1+x)-(2-x)^3.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките:

$$4x^2-4x+1-10x^2-x=x(1-x^2)-(8-12x+6x^2-x^3),$$
$$-6x^2-5x+1=x-x^3-8+12x-6x^2+x^3,$$
$$-6x^2-5x+1=-6x^2+13x-8,$$
$$18x=9,$$
$$x=\frac{1}{2}.$$

8. Ако $a\oplus b=\frac{a+b}{a-b}$, реши ја равенката

$$(3\oplus x)\oplus 2=0.$$

Решение. Ако $a\oplus b=0$, тогаш $\frac{a+b}{a-b}=0$, па затоа од $(3\oplus x)\oplus 2=0$ следува $3\oplus x+2=0$, односно $\frac{3+x}{3-x}+2=0$, од каде наоѓаме $x=9$.

9. Реши ја равенката

$$(1-50a)x = 2013 + a,$$

каде $a = \frac{(-4^2)^3 \cdot (-27)^2}{(2 \cdot 6^2)^3}$.

Решение. Имаме

$$a = \frac{(-4^2)^3 \cdot (-27)^2}{(2 \cdot 6^2)^3} = -\frac{(2^2)^6 \cdot (3^3)^2}{2^3 \cdot (2 \cdot 3)^6} = -\frac{2^{12} \cdot 3^6}{2^9 \cdot 3^6} = -8$$

и равенката го добивам видот $401x = 2005$, од каде добиваме $x = 5$.

10. Ако $x : (-2) = -5 + 1 \cdot (-3)$ и $3 - y = 1{,}8 + 1{,}2 : (-3)$, определи ја вредноста на изразот $(y - x) : y$.

Решение. Имаме $x : (-2) = -8$, па затоа $x = 16$ и $3 - y = 1{,}4$, па затоа $y = 1{,}6$. Според тоа,

$$(y - x) : y = (1{,}6 - 16) : 1{,}6 = 1 - 10 = -9.$$

11. Пресметај го производот xy, ако

$$(5 - x) : (-6) = -1 \text{ и } 5 - y : (-6) = -1.$$

Решеиие. Имаме

$$\begin{aligned} &(5-x):(-6) = -1, \\ &5 - x = (-1) \cdot (-6), \\ &5 - x = 6, \\ &x = -1, \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &5 - y : (-6) = -1, \\ &y : (-6) = 5 + 1 \\ &y = 6 \cdot (-6), \\ &y = -36, \end{aligned}$$

па затоа $xy = (-1) \cdot (-36) = 36$.

12. Определи го производот $x(x - y)$ ако

$$1{,}1(x - 3{,}3) = 1{,}43 \text{ и } 1{,}1y - 3{,}3 = 1{,}43.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} &1{,}1(x-3{,}3) = 1{,}43 \\ &x - 3{,}3 = 1{,}43 : 1{,}1 \\ &x - 3{,}3 = 1{,}3 \\ &x = 4{,}6 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &1{,}1y - 3{,}3 = 1{,}43 \\ &1{,}1y = 3{,}3 + 1{,}43 \\ &y = 4{,}73 : 1{,}1 \\ &y = 4{,}3 \end{aligned}$$

па затоа

$$x(x - y) = 4{,}6(4{,}6 - 4{,}3) = 4{,}6 \cdot 0{,}3 = 1{,}38.$$

13. Реши ја равенката

$$45 : x - (-2) \cdot (-6) = -4 \cdot 5\tfrac{1}{4}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} &45 : x - (-2) \cdot (-6) = -4 \cdot 5\tfrac{1}{4}, \\ &45 : x - 12 = -4 \cdot \tfrac{21}{4}, \\ &45 : x - 12 = -21, \\ &45 : x = -9, \\ &x = -5. \end{aligned}$$

14. Ако $a = (9{,}8 : 2 + 9 : 0{,}3) \cdot 0{,}1 + 0{,}01$ и $b = (4{,}9 \cdot 9 - 0{,}9 \cdot 46) : 0{,}5$ реши ја равенката $b : x + 1 = 2a$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a &= (9{,}8 : 2 + 9 : 0{,}3) \cdot 0{,}1 + 0{,}01 \\ &= (4{,}9 + 30) \cdot 0{,}1 + 0{,}01 \\ &= 3{,}49 + 0{,}01 \\ &= 3{,}5 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} b &= (4{,}9 \cdot 9 - 0{,}9 \cdot 46) : 0{,}5 \\ &= (4{,}9 \cdot 9 - 4{,}6 \cdot 9) : 0{,}5 \\ &= ((4{,}9 - 4{,}6) \cdot 9) : 0{,}5 \\ &= 5{,}4. \end{aligned}$$

Сега, равенката е $5{,}4 : x + 1 = 7$, од каде добиваме $5{,}4 : x = 6$, односно $x = 5{,}4 : 6 = 0{,}9$.

15. По непознатата x реши ја равенката $ac + bx = 174$, ако

$$\begin{aligned} a &= 12{,}9 \cdot 15 + 18 \cdot 12{,}9 + 17{,}1 \cdot 15 + 18 \cdot 17{,}1, \\ b &= 125 \cdot 4{,}8 + 3{,}1 \cdot 82 + 3{,}1 \cdot 43 - 125 \cdot 6{,}7, \\ c &= (0{,}96 \cdot 0{,}36) : (0{,}48 \cdot 7{,}2). \end{aligned}$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a &= 12{,}9 \cdot 15 + 18 \cdot 12{,}9 + 17{,}1 \cdot 15 + 18 \cdot 17{,}1 \\ &= 12{,}9 \cdot (15 + 18) + 17{,}1 \cdot (15 + 18) = 12{,}9 \cdot 33 + 17{,}1 \cdot 33 \\ &= (12{,}9 + 17{,}1) \cdot 33 = 30 \cdot 33 = 990, \\ b &= 125 \cdot 4{,}8 + 3{,}1 \cdot 82 + 3{,}1 \cdot 43 - 125 \cdot 6{,}7 \\ &= 3{,}1 \cdot (82 + 43) - 125 \cdot (6{,}7 - 4{,}8) = 3{,}1 \cdot 125 - 125 \cdot 1{,}9 \\ &= 125 \cdot (3{,}1 - 1{,}9) = 125 \cdot 1{,}2 = 150, \\ c &= (0{,}96 \cdot 0{,}36) : (0{,}48 \cdot 7{,}2) \\ &= (0{,}96 : 0{,}48) \cdot (0{,}36 : 7{,}2) \\ &= 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1. \end{aligned}$$

Значи,

$$990 \cdot 0{,}1 + 150x = 174,$$

од каде добиваме $x = \frac{1}{2}$.

16. Пресметај ја вредноста на изразот $A = \frac{|a-x|}{3} - \frac{|-a+2x|}{2}$, каде

$$a = \frac{-5:(-\frac{1}{7})+2{,}1:(-0{,}3)}{5:(-\frac{1}{3})-2:(-0{,}25)},$$

а x е решение на равенката $-3\frac{1}{3} \cdot 1{,}2 - x = -3{,}25 \cdot 1\frac{3}{13} - 6$.

Решение. Имаме

$$a = \frac{-5:(-\frac{1}{7})+2{,}1:(-0{,}3)}{5:(-\frac{1}{3})-2:(-0{,}25)} = \frac{-5\cdot(-7)-21:3}{-15+8} = \frac{35-7}{-7} = -4.$$

Ја решаваме равенката:

$$\begin{aligned} -\tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{12}{10} - x &= -3\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{16}{13} - 6, \\ -4 - x &= -\tfrac{13}{4} \cdot \tfrac{16}{13} - 6, \\ -4 - x &= -4 - 6, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Според тоа, $A = \frac{|-4-6|}{3} - \frac{|4+12|}{2} = \frac{10}{3} - 8 = -4\frac{2}{3}$.

17. Реши ја равенката

$$\frac{3x+2}{x} - \frac{2x+10}{x+4} + \frac{4}{x^2+4x} = 1.$$

Решение. Равенката има смисол за $x(x+4) \neq 0$, т.е. $x \neq 0, -4$. При овој услов дадената равенка последователно е еквивалетна со равенките:

$$\begin{aligned} &\tfrac{3x+2}{x} - \tfrac{2x+10}{x+4} + \tfrac{4}{x(x+4)} = 1, \\ &(3x+2)(x+4) - x(2x+10) + 4 = x(x+4), \\ &3x^2 + 12x + 2x + 8 - 2x^2 - 10x + 4 = x^2 + 4x, \\ &0 \cdot x = -12. \end{aligned}$$

Последната равенка нема решение, што значи дека и дадената равенка нема решение.

18. Бројот 5^{2013} запиши го како збир на пет последователни природни броја.

Решение. Ако бараните броеви се $x-2, x-1, x, x+1, x+2$, тогаш

$$x-2+x-1+x+x+1+x+2=5^{2013},$$

од каде добиваме $5x=5^{2013}$, т.е. $x=5^{2012}$. Значи, бараните броеви се

$$5^{2012}-2, 5^{2012}-1, 5^{2012}, 5^{2012}+1, 5^{2012}+2.$$

19. Збирот на педесет природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот број е за 5 поголем од третиот, ... , педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најголемиот и најмалиот собирок во дадениот збир.

Решение. Нека x е првиот собирок. Тогаш вториот собирок е $x+5$, третиот е $x+5+5=x+2\cdot 5$, четвртиот е $x+2\cdot 5+5=x+3\cdot 5$, ..., педесеттиот собирок е $x+49\cdot 5$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
&x+(x+5)+(x+2\cdot 5)+(x+3\cdot 5)+\ldots+(x+49\cdot 5)=8625,\\
&50x+(5+2\cdot 5+3\cdot 5+\ldots+49\cdot 5)=8625,\\
&50x+5\cdot(1+2+\ldots+49)=8625,\\
&10x+1+2+\ldots+49=1725,\\
&10x+\tfrac{49\cdot(49+1)}{2}=1725,\\
&10x+1225=1725,\\
&10x=500,\\
&x=50.
\end{aligned}$$

Значи, најмалиот собирок е 50, а најголемиот собирок е еднаков на $50+49\cdot 5=295$.

20. Пресметај го збирот $x+y$, ако x е решение на равенката

$$\tfrac{x}{100}=\tfrac{5}{9}\cdot 17\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{5}{9},$$

а

$$y=120\cdot\tfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{1+2+3+4+5}+(13\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2})\cdot\tfrac{3}{5}+555.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&\tfrac{x}{100}=\tfrac{5}{9}\cdot(\tfrac{52}{3}+\tfrac{2}{3}),\\
&\tfrac{x}{100}=\tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{54}{3},\\
&x=100\cdot 10,\\
&x=1000
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y &= 120 \cdot \tfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{1+2+3+4+5} + (13\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}) \cdot \tfrac{3}{5} + 555 \\ &= 120 \cdot \tfrac{55}{15} + (\tfrac{27}{2} + \tfrac{3}{2}) \cdot \tfrac{3}{5} + 555 \\ &= 440 + \tfrac{30}{2} \cdot \tfrac{3}{5} + 555 \\ &= 440 + 9 + 555 \\ &= 1004. \end{aligned}$$

Според тоа, $x + y = 1000 + 1004 = 2014$.

21. Пресметај го збирот на целите негативни броеви кои се поголеми од решението на равенката

$$(-2) : (-0,25) - 25 : (x + 3) = 13.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} &(-2) : (-0,25) - 25 : (x + 3) = 13, \\ &8 - 25 : (x + 3) = 13, \\ &25 : (x + 3) = -5, \\ &x + 3 = 25 : (-5), \\ &x = -5 - 3 = -8. \end{aligned}$$

Значи, цели негативни броеви кои се поголеми од решението на дадената равенка се $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ и нивниот збир е еднаков на -28.

22. Реши ја равенката

$$2023 \cdot \frac{27\frac{2}{2023} - 17\frac{1}{2023}}{20 : 0,01 - 1\frac{1}{3}x} = \frac{2,023 : 0,0001 + 1}{148}.$$

Решение. Дадената равенка е определена за $20 : 0,01 - 1\frac{1}{3}x \neq 0$, односно за $x \neq 1500$. Понатаму, равенката последователно е еквивалентна на равенките:

$$2023 \cdot \frac{27\frac{2}{2023} - 17\frac{1}{2023}}{20 : 0,01 - 1\frac{1}{3}x} = \frac{2,023 : 0,0001 + 1}{148},$$

$$2023 \cdot \frac{10\frac{1}{2023}}{2000 - \frac{4}{3}x} = \frac{20230 + 1}{148},$$

$$2023 \cdot \frac{\frac{20231}{2023}}{2000 - \frac{4}{3}x} = \frac{20231}{148},$$

$$\frac{20231}{2000-\frac{4}{3}x}=\frac{20231}{148},$$
$$2000-\frac{4}{3}x=148,$$
$$\frac{4}{3}x=1852,$$
$$x=1389.$$

23. За кои вредности на x изразот $(x+1)^2(13-x)$ е за 18 помал од изразот $(x-1)^2(9-x)$.

Решение. Од условот на задачата следува равенката

$$(x+1)^2(13-x)+18=(x-1)^2(9-x).$$

Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките:

$$(x+1)^2(4+9-x)+18-(x-1)^2(9-x)=0,$$
$$(9-x)((x+1)^2-(x-1)^2)+4(x+1)^2+18=0,$$
$$4x(9-x)+4x^2+8x+4+18=0,$$
$$36x-4x^2+4x^2+8x+22=0,$$
$$44x=-22,$$
$$x=-\frac{1}{2}.$$

24. Збирот на три петцифрени броеви од видот $\overline{mat31}, \overline{mat41}$ и $\overline{mat51}$ е еднаков на 202023. Пресметај го збирот $m+a+t$.

Решение. Имаме,

$$\overline{mat31}+\overline{mat41}+\overline{mat51}=202013.$$
$$\overline{mat00}+31+\overline{mat00}+41+\overline{mat00}+51=202023,$$
$$3\cdot 100\cdot\overline{mat}=202023-123$$
$$\overline{mat}=201900:300$$
$$\overline{mat}=673.$$

Според тоа, $m+a+t=6+7+3=16$.

25. Реши ја равенката

$$\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{9}=\frac{9x^2-24x^3+6}{27}.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со ра-

венките

$$\frac{1}{3}(x^2-4x+4)-\frac{8x^3-1}{9}=\frac{9x^2-24x^3+6}{27},$$
$$9x^2-36x+36-24x^3+3=9x^2-24x^3+6,$$
$$36x=33,$$
$$x=\frac{11}{12}.$$

26. Реши ја равенката

$$\frac{6x+5}{4x+3}-\frac{7-3x}{3-4x}=\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\frac{6x+5}{4x+3}-\frac{7-3x}{3-4x}=\frac{12x^2+30x-21}{(4x-3)(3x+3)}$$

и множеството допустливи вредности е $x\neq\pm\frac{3}{4}$. По ослободувањето од именителите ја добиваме равенката $9x=27$, чие решение е $x=3$ и тоа е решение на почетната равенка.

27. Определи го збирот на решенијата на равенката

$$||x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}|=\sqrt{5}.$$

Решение. Имаме, $|x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}=\sqrt{5}$ или $|x-\sqrt{5}|-\sqrt{2}=-\sqrt{5}$.

Во првиот случај е $|x-\sqrt{5}|=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, па затоа $x-\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ или $x-\sqrt{5}=-\sqrt{5}-\sqrt{2}$, т.е. $x=2\sqrt{5}+\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}$.

Во вториот случај е $|x-\sqrt{5}|=\sqrt{2}-\sqrt{5}<0$, па во овој случај немаме решение.

Значи, равенката има две решенија $x_1=2\sqrt{5}+\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$, па бараниот збир е $x_1+x_2=2\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{5}$.

28. Реши ја равенката $|4-|x||=A$, каде $A=\frac{(-2)^{2013}+5\cdot 2^{2012}}{2^{2011}+4^{1005}}$.

Решение. Имаме, $A=\frac{(-2)^{2013}+5\cdot 2^{2012}}{2^{2011}+4^{1005}}=\frac{2^{2012}(-2+5)}{2^{2010}(2+1)}=4$, па затоа равенката го добива видот $|4-|x||=4$. Последната равенка е еквивалентна на равенките $4-|x|=4$ или $4-|x|=-4$. Од овие равенки ги добиваме решенијата $x_1=0$, $x_2=8$ и $x_3=-8$.

29. Реши ја равенката

$$|x+|2x-|3x|||=2021.$$

Решение. Ако $x>0$, тогаш последователно дадената равенка е еквивалентна со равенките

$$|x+|2x-|3x|||=2021,$$
$$|x+|2x-3x||=2021,$$
$$|x+x|=2021,$$
$$2x=2021,$$
$$x=\frac{2021}{2}.$$

Ако $x<0$, тогаш последователно дадената равенка е екви-валентна со равенките

$$|x+|2x-|3x|||=2021,$$
$$|x+|2x+3x||=2021,$$
$$|x-5x|=2021,$$
$$-4x=2021,$$
$$x=-\frac{2021}{4}.$$

Јасно, $x=\frac{2021}{2}$ и $x=-\frac{2021}{4}$ се решенија на дадената равенка.

30. Реши ја равенката

$$|2x+21|-|x-20|=2021.$$

Решение. Бидејќи

$$|2x+21|=\begin{cases}2x+21, & x\geq -10,5\\ -2x-21, & x<-10,5\end{cases} \text{ и } |x-20|=\begin{cases}x-20, & x\geq 20\\ -x+20, & x<20\end{cases}$$

разликуваме три случаи:

1) За $x\geq 20$ ја добиваме равенката $2x+21-x+20=2021$, чие решение е $x=1980$ и тоа е решение на почетната равенка.
2) За $-10,5\leq x<20$ ја добиваме равенката $-2x-21-x+20=2021$ чие решение е $x=-\frac{2022}{3}$. Но, $-\frac{2022}{3}<-10,5$, па затоа во овој случај дадената равенка нема решение.
3) За $-10,4<x$ ја добиваме равенката $-2x-21-20+x=2021$ чие решение е $x=-2062$ и тоа е решение на почетната равенка.

Според тоа, дадената равенка има две решенија и тоа $x=1980$ и $x=-2062$.

31. Реши ја равенката

$$x|x-1|+|x|(x-1)=0.$$

Решение. Јасно, $x=0$ и $x=1$ се решенија на дадената равенка. Ако $x\neq 0$ и $x\neq 1$, тогаш равенката е еквивалентна со равенката

$$x|x-1|=-|x|(x-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad |\tfrac{x}{x-1}|=-\tfrac{x}{x-1}.$$

Последната равенка е исполнета ако и само ако $x(x-1)<1$, односно ако и само ако $x\in(0,1)$. Очигледно решенија на почетната равенка се сите броеви од интервалот $[0,1]$.

32. Реши ја равенката

$$2x-|5x+2|+5=0.$$

Решение. Ако $5x+2\geq 0$, т.е. $x\geq -\frac{2}{5}$, тогаш $|5x+1|=5x+2$ и равенката го добива видот $2x-(5x+2)+5=0$, од каде добиваме $-3x+3=0$, т.е. $x=1$ и тоа е решение, бидејќи $1\geq -\frac{2}{5}$

Ако $5x+2<0$, т.е. $x<-\frac{2}{5}$, тогаш $|5x+1|=-(5x+2)$ и равенката го добива видот $2x+(5x+2)+5=0$, од каде добиваме $7x+7=0$, т.е. $x=-1$ и тоа е решение, бидејќи $-1<-\frac{2}{5}$

Конечно, решенија на дадената равенка се $x=1$ и $x=-1$.

33. Реши ја равенката

$$|x-1|+|x-2|=1.$$

Решение. Ако $x\in(-\infty,1]$, равенката го добива видот $-x+1-x+2=1$, па затоа $x=1$ е решение. Ако $x\in(1,2)$, равенката го добива видот $x-1-x+2=1$, т.е. $0\cdot x=0$, па затоа секој $x\in(1,2)$ е нејзино решение. Ако $x\in[2,+\infty)$, равенката го добива видот $x-1+x-2=1$, па затоа $x=2$ е решение.

Конечно, решение на равенката е секој $x\in[1,2]$.

34. Реши ја равенката

$$(ax-x-5)(ax-x+3)=0,$$

каде a е реален параметар.

Решение. Од дадената равенка добиваме

$$(a-1)x=5 \text{ или } (a-1)x=-3,$$

од каде добиваме дека за $a=1$ равенката нема решенија, а за $a\neq 1$ таа има две решенија $x=\frac{5}{a-1}$ и $x=\frac{-3}{a-1}$.

35. Определи го реалниот број a така што равенките

$$(2a-\tfrac{2}{3})x=a-\tfrac{x}{3}+4 \text{ и } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-x)=x-\tfrac{x+1}{2}$$

ќе бидат еквивалентни.

Решение. Решението на втората равенка е $x=\frac{3}{4}$, па затоа равенките ќе бидат еквивалентни ако $(2a-\frac{2}{3})\cdot\frac{3}{4}=a-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+4$, од каде добиваме $a=\frac{17}{2}$.

36. Реши ги равенките

$$(x+2)^2=(4x-1)^2 \text{ и } |10x+a|=6.$$

За кои вредости на параметарот a тие се еквивалентни.

Решение. Имаме

$$(x+2)^2=(4x-1)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2-(4x-1)^2=0 \Leftrightarrow (5x+1)(3-3x)=0,$$

што значи дека $x_1=1$ и $x_2=-\frac{1}{5}$ се решенија на првата равенка. За втората равенка имаме

$$|10x+a|=6 \Leftrightarrow 10x+a=6 \vee 10x+a=-6 \Leftrightarrow x_1=\tfrac{6-a}{10} \vee x_2=-\tfrac{6+a}{10}.$$

Равенките се еквивалентни за $a=-4$.

37. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$||ax-20|-2011|=11$$

има четири решенија, секое од кои е цел број.

Решение. Од $||ax-20|-2011|=11$ следува

$$|ax-20|-2011=11 \text{ или } |ax-20|-2011=-11,$$

односно

$$|ax-20|=2022 \text{ или } |ax-20|=2000.$$

Од $|ax-20|=2022$ следува

$$ax-20=2022 \text{ или } ax-20=-2022,$$

односно

$$ax=2042 \text{ или } ax=-2022. \qquad (1)$$

Од $|ax-20|=2000$ следува

$$ax-20=2000 \text{ или } ax-20=-2000,$$

односно

$$ax=2020 \text{ или } ax=-1980. \qquad (2)$$

За $a=0$ равенките (1) и (2) немаат решенија, а за $a\neq 0$ ги добиваме решенијата $x=\frac{2042}{a}, x=-\frac{2002}{a}, x=\frac{2020}{a}, x=-\frac{1980}{a}$. Овие решенија се целобројни кога a е заеднички делител на 2042, 2020, 2002 и 1980. Но, $\text{NZD}(2042,2020,2000,1980)=2$, па затоа можни вредности на a се $-2,-1,1$ и 2.

38. Реши ја равенката

$$\frac{x+a}{x+1}+\frac{x+2a}{1-x^2}=\frac{2x-a}{2x+2},$$

каде a е параметар.

Решение. Јасно, дефиниционата област на равенката е $x\neq\pm 1$. Се ослободуваме од именителите и добиваме

$$2(x-1)(x+a)-2(x+2a)-(2x-a)(x-1)=0,$$
$$2(x^2-x+ax-a)-2x-4a-(2x^2-ax-2x+a)=0,$$
$$2x^2-2x+2ax-2a-2x-4a-2x^2+ax+2x-a=0,$$
$$(3a-2)x=7a.$$

За $x=1$ добиваме $3a-2=7a$, од каде следува $a=-\frac{1}{2}$.

За $x=-1$ добиваме $2-3a=7a$, од каде следува $a=\frac{1}{5}$.

Значи, за $a\neq-\frac{1}{2}$, $a\neq\frac{1}{5}$ и $a\neq\frac{2}{3}$ равенката има решемие $x=\frac{7a}{3a-2}$. За $a=-\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{5}$ и $a=\frac{2}{3}$, равенката нема решение.

39. За кои вредности на параметарот a равенката

$$a^4x+a^3(3a+2)-\sqrt{5}=(a^3-4)(a^2+5a+2)-\sqrt{5}+16x$$

има бесконечно многу решенија.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(a^4-16)x+a^3(3a+2)-(a^3-4)(a^2+5a+2)=0.$$

За да равенката има бесконечно многу решенија, треба да е исполнето

$$a^4-16=0 \text{ и } a^3(3a+2)-(a^3-4)(a^2+5a+2)=0.$$

Имаме

$$a^4-16=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)(a+2)(a^2+4)=0,$$

па затоа $a=-2$ или $a=2$. Проверуваме дека $a=2$ е решение на равенката

$$a^3(3a+2)-(a^3-4)(a^2+5a+2)=0,$$

а дека $a=-2$ не е нејзино решение. Според тоа, само за $a=2$ дадената равенка има бесконечно многу решенија.

40. Нека a е цел број и нека равенката $|2ax-x-b|=b$ има две решенија x_1 и x_2, кои се цели броеви. Ако збирот на целите броеви од интервалот (x_1,x_2) е 15, докажи дека b е непарен број.

Решение. *Прв начин.* Јасно, $b\geq 0$. Решенијата на дадената равенка се $x=0$ и $x=\frac{2b}{2a-1}$. Бидејќи едното решение е 0, а збирот на целите броеви од интервалот (x_1,x_2) е 15, заклучуваме дека $x_1=0$ и $x_2=\frac{2b}{2a-1}>0$. Понатаму, од $15=1+2+3+4+5$ и x_2 е цел број, заклучуваме дека $x_2=6$. Според тоа, $\frac{2b}{2a-1}=6$, од каде добиваме $b=3(2a-1)$, т.е. b е непарен број.

Втор начин. Јасно, $b\geq 0$. Очигледно $x=0$ е едно решение на равенката, па како при првиот начин на решавање заклучуваме дека второто решение е $x_2=6$. Да претпоставиме дека $b=2k$, за некој $k\in\mathbb{Z}$. Тогаш со замена во равенката добиваме $|12a-6-2k|=2k$, т.е. $|6a-3-k|=k$. Од последното равенство следува $6a-3-k=-k$ или $6a-3-k=k$. Во првиот случај добиваме $a=\frac{1}{2}$, што противречи на претпоставката дека a е цел број, а во вториот случај добиваме $3(2a-1)=2k$, што не е можно бидејќи левата страна е непарен, а десната страна е парен број. Конечно, од добиената противречност следува дека b е непарен број.

41. Реши ја равенката

$$\frac{x^3-ab}{4}+(2x^2+a)(x+2)-x(\frac{9}{4}x^2-3ax+a^2)=x^2(4+3a),$$

каде a и b се реални параметри.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$x^3 - ab + (2x^2 + a)(4x + 8) - x(9x^2 - 12ax + 4a^2) = x^2(16 + 12a),$$
$$x^3 - ab + 8x^3 + 4ax + 16x^2 + 8a - 9x^3 + 12ax^2 - 16x^2 - 12ax^2 = 0,$$
$$-ab + 4ax + 8a - 4a^2x = 0,$$
$$4a(1-a)x = a(b-8).$$

Решението на последната равенка е $x = \frac{b-8}{4(1-a)}$, за $a \neq 0$ и $b \neq 0$, секој реален број x ако $a = 0$ или $a = 1, b = 8$ и задачата нема решение ако $a = 1$ и $b \neq 8$.

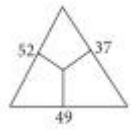
42. Реши ја равенката $\frac{p+x}{q} - 1 = \frac{qx}{p}$, каде p и q се параметри.

Решение. Равенката има смисла за $p \neq 0, q \neq 0$. При овие услови дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките:

$$p^2 + px - pq = q^2x,$$
$$(p - q^2)x = pq - p^2.$$

1) Ако $p - q^2 = 0$ и $pq - p^2 = 0$, тогаш решение на последната равенка е секој реален број x. Тоа е можно ако $p = q = 0$ или $p = q = 1$. Но, $p \neq 0, q \neq 0$, па затоа за $p = q = 1$ решение на дадената равенка е секој реален број x.
2) Ако $p - q^2 = 0$, а $pq - p^2 \neq 0$, равенката нема решение. Од $p - q^2 = 0$, т.е. $p = q^2$ следува $q^3(1-q) \neq 0$. Но, $q^3(q-1) \neq 0$ за $q \neq 0$ и $q \neq 1$. Според тоа, за $p = q^2$ и $q \neq 1$ равенката нема решение.
3) За $p - q^2 \neq 0$ равенката има единствено решение $x = \frac{pq - p^2}{p - q^2}$.

43. Во четириаголничињата на цртежот десно запиши броеви така што бројот придружен на секоја страна на триаголникот ќе биде еднаков на збирот на двата броја од четириаголничињата чии страни се делови од таа страна.

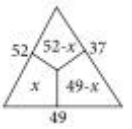


Решение. *Прв начин.* Ако непознатите броеви x, y, z ги придружиме на четириаголниците, го добиваме цртежот десно. Оттука го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x+y=52, \\ y+z=49, \\ x+z=37. \end{cases}$$

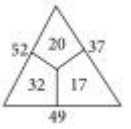
Ако ги собереме равенките на системот и добиената равенка ја поделиме со 2, ја добиваме равенката $x+y+z=69$. Сега, од последната равенка ги одземаме равенките на системот и добиваме дека решението на горниот систем е $x=20,\ y=32,\ z=17$.

Втор начин. Едниот четириаголник да го означиме со непозната x и со помош на неа да ги определиме вредностите на преостанатите четириаголници (цртеж десно). Сега ја решаваме равенката

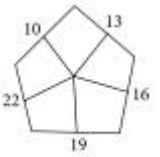


$$(52-x)+(49-x)=37$$

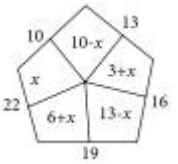
и добиваме $x=32$. Конечно, заменуваме за x и го добиваме правилното пополнување на дадената фигура.



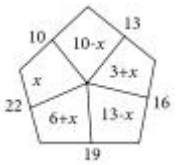
44. Во четириаголничињата на цртежот десно запиши броеви така што бројот придружен на секоја страна на петаголникот ќе биде еднаков на збирот на двата броја од четириаголничињата чии страни се делови од таа страна.



Решение. На еден од четириаголниците му придружуваме непознат број x и со помош на x да ги определиме вредностите на преостанатите четириаголници. (цртеж десно). Сега ја решаваме равенката

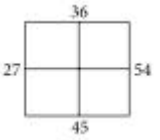


$$x+(6+x)=22$$

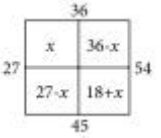


од каде добиваме $x=8$. Сега, заменуваме за x и со тоа го добиваме пополнетиот петаголник (види цртеж лево).

45. Во четириаголничињата на цртежот десно запиши броеви така што бројот придружен на секоја страна на квадратот ќе биде еднаков на збирот на двата броја од четириаголничињата чии страни се делови од таа страна.



Решение. На еден од четириаголниците му придружуваме непознат број x и со помош на x да ги определиме вредностите на преостанатите четириаголни-



ци. (цртеж десно). Оттука ја добиваме равенката

$$(27-x)+(18+x)=45,$$

која е еквивалентна со равенката $0\cdot x=0$. Решение на последната равенка е секој реален број, што значи дека дадениот квадрат може да се пополни на бесконечно многу начини. Определи барем три различни пополнувања на дадениот квадрат.

46. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x:y:z=3:5:9, \\ x+y+z=34. \end{cases}$$

Решение. Од првите две равенки следува $x=3k,\ y=5k,\ z=9k$ и ако замениме во последната равенка, добиваме $3k+5k+9k=34$, односно $k=2$. Значи, решението на дадениот систем е $x=6,\ y=10,\ z=19$.

47. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{2x-3y}{4}-\frac{2y-3x}{2}=1, \\ -2x+y=2. \end{cases}$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{cases} \frac{2x-3y}{4}-\frac{2y-3x}{2}=1, \\ -2x+y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-7y=4, \\ -2x+y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x=18, \\ -3y=12, \end{cases}$$

од каде добиваме $x=-3,\ y=-4$.

48. Збирот на три природни броја е 100. Ако првиот број го поделиме со вториот се добива количник 1 и остаток еднаков на третиот број. Вториот број е за 10 поголем од третиот број. Колку е производовот на овие броеви?

Решение. Нека броевите се a,b и c. Од условот на здачата следува системот равенки

$$\begin{cases} a=b\cdot 1+c, \\ c=b-10, \\ a+b+c=100. \end{cases}$$

Според тоа, $c=b-10$ и $a=2b-10$, па затоа $2b-10+b+b-10=100$, од каде добиваме $b=30$. Значи, броевите се $a=50$, $b=30$ и $c=20$, па нивниот производ е $abc=50\cdot 30\cdot 20=30000$.

49. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3x+y+z+u=2a, \\ x+3y+z+u=4b, \\ x+y+3z+u=2b, \\ x+y+z+3u=4a. \end{cases}$$

Решение. Ги собираме равенките на системот и добиената равенка ја делиме со 6, по што добиваме

$$x+y+z+u=a+b\,.$$

Сега, ако добиената равенка последователно ја одземе од равенките на системот, го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x=a-b, \\ 2y=3b-a, \\ 2z=b-a, \\ 2u=3a-b. \end{cases}$$

Решението на последниот систем, односно на почетниот систем е

$$x=\tfrac{a-b}{2},\ y=\tfrac{3b-a}{2},\ z=\tfrac{b-a}{2},\ u=\tfrac{3a-b}{2}\,.$$

50. Пресметај го збирот $2x+y$, каде x и y се такви што изразот $4x^2+13y^2-12xy-4y+2$ прима најмала можна вредност.

Решение. Имаме

$$4x^2+13y^2-12xy-4y+2=(2x-3y)^2+(2y-1)^2+1\,.$$

Дадениот израз прима најмала вредност ако и само ако $2x-3y=0$ и $2y-1=0$, т.е. ако и само ако $y=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{3}{4}$. Затоа

$$2x+y=2\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}=2\,.$$

51. Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c$ ако

$$a^2+2b^2+c^2=2ab+4b+6c-13\,.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со равенството

$$(a-b)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=0\,.$$

Собирците на левата страна се ненегативни, па затоа нивниот збир е еднаков на нула ако и само ако сите три се еднакви на нула, од каде добиваме $a=b=2$ и $c=3$. Конечно, $a+b+c=2+2+3=7$.

52. а) Определи ги x и y за кои важи равенството

$$49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 13 = 0 .$$

б) Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A = 49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 16 .$$

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} 0 &= 49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 13 \\ &= 49x^2 + 28x + 4 + y^2 - 6y + 9 \\ &= (7x+2)^2 + (y-3)^2 . \end{aligned}$$

Понатаму, квадрат на реален број е ненегативен, па затоа збир на два квадрати е еднаков на нула ако и само ако и двата се еднакви на нула. Значи, $7x + 2 = y - 3 = 0$, од каде добиваме $x = -\frac{2}{7}$, $y = 3$.

б) Имаме

$$\begin{aligned} A &= 49x^2 + 28x + y^2 - 6y + 16 \\ &= 49x^2 + 28x + 4 + y^2 - 6y + 9 + 3 \\ &= (7x+2)^2 + (y-3)^2 + 3 \geq 3, \end{aligned}$$

бидејќи $(7x+2)^2 \geq 0$, $(y-3)^2 \geq 0$. Според тоа, најмалата вредност на дадениот израз е еднаква на 3.

53. Нека a, b, c се ненегатвни броеви такви што

$$\begin{cases} a(b+c) = 36, \\ b(c+a) = 50, \\ c(a+b) = 56. \end{cases}$$

Пресметај ја вредноста на производот abc.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases} ab + ac = 36, \\ bc + ba = 50, \\ ca + cb = 56. \end{cases} \qquad (1)$$

Ако ги собереме трите равенки последователно добиваме

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca) &= 142, \\ ab + bc + ca &= 71. \end{aligned}$$

Сега, ако од последната равенка ги одземеме редоследно трите равен-

ки од (1), соодветно добиваме $bc=35, ac=21, ab=15$. Ако ги помножиме последните три равенства, редоследно добиваме

$$ab\cdot ac\cdot bc=15\cdot 21\cdot 35,$$
$$a^2b^2c^2=3^2\cdot 5^2\cdot 7^2,$$
$$(abc)^2=105^2,$$

па како a,b,c се ненегативни броеви, добиваме $abc=105$.

54. Определи ги вредностите на параметрите a и b за кои системот

$$\begin{cases}7x-2ay=5,\\(4-5a)x-4by=7,\end{cases}$$

има решение $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{9}{5}$.

Решение. Заменуваме $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{9}{5}$ во дадениот систем и добиваме

$$\begin{cases}\frac{7}{5}+\frac{18a}{5}=5,\\ \frac{4-5a}{5}+\frac{4b\cdot 9}{5}=7,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}7+18a=5,\\4-5a+36b=35.\end{cases}$$

Од првата равенка наоѓаме $a=1$ и заменуваме во втората равенка, од каде добиваме $-1+36b=35$, т.е. $b=1$.

55. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}2x+(2-a)y=6,\\(a+1)x+y=3,\end{cases}$$

каде a е реален параметар. За кои вредности $a\neq 0$ системот има целобројни решенија?

Решение. Од втората равенка имаме $y=3-(a+1)x$ и ако замениме во првата равенка последователно добиваме

$$2x+(2-a)(3-(a+1)x)=6,$$
$$(2-2a+a^2-2+a)x=3a,$$
$$a(a-1)x=3a.$$

Ако $a\neq 0$ и $a\neq 1$ системот има единствено решение $x=\frac{3}{a-1}$ и $y=\frac{6}{1-a}$.

Ако $a=0$, тогаш равенката $a(a-1)x=a$ го прима видот $0\cdot x=0$ и нејзино решение е секој реален број x, па затоа системот има бесконечно многу решенија $x=t, y=3-(a+1)t, t\in\mathbb{R}$.

Ако $a=1$, тогаш равенката $a(a-1)x=a$ го прима видот $0\cdot x=1$ и таа

нема решение, што значи дека системот нема решение.

За да решенијата на равенката $x=\frac{3}{a-1}$ и $y=\frac{6}{1-a}$ се целобројни потребно и доволно е решението $x=\frac{3}{a-1}$ да е целобројно. Тоа значи, $a-1\,|\,3$, т.е. $a-1\in\{1,3,-1,-3\}$, односно $a\in\{2,4,0,-2\}$. Но, $a\neq 0$, па затоа $a\in\{2,4,-2\}$.

56. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n=1,\\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots.+nx_1=2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n+2x_1+3x_2+\ldots+nx_{n-1}=n. \end{cases}$$

Решение. Да означиме

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=s. \qquad (1)$$

Ако ги собереме сите равенки на системот и го земеме предвид (1), добиваме

$$s+2s+3s+\ldots+ns=1+2+3+\ldots+n,$$

од каде следува $s=1$. Ако од првата равенка ја одземеме втората, добиваме

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-nx_1=-1,$$

па од (1) следува $s-nx_1=-1$. Но, $s=1$, па затоа $nx_1=2$, односно $x_1=\frac{2}{n}$. Сега, ако од втората равенка ја одземеме третата, на потполно ист начин добиваме $x_2=\frac{2}{n}$. Продолжувајќи ја постапката се до претпоследната равенка од која ја одземаме последната, последователно добиваме $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{n-1}=\frac{2}{n}$. На крајот, ако од последната равенка ја одземеме првата добиваме $x_n=\frac{2-n}{n}$.

57. Определи го реалниот број $m\,(m\neq\frac{1}{2}, m\neq -2)$ така што графикот на линеарната функција

$$(m+2)x+(1-2m)y+2=0$$

на координатните оски отсекува отсечки со еднакви должини.

Решение. *Прв начин.* За $y=0$, добиваме $x=-\frac{2}{m+2}$, па $A(-\frac{2}{m+2},0)$ е точката во која функцијата ја сече $x-$оската. За $x=0$, добиваме

$y=-\frac{2}{1-2m}$, па $B(0,-\frac{2}{1-2m})$ е точката во која фунцијата ја сече $y-$оската. Градфикот на координатните оски отсекува отсечки со еднакви должини, ако $|-\frac{2}{m+2}|=|-\frac{2}{1-2m}|$, т.е. $|\frac{1-2m}{m+2}|=1$. Можни се два случаја и тоа:

1) $\frac{1-2m}{m+2}=1$, од каде добиваме $m=-\frac{1}{3}$,

2) $\frac{1-2m}{m+2}=-1$, од каде добиваме $m=3$.

Втор начин. Равенката на линеарната функција може да ја запишеме во видот $y=\frac{m+2}{2m-1}x+\frac{2}{2m-1}$. Според тоа, коефициентот на правецот е $k=\frac{m+2}{2m-1}$. Графикот на дадената линеарна функција отсекува на координатните оски отсечки со еднакви должини ако $k=1$ или $k=-1$. Сега, како во првиот начин наоѓаме $m=-\frac{1}{3}$ и $m=3$.

58. Дадена е функцијата $f(x)=3x-2$.

а) Определи ја функцијата $g(x)$ ако $f(2x-g(x))=-3(1+2m)x+34$.

б) Реши ја равенката $g(x)=(4m-1)x-4(m+1), m\in\mathbb{R}$.

Решение. а) Со замена $2x-g(x)$ наместо x во $f(x)=3x-2$ добиваме:

$$\begin{aligned}
&f(2x-g(x))=-3(1+2m)x+34,\\
&3(2x-g(x))-2=-3(1+2m)x+34,\\
&6x-3g(x)-2=-3(1+2m)x+34,\\
&-3g(x)=-3(1+2m)x-6x+36,\\
&g(x)=(1+2m)x+2x-12,\\
&g(x)=(3+2m)x-12.
\end{aligned}$$

б) Од условот $g(x)=(3+2m)x-12$ и решението под а) последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&(3+2m)x-12=(4m-1)x-4(m+1),\\
&(3+2m)x-(4m-1)x=12-4(m+1),\\
&(3+2m-4m+1)x=12-4m-4,\\
&(4-2m)x=8-4m,\\
&(2-m)x=2(2-m).
\end{aligned}$$

Сега, ако $m\neq 2$, тогаш равенката има единствено решение $x=2$, а ако $m=2$, тогаш решение на равенката е секој реален број x.

59. Определи ја вредноста на параметарот m за која правите

$$x+(2m+3y+m+6=0 \text{ и } (2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$$

се сечат на $y-$оската.

Решение. Равенките на правите запишани во експлиците облик се

$$y=-\frac{1}{2m+3}x-\frac{m+6}{2m+3}, m\neq-\frac{2}{3} \text{ и } y=-\frac{2m+1}{m-1}x-\frac{m-2}{m-1}, m\neq 1.$$

Бидејќи правите треба да се сечат на $y-$оската, тие за $x=0$ имаат еднакви вредности на y. Бидејќи за $x=0$ имаме $y=-\frac{m+6}{2m+3}$ и $y=-\frac{m-2}{m-1}$ Ја добиваме равенката $-\frac{m+6}{2m+3}=-\frac{m-2}{m-1}$, која последователно е еквивалентна на равенките

$$(m+6)(m-1)=(m-2)(2m+3),$$
$$m^2+5m-6=2m^2-m-6,$$
$$m^2-6m=0,$$
$$m(m-6)=0.$$

Решенија на последната равенка се $m=0$ и $m=6$. Според тоа, двете прави ќе се сечат на $y-$оската ако $m=0$ или $m=6$.

6. НЕЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1. Определи го производот на решенијата на равенката

$$x^2(2b+3) = 2b^3 + 3b^2,$$

каде b е позитивен параметар.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$x^2(2b+3) = b^2(2b+3),$$
$$x^2 = b^2, b \neq -\frac{3}{2}.$$

Бидејќи b е позитивен параметар, решенијата на последната равенка се $x_1 = b$ и $x_2 = -b$, па затоа производот на решенијата на дадената равенка е $x_1 x_2 = -b^2$.

2. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$|(-x-1)^2 - 2(x+4)| = 18.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$|x^2 - 7| = 18.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенкте

$$x^2 - 7 = -18 \text{ и } x^2 - 7 = 18.$$

Првата равенка нема решенија во множеството реални броеви, а додека втората равенка е еквивалентна на равенката $x^2 = 25$ чии решенија се $x_1 = -5$ и $x_2 = 5$.

Според тоа, решенија на почетната равенка се $x_1 = -5$ и $x_2 = 5$.

3. Едното решение на равенката

$$(x + a^2)(x - a + 5) = 0$$

е $x = 4$. Определи го другото решение.

Решение. Во равенката ставаме $x = 4$ и добиваме

$$(4 + a^2)(9 - a) = 0.$$

Бидејќи $4 + a^2 > 0$, од последната равенка следува $9 - a = 0$, т.е. $a = 9$.

Според тоа, равенката е

$$(x+81)(x-4)=0,$$

од каде добиваме $x+81=0$ и $x-4=0$, т.е. $x_1=-81$ и $x_2=4$.

4. Реши ја равенката

$$(n^2+16n+10)^2-14(n^2+16n+10)=6840.$$

Решение. Да ставиме $n^2+16n+10=x$. Тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&x^2-14x-6840=0,\\
&x^2-90x+76x-6840=0,\\
&x(x-90)+76(x-90)=0,\\
&(x-90)(x+76)=0,\\
&x_1=90,\ x_2=-76.
\end{aligned}$$

За $x_1=90$, добиваме $n^2+16n+10=90$, односно

$$\begin{aligned}
&n^2+16n-80=0,\\
&n^2+20n-4n-80=0,\\
&n(n+20)-4(n+20)=0,\\
&(n+20)(n-4)=0,\\
&n_1=-20,\ n_2=4.
\end{aligned}$$

За $x_2=-76$, добиваме $n^2+16n+10=-76$, односно

$$\begin{aligned}
&n^2+16n+80=0,\\
&(n+4)^2+64=0,
\end{aligned}$$

па како $(n+4)^2+64>0$ во овој случај немаме реални решенија.

5. Докажи, дека во множеството реални броеви равенката

$$x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$$

има само едно решение.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned}
&x^4(x+1)+2x^2(x+1)+(x+1)=0,\\
&(x+1)(x^4+2x^2+1)=0,\\
&(x+1)(x^2+1)^2=0.
\end{aligned}$$

Понатаму, $x^2+1\geq 1$, односно $(x^2+1)^2>1$, па во множеството реални броеви последната равенка е еквивалентна со равенката $x+1=0$, од каде добиваме дека единствено реално решение на дадената равенка е $x=-1$.

6. Ако $n=\frac{12^7-(-12)^6}{(2^3)^4\cdot 3^5}$, определи го бројот a, за кој важи $4\cdot 2^a=8^n$.

Решение. Имаме

$$n=\frac{12^7-(-12)^6}{(2^3)^4\cdot 3^5}=\frac{12^7-12^6}{2^{12}\cdot 3^5}=\frac{12^6(12-1)}{2^{12}\cdot 3^5}=\frac{11\cdot(2^2\cdot 3)^6}{2^{12}\cdot 3^5}=\frac{11\cdot 2^{12}\cdot 3^6}{2^{12}\cdot 3^5}=11\cdot 3=33,$$

па затоа $4\cdot 2^a=8^{33}$, од каде добиваме $2^2\cdot 2^a=(2^3)^{33}$, т.е. $2^{a+2}=2^{99}$. Значи, $a+2=99$, т.е. $a=97$.

7. Нека a и b се реални броеви такви што $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Определи ги сите можни вредности на изразот

$$A=a^2+2ab+b^2+2a^2b+2ab^2+a^2b^2.$$

Решение. Од $a-b=\frac{3}{2}$ следува

$$a^2-2ab+b^2=\frac{9}{4}, \text{ т.е. } a^2+b^2=\frac{9}{4}+2ab.$$

Заменуваме во $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{2}$ и добиваме $ab=\frac{9}{2}$. Понатаму, ако на двете страни на равенството $a^2-2ab+b^2=\frac{9}{4}$ додадеме $4ab$, го добиваме еквивалентното равенство $(a+b)^2=\frac{9}{4}+4ab$. Заменуваме $ab=\frac{9}{2}$ и добиваме $(a+b)^2=\frac{81}{4}$, од каде наоѓаме $a+b=\frac{9}{2}$ или $a+b=-\frac{9}{2}$.

Имаме

$$\begin{aligned}A&=a^2+2ab+b^2+2a^2b+2ab^2+a^2b^2\\&=(a+b)^2+2ab(a+b)+(ab)^2\\&=(a+b+ab)^2,\end{aligned}$$

па затоа $ab=\frac{9}{2}$ и $a+b=\frac{9}{2}$, добиваме $A=(\frac{9}{2}+\frac{9}{2})^2=81$, а за $ab=\frac{9}{2}$ и $a+b=-\frac{9}{2}$, добиваме $A=(\frac{9}{2}-\frac{9}{2})^2=0$. Конечно, при дадените услови изразот A прима само две вредности и тоа 0 и 81.

8. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 8y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Решение. Ако од втората равенка замениме во првата равенка, добиваме $8y = (y^2)^2$, односно $y^4 - 8y = 0$. Значи, $y(y^3 - 8) = 0$, па како производ на два броја е еднаков на 0 ако барем еден од броевите е еднаков на 0, следува дека $y = 0$ или $y^3 - 8 = 0$, т.е. $y = 0$ или $y = 2$. За $y = 0$, добиваме $x = 0$, а за $y = 2$, добиваме $x = 4$. Според тоа, системот има две решенија $(x, y) = (0,0)$ и $(x, y) = (4,2)$.

9. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} (x-y)(y-z)(z-x) = xyz, \\ (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3) = x^3y^3z^3, \\ x + y + z = 8. \end{cases}$$

Решение. Да претпоставиме, дека $xyz \neq 0$ и втората равенка да ја поделиме со првата. Добиваме

$$(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = x^2y^2z^2.$$

Имаме, $x^2 + y^2 > 0$ и $x^2 + xy + y^2 \geq -xy$, па затоа $x^2 + xy + y^2 \geq |xy|$, шри што знак за равенство важи ако и само ако $x = -y$. Аналогно, $y^2 + yz + z^2 \geq |yz|$ и $z^2 + zx + x^2 \geq |zx|$. Оттука

$$(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \geq x^2y^2z^2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x = -y = z = -x$, т.е. кога $x = 0$, што противречи на претпоставката. Според тоа, меѓу броевите има нула, па значи има и два еднакви. Сега од третиот услов ги добиваме решенијата $(8,0,0), (0,8,0), (0,0,8), (4,4,0), (4,0,4), (0,4,4)$.

10. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} xy + yz = 882, \\ yz + zx = 992, \\ zx + xy = 572. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме трите равенки и добиената равенка ја поделиме со 2, добиваме

$$xy + yz + zx = 1223.$$

Сега, ако од последната равенка ги одземеме првата, втората и третата равенка, го добиваме системот:

$$\begin{cases} xy = 231, \\ yz = 651, \\ zx = 341. \end{cases} \tag{1}$$

Множејќи ги трите равенки на системот (1) ја добиваме равенката

$$x^2y^2z^2 = 341 \cdot 231 \cdot 651,$$

од каде добиваме $xyz = \pm 7161$.

Сега, во $xyz = 7161$ заменуваме од (1) и добиваме $x = 11,\ y = 21,\ z = 31$. Понатаму, во $xyz = -7161$ заменуваме од (1) и добиваме $x = -11,\ y = -21,\ z = -31$.

11. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y - z = -1, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1, \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка на системот следува $z = x + y + 1$ и ако замениме во втората равенка последователно добиваме

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2 + (x + y + 1)^2 - 1 = 0, \\ &(x - y)(x + y) + (x + y + 1 - 1)(x + y + 1 + 1) = 0, \\ &(x - y)(x + y) + (x + y)(x + y + 2) = 0, \\ &(x + y)(x - y + x + y + 2) = 0, \\ &(x + y)(2x + 2) = 0, \\ &(x + y)(x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Од последната равенка следува $x = -1$ или $x = -y$.

Во првиот случај, со замена во $z = x + y + 1$ добиваме $z = y$. Понатаму, со замена во третата равенак на системот добиваме

$$\begin{aligned} &-(-1)^3 + y^3 + y^3 = -1, \\ &2y^3 = -2, \\ &y^3 = -1, \\ &y = -1. \end{aligned}$$

Сега, $z=-1$. Значи, едно решение на системот е $x=y=z=-1$.

Во вториот случај со замена во $z=x+y+1$, добиваме $z=1$. Сега, од третата равенка на системот следува

$$-(-y)^3+y^3+1=-1,$$
$$2y^3=-2,$$
$$y^3=-1,$$
$$y=-1.$$

Сега, $x=1$, па друго решение на системот е $x=z=1, y=-1$.

12. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+y^2x=6a^3, \end{cases}$$

каде a е реален број.

Решение. Од првата равенка добиваме

$$(x+y)^3-3(x^2y+y^2x)=9a^3,$$

и ако замениме од втората равенка добиваме

$$(x+y)^3-18a^3=9a^3,$$

односно

$$(x+y)^3=27a^3.$$

Од последната равенка добиваме $x+y=3a$, т.е. $y=3a-x$. Сега, со замена во втората равенка на системот, добиваме

$$x^2(3a-x)+x(3a-x)^2=6a^3,$$

од каде по средувањето имаме

$$x^2-3ax+2a^2=0.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-a)(x-2a)=0,$$

од каде добиваме $x_1=a, x_2=2a$, а од $y=3a-x$ добиваме $y_1=2a$, $y_2=a$.

7. НЕРАВЕНКИ

1. Определи го најголемиот природен број n за кој е исполнето неравенството

$$\frac{3^n-239}{2} < \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{11}.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{3^n-239}{2} < \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{11},$$
$$\frac{3^n-239}{2} < \frac{265}{132},$$
$$3^n - 239 < \frac{265}{66},$$
$$3^n < 239+\frac{265}{66},$$
$$3^n < 243\frac{1}{66}.$$

Сега, бидејќи $3^5 = 243 < 243\frac{1}{66}$ и $3^6 = 729 > 243\frac{1}{66}$, заклучуваме дека бараниот број е $n=5$.

2. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z), такви што

$$x^2 \le y+z,\ y^2 \le z+x,\ z^2 \le x+y.$$

Решение. Нека x е најголемиот од трите броја, т.е. $y \le x$ и $z \le x$. Тогаш $x^2 \le y+z \le x+x = 2x$, т.е. $x^2 \le 2x$. Но, x е природен број, па од последното неравенство следува $x \le 2$. Оттука следува дека постојат осум тројки природни броеви (x,y,z) за кои се исполнети условите на задачата, при што секој од броевите x,y,z е 1 или 2. Тоа се тројките: $(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)$.

3. Определи го најмалото целобројно решение на неравенката

$$\frac{(3+2x)(2x-3)}{4} - \frac{x-5}{8} \le \left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Решение. Дадената негавенка последователно е еквивалентна со неравенките

$$\frac{4x^2-9}{4}-\frac{x-5}{8}\le x^2+x+\frac{1}{4},$$
$$2(4x^2-9)-(x-5)\le 8x^2+8x+2,$$
$$8x^2-18-x+5\le 8x^2+8x+2,$$
$$9x\ge -15,$$
$$x\ge -\frac{5}{3}.$$

Според тоа, најмалото целобројно решение на дадената неравенка е $x=-1$.

4. Определи го најмалиот цел број кој е решение на неравеннката

$$(2-x)^3-x(3-x)(3+x)-\frac{2(3x+1)^2+1}{3}<27.$$

Решение. Дадената неравенка последователно е еквивалентна на неравенките

$$8-12x+6x^2-x^3-9x+x^3-\frac{18x^2+12x+3}{3}<27,$$
$$8-12x+6x^2-9x-6x^2-4x-1<27,$$
$$-25x<20,$$
$$x>-0,8.$$

Според тоа, најмалиот цел број кој е решение на неравенката е 0.

5. Определи ги сите вредности на a и b такви што

$$a^2+ab+b^2>3(a+b-1).$$

Решение. Последователно добиваме

$$a^2+ab+b^2-3a-3b+3>0,$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+ab-a-b+1>0,$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)>0.$$

Воведуваме смена $a-1=u$, $b-1=v$ и добиваме $u^2+uv+v^2>0$, т.е.

$$(u+\tfrac{v}{2})^2+\tfrac{3}{4}v^2>0.$$

Последното неравенство е исполенто за секои вредности на u и v, овен за $u=v=0$. Според тоа, почетното неравенство е исполнето за секои a и b, освен за $a=b=1$.

6. Реши ја неравенката

$$2\sqrt{2}x-3\le 3x-2\sqrt{2}\,.$$

Решение. Последователно дадената неравенка е еквивалентна со неравенките:

$$2\sqrt{2}x-3x\le 3-2\sqrt{2},$$
$$(2\sqrt{2}-3)x\le 3-2\sqrt{2},$$

па како $2\sqrt{2}-3<0$, последната неравенка е еквивалентна со неравенката $x\ge -1$. Значи. Решението на почетната неравенка е множеството $[-1,+\infty)$.

7. Реши ја неравенката:

$$|x-1|>\tfrac{x+1}{2}\,.$$

Решение. Од својствата на апсолутната вредност следува дека за $x-1\ge 0$, т.е. $x\ge 1$ дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $x-1>\frac{x+1}{2}$, чие решение е $x>3$. Добиените вредности за x го задоволуваат условот $x\ge 1$, па затоа интервалот $(3,+\infty)$ е решение на дадената неравенка.

Понатаму, ако $x-1<0$, т.е. $x<1$, дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $-x+1>\frac{x+1}{2}$, чие решение е $x<\frac{1}{3}$. Добиените вредности за x го задоволуваат условот $x<1$, па затоа интервалот $(-\infty,\frac{1}{3})$ е решение на дадената неравенка.

Значи, решение на дадената неравенка е множеството $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)$.

8. Реши ја неравенката

$$|2kx-\tfrac{3k-1}{2}|>(k-1)x^2+5\,,$$

за вредности на k кои се решенија на равенката

$$\tfrac{x+1}{x-1}=1-\tfrac{9}{x+2}\,.$$

Решение. Во равенката допустливи вредности на x се $x\ne\pm 2$. Се ослободуваме од именителите и последователно добиваме

$$x^2+3x+2=x^2-4-9x+18,$$
$$12x=12,$$
$$x=1.$$

Во неравенката заменуваме $k=1$ и последователно добиваме

$$|2x-1|>5,$$
$$2x-1>5 \ \vee \ 2x-1<-5,$$
$$x>3 \ \vee \ x<-2.$$

Значи, решенија на неравенката е множеството $(-\infty-2)\cup(3,+\infty)$.

9. Реши ја неравенката

$$|\tfrac{2x+4}{x+2}-\tfrac{4x+1}{2x}|\geq 1.$$

Решение. Неравенката е определена за $x\neq -2$ и $x\neq 0$. Ако $x\neq -2$ и $x\neq 0$, тогаш последователно добиваме

$$|\tfrac{2x+4}{x+2}-\tfrac{4x+1}{2x}|\geq 1 \ \Leftrightarrow \ |\tfrac{-(x+2)}{2x(x+2)}|\geq 1 \ \Leftrightarrow \ |\tfrac{1}{2x}|\geq 1 \ \Leftrightarrow \ |x|\leq \tfrac{1}{2}.$$

Според тоа, $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}$, т.е. $x\in[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2}]$.

10. Определи рационален број со именител 7 кој е помал од $-\frac{5}{19}$, а е поголем од $-\frac{6}{19}$.

Решение. Од $-\frac{6}{19}<\frac{x}{7}<-\frac{5}{19}$ следува $-35>19x>-42$, од каде следува дека $x=-2$. Значи, бараниот број е $-\frac{2}{7}$.

11. а) Докажи дека за секој позитивен реален број x важи $x+\frac{4}{x}\geq 4$.

б) Определи ги сите ненултри реални броеви x за кои важи

$$\min\{4,x+\tfrac{4}{x}\}\geq 8\min\{x,\tfrac{1}{x}\}.$$

Решение. а) Имаме

$$x-4+\frac{4}{x}=(\sqrt{x})^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}+(\frac{2}{\sqrt{x}})^2=(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})^2\geq 0,$$

што е еквивалентно со $x+\frac{4}{x}\geq 4$.

б) За $x>0$ важи $\min\{4,x+\frac{4}{x}\}=4$, а за $x<0$ имаме $x+\frac{4}{x}<0$, па важи $\min\{4,x+\frac{4}{x}\}=x+\frac{4}{x}$.

Од друга страна , за $x>0$ условот $x\geq\frac{1}{x}$ е еквивалентен со условот $x^2\geq 1$, т.е. $|x|\geq 1$, па како $x>0$ е еквивалентен со $x\geq 1$. Според тоа, за $x\geq 1$ имаме $\min\{x,\frac{1}{x}\}=\frac{1}{x}$, а за $0<x<1$ важи $\min\{x,\frac{1}{x}\}=x$. За $x<0$

условот $x \geq \frac{1}{x}$ е еквивалентен со условот $x^2 \leq 1$, т.е. $|x| \leq 1$, па како $x < 0$ е еквивалентен $-x \leq 1$, односно со $x \geq -1$. Според тоа, за $-1 \leq x < 0$ имаме $\min\{x, \frac{1}{x}\} = \frac{1}{x}$, а за $x < -1$ важи $\min\{x, \frac{1}{x}\} = x$.

Сега разликуваме четири случаи:

1) $x \geq 1$ и тогаш $4 \geq \frac{8}{x}$, т.е. $x \geq 2$, што е решение. Значи $x \in [2, +\infty)$.

2) $0 < x < 1$ и тогаш $4 \geq 8x$, т.е. $x \leq \frac{1}{2}$, па во овој случај решение е $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

3) $-1 \leq x < 0$ и тогаш $x + \frac{4}{x} \geq \frac{8}{x}$, т.е. $x \geq \frac{4}{x}$, па како $x < 0$ ова е еквивалентно со $x^2 \leq 4$, т.е. $|x| \leq 2$, што е задоволено за $-1 \leq x < 0$. Значи, во овој случај решение е $x \in [-1, 0)$.

4) $x < -1$ и тогаш $x + \frac{4}{x} \geq 8x$, т.е. $\frac{4}{x} \geq 7x$, па како $x < 0$ ова е еквивалентно со $x^2 \geq \frac{4}{7}$, што очигледно задоволено за $x < -1$. Значи, во овој случај решение е $x \in (-\infty, -1)$.

Значи, сите решенија се $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$.

12. Реши ја равенката

$$4x(2-x)^2 - 5(x-1)^3 + x = (x+1)^2(1-x)$$

и провери дали нејзиите решенија се решенија на неравенката

$$(3x-1)^2 + 7(1-x)^2 > (4x-1)^2 + 1.$$

Решение. Последователно добиваме

$$4x(2-x)^2 - 5(x-1)^3 + x = (x+1)^2(1-x),$$
$$4x(4-4x+x^2) - 5(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + x = (x^2 + 2x + 1)(1-x),$$
$$4x^3 - 16x^2 + 16x - 5x^3 + 15x^2 - 15x + 5 + x = x^2 + 2x + 1 - x^3 - 2x^2 - x,$$
$$2x + 5 = x + 1,$$
$$x = -4.$$

Според тоа, дадената равенка има едно решение, $x = -4$. Понатаму,

$$(3x-1)^2 + 7(1-x)^2 > (4x-1)^2 + 1,$$
$$9x^2 - 6x + 1 + 7x^2 - 14x + 7 > 16x^2 - 8x + 1 + 1,$$
$$-20x + 8 > -8x + 2,$$

$$12x < 6,$$
$$x < \tfrac{1}{2}.$$

Значи, решенијата на дадената неравенка се $x < \frac{1}{2}$. Сега, бидејќи $-4 < \frac{1}{2}$, добиваме дека решението на равенката е решение на неравенката.

13. Реши ја равенката

$$(1-2a)^2 x - a^2(4x-5) = 0,$$

каде a е реаен параметар. Определи за кои вредности на a равенката има позитивно решение.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$(1-4a+4a^2)x - 4a^2x + 5a^2 = 0,$$
$$x - 4ax + 4a^2x - 4a^2x + 5a^2 = 0,$$
$$(1-4a)x = -5a^2.$$

Ако $a \neq \frac{1}{4}$, тогаш равенката има решение $x = \frac{5a^2}{4a-1}$. Бидејќи $5a^2 \geq 0$, равенката има позитивн решение за $4a-1>0$ и $a \neq 0$, односно за $a > \frac{1}{4}$.

14. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$a^2(x-3) + 4(a+3-x) = a^3$$

има единствен цел позитивен корен, кој го задоволува неравенството $\frac{x+9}{6} - \frac{x-2}{3} > 1$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на

$$(a-2)(a+2)x = (a-2)(a+2)(a+3)$$

и има единствен корен за $a \neq \pm 2$. Овој корен $x = a+3$ е целоброен, кога a е цел број и е позитивен, кога $a+3>0$, односно кога $a > -3$.

Неравенката $\frac{x+9}{6} - \frac{x-2}{3} > 1$ е еквивалентна со неравенката $x < 7$. Од $a+3<7$, добиваме $a<4$. Конечно, можни вредности на a се $-1, 0, 1$ и 3.

8. НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека бројот 3^{2013} има најмалку 957 цифри.

   Решение. Ќе ги користиме неравенствата $3^4 = 81 > 80 = 10 \cdot 2^3$ и $2^7 = 128 > 125 = 5^3$. Имаме

   $$\begin{aligned} 3^{2013} &= 3 \cdot 3^{2012} = 3 \cdot (3^4)^{503} > 3 \cdot (2^3 \cdot 10)^{503} = 3 \cdot 2^{1509} \cdot 10^{503} \\ &= 3 \cdot (2^7)^{150} \cdot 2^{459} \cdot 10^{503} > 3 \cdot (5^3)^{150} \cdot 2^{459} \cdot 10^{503} \\ &= 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{450} \cdot 2^{450} \cdot 10^{503} = 3 \cdot 512 \cdot 10^{450} \cdot 10^{503} \\ &= 1536 \cdot 10^{953} > 10^3 \cdot 10^{953} = 10^{956}. \end{aligned}$$

   Според тоа, бројот 3^{2013} се запишува со најмалку 957 цифри.

2. Спореди ги вредноста на изразот $\frac{36 \cdot (-6)^2 \cdot 3^6}{12^3 \cdot 3^5}$ и бројот $\sqrt{\frac{79}{25}}$.

   Решение. Имаме:

   $$\frac{36 \cdot (-6)^2 \cdot 3^6}{12^3 \cdot 3^5} = \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^6}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 3^5} = \frac{3^{10} \cdot 2^4}{3^8 \cdot 2^6} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

   Понатаму, $\frac{81}{16} > \frac{79}{25}$, бидејќи $81 \cdot 25 = 2025 > 1264 = 16 \cdot 79$, па затоа $\frac{36 \cdot (-6)^2 \cdot 3^6}{12^3 \cdot 3^5} > \sqrt{\frac{79}{25}}$.

3. Која од дропките е поголема: $\frac{5553}{5557}$ или $\frac{6664}{6669}$?

   Решение. Првата дропка да ја запишеме во видот $A = \frac{a-4}{a}$, а втората во видот $B = \frac{b-5}{b}$. Тогаш, нивната разлика е еднаква на $A - B = \frac{5a-4b}{ab}$. Бидејќи $5a = 27885$ и $4b = 26676$, важи $5a - 4b > 0$, па затоа $A - B > 0$, односно $A > B$.

4. Дадени се дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Ако $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, докажи, дека

   $$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

   Решение. Од $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ следува дека $ad < bc$. Ако на двете страни на

последното неравенство додадеме ab, добиваме

$$ad+ab<bc+ab \quad \Leftrightarrow \quad a(b+d)<b(a+c) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}.$$

Аналогно од $ad<bc$ со додавање на cd добиваме

$$ad+cd<bc+cd \quad \Leftrightarrow \quad d(a+c)<c(b+d) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

5. Позитивните броеви a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 ги задоволуваат условите $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ и $a_2^2+b_2^2=c_2^2$. Докажи дека $a_1a_2+b_1b_2\le c_1c_2$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} c_1^2c_2^2 &= (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \\ &= (a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_1a_2-b_1b_2)^2 \\ &\ge (a_1a_2+b_1b_2)^2, \end{aligned}$$

т.е. $(a_1a_2+b_1b_2)^2\le(c_1c_2)^2$, од каде што следува $a_1a_2+b_1b_2\le c_1c_2$.

6. Ако $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}$, подреди ги по големина броевите $x, x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$.

Решение. Имаме

$$x=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}<\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=1.$$

Сега, од $0<x<1$ следува $x^2<x$ и $x<\frac{1}{x}$. Но, $\frac{1}{x}>1$, па затоа $\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$.

Конечно, $x^2<x<\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}$.

7. Нека $a=\frac{1}{21^2}+\frac{1}{22^2}+...+\frac{1}{40^2}$ и $b=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+...+\frac{1}{19^2}$. Докажи дека

$$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<\frac{1}{2}.$$

Решение. Ќе искористиме дека за секои два природни броја $1<m<n$ бројот $A=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+...+\frac{1}{n^2}$ се наоѓа меѓу $\frac{n+1-m}{m(n+1)}$ и $\frac{n+1-m}{(m-1)n}$. Последното следува од очигледните неравенства $\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$, $k>1$ и разлижувањето $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

Според тоа, во нашата задача имаме

$$\frac{60}{21\cdot 41} < a < \frac{60}{20\cdot 40} = \frac{3}{40} \text{ и } \frac{3}{20} = \frac{30}{10\cdot 20} < b < \frac{30}{9\cdot 19},$$

па затоа

$$\frac{a}{b} < \frac{3}{40}\cdot\frac{20}{3} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{a}{b} > \frac{60}{21\cdot 41}\cdot\frac{9\cdot 19}{30} = \frac{114}{287} > \frac{1}{3}.$$

8. Докажи дека

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 0{,}99.$$

Решение. За секој природен број $k \geq 2$ важи $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, па затоа

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99.$$

9. Докажи дека

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

Решение. За секој $n \geq 2$ важи

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right),$$

па затоа

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}.\right.$$

10. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{2}{2022}} < \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022} < \sqrt{\frac{3}{2023}}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2} > \frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\frac{7^2-1}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2-1}{2022^2}$$
$$= \frac{2\cdot 4}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{6^2}\cdot\frac{6\cdot 8}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2020\cdot 2022}{2022^2} = \frac{2}{2022}$$

и

$$\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2} < \frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\frac{7^2}{8^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2-1}$$
$$= \frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{7^2}{7\cdot 9}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2021\cdot 2023} = \frac{3}{2023}.$$

Конечно, со коренување на горните неравенства се добива бараното неравенство.

11. Нека a,b,m се три позитивни реални броеви и $a>b$. Кој од броевите $A=\sqrt{a+m}-\sqrt{a}$ и $B=\sqrt{b+m}-\sqrt{b}$ е поголем?

Решение. Имаме

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a+m}+\sqrt{a}}{m},$$
$$\frac{1}{B}=\frac{1}{\sqrt{b+m}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b+m}+\sqrt{b}}{m}.$$

Сега, од $a>b$ следува дека $\sqrt{a+m}+\sqrt{a}>\sqrt{b+m}+\sqrt{b}$, па затоа $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$, од каде добиваме дека $A<B$.

12. Ако $x>0, y>0, z>0$ и $x+y+z=1$, докажи дека

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\le\frac{9}{4}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}&=\frac{x(x+y+z)}{x(x+y+z)+yz}+\frac{y(x+y+z)}{y(x+y+z)+zx}+\frac{z(x+y+z)}{z(x+y+z)+xy}\\&=\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}+\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}+\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}\\&=\frac{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.\end{aligned}$$

Значи, даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$8(x+y+z)(xy+yz+zx)\le 9(x+y)(y+z)(z+x),$$
$$x^2y-2xyz+yz^2+y^2z-2xyz+zx^2+z^2x-2xyz+xy^2\ge 0,$$
$$y(x-z)^2+z(x-y)^2+x(z-y)^2\ge 0.$$

Последното неравенство е очигледно точно, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

13. Докажи дека за секои реални броеви x и y важи:

$$x^2+y^2-xy-x-y+1\ge 0.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2&=x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1\\&\ge(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0,\end{aligned}$$

па ако неравенството

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0$$

го поделиме со 2, го добиваме саканото неравенство.

14. Докажи дека засекои реални броеви x и y важи

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y + 2 \geq 0\,. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Неравенство (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0,$$
$$(x - y + 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0.$$

Збир на квадрати на два броја е ненегативен број, па затоа е точно последното неравенство, што значи дека е точно и неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x - y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$, т.е. ако и само ако $x = 0,\ y = 1$.

15. Нека a,b,c се природни броеви такви што $28a + 30b + 31c = 365$. Докажи дека $a + b + c = 12$.

Решение. Нека $k = a + b + c$. Тогаш $28k + 2b + 3c = 365$. Меѓутоа важи $2b + 3c \geq 5$, па од последното равенство следува дека $k \leq \frac{360}{28}$, па како k е природен број добиваме $k \leq 12$. Слично, $31k - b - 3a = 365$, па $b + 3a \leq 4$, од последното равенство следува $k \geq \frac{369}{31}$, па како k е природен број добиваме $k \geq 12$. Значи, $k = 12$.

16. Ако a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, докажи дека

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Решение. За секој ненегативен број a важи

$$(a-1)^2(a+3) \geq 0,$$
$$a^3 + a^2 - 5a + 3 \geq 0,$$
$$(5 - a^2)(a+1) \leq 8,$$
$$\frac{1}{a+1} \geq \frac{5-a^2}{8}.$$

Ако го собереме последното неравенство со аналогните неравенства

за b и c, добиваме

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{15-a^2-b^2-c^2}{8}=\frac{3}{2}.$$

17. Докажи дека

$$\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot9}+\frac{1}{9\cdot12}\ldots+\frac{1}{2019\cdot2022}<\frac{1}{9}.$$

Решение. Бидејќи $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ и $ak<a$ за $a>0$ и $0<k<1$, важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot9}+\frac{1}{9\cdot12}\ldots+\frac{1}{2019\cdot2022}&=\frac{1}{9}(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{673\cdot674})\\&=\frac{1}{9}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{673}-\frac{1}{674})\\&=\frac{1}{9}(1-\frac{1}{674})<\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

18. За кои реални броеви x вредноста на изразот

$$A=(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023$$

е минимална? Определи го тој минимум.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+2023\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+2023\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+6+6)+2023\\&=(x^2-7x+6)(x^2-7x+6)+6(x^2-7x+6)+2023\\&=(x^2-7x+6)^2+2\cdot3\cdot(x^2-7x+6)+3^2+2014\\&=((x^2-7x+6)+3)^2+2014\\&=(x^2-7x+9)^2+2014\\&\geq2014,\end{aligned}$$

бидејќи $(x^2-7x+9)^2\geq0$. Понатаму, ако постои x таков што важи $x^2-7x+9=0$, тогаш минималната вредност на изразот A е 2014. Сега,

$$\begin{aligned}x^2-7x+9&=x^2-2\cdot\frac{7}{2}x+(\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+9\\&=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{13}{4}=(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{\sqrt{13}}{2})^2\\&=(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2})(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}),\end{aligned}$$

па затоа $x^2-7x+9=0$ акои само ако

$$(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2})(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2})=0,$$

т.е. ако и само ако $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ или $x=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$. Значи, минималната вредност на изразот A е 2014 и истата се достигнува за $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ и $x=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$.

19. Која од дропките е поголема $\frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1}$ или $\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}$?

Решение. Да ставиме $10^{2011}=a$. Тогаш $10^{2012}=10a$ и $10^{2013}=100a$, па затоа $A=\frac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1}=\frac{a+1}{10a+1}$ и $B=\frac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}=\frac{10a+1}{100a+1}$.

Прв начин. Имаме

$$A-B=\frac{a+1}{10a+1}-\frac{10a+1}{100a+1}=\frac{(100a+1)(a+1)-(10a+1)^2}{(10a+1)(100a+1)}=\frac{81a}{(10a+1)(100a+1)}>0,$$

па затоа $A>B$.

Втор начин. Имаме:

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{a+1}{10a+1}}{\frac{10a+1}{100a+1}}=\frac{(a+1)(100a+1)}{(10a+1)^2}=\frac{100a^2+101a+1}{100a^2+20a+1}=1+\frac{81a}{100a^2+20a+1}>1,$$

па затоа $A>B$.

20. Спореди ги вредностите на дропките: $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2}$ и $\frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$.

Решение. Ќе користиме дека, ако за позитивните броеви a,b,c,d важи $ad>bc$, тогаш $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

Да означиме $a=3^{2021}+2, b=c=3^{2022}+2$ и $d=3^{2023}+2$. Имаме

$$ad=(3^{2021}+2)(3^{2023}+2)=3^{4044}+20\cdot 3^{2021}+4,$$
$$bc=(3^{2022}+2)(3^{2022}+2)=3^{4044}+12\cdot 3^{2021}+4.$$

Сега, бидејќи $20\cdot 3^{2021}>12\cdot 3^{2021}$, заклучуваме дека $ad>bc$, т.е. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, па затоа $\frac{3^{2021}+2}{3^{2022}+2}>\frac{3^{2022}+2}{3^{2023}+2}$

21. Нека $m\geq n>0$. Докажи го неравенството

$$\sqrt{2mn-n^2}+\sqrt{m^2-n^2}\geq m.$$

Решение. Воведуваме замена $m = n + h,\ h \geq 0$. Тогаш добиваме

$$\sqrt{2mn - n^2} = \sqrt{2(n+h)n - n^2} = \sqrt{n^2 + 2nh} \geq \sqrt{n^2} = n,$$
$$\sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{(m+h)^2 - n^2} = \sqrt{h^2 + 2nh} \geq \sqrt{h^2} = h.$$

Ако ги собереме добиените неравенства, наоѓаме

$$\sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \geq n + h = m,$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $h = 0$, т.е. ако и само ако $m = n$.

22. Ако $a > b > c$, докажи дека

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{2}{a-c}.$$

Решение. *Прв начин*. Од $a > b > c$ следува

$$a - c > a - b > 0,\ a - c > b - c > 0.$$

Според тоа, $\frac{a-c}{a-b} > 1$ и $\frac{a-c}{b-c} > 1$, па затоа $\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} > 2$. Ако последното равенство го поделиме со $a - c > 0$ го добиваме равенството

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{2}{a-c}.$$

кое и требаше да го докажеме.

Втор начин. Од $a > b > c$ следува дека постојат позитивни реални броеви x и y такви што $a - b = x$ и $b - c = y$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $a - c = x + y$. Сега,

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} - \frac{2}{a-c} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y} = \frac{x(x+y)+y(x+y)-2xy}{xy(x+y)} = \frac{x^2+y^2}{xy(x+y)} > 0,$$

што и требаше да се докаже.

Трет начин. Од $a > b > c$ следува

$$a - c > a - b > 0,\ a - c > b - c > 0.$$

Имаме

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} - \frac{2}{a-c} = \frac{(b-c)(a-c)+(a-b)(a-c)-2(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)^2+(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(a-c)} > 0,$$

што и требаше да се докаже.

23. Нека a, b, c, d се позитивни реални броеви за кои важи $a \geq b \geq c$.

Докажи го неравенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата:

$$\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}\le\frac{b^2c+c^2a+a^2b}{abc},$$
$$b^2c+c^2a+a^2b-a^2c-b^2a-c^2b\ge 0,$$
$$a^2b-a^2c+b^2c-c^2b+c^2a-a^2c\ge 0,$$
$$a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)\ge 0,$$
$$a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)\ge 0,$$
$$(b-c)(a^2+bc-ab-ac\ge 0,$$
$$(b-c)(a(a-b)-c(a-b))\ge 0,$$
$$(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0.$$

Сега, од $a\ge b\ge c$ следува точноста на последното неравенство, што значи дека е точно и даденото неравенство.

24. За ненегативните реални броеви a,b,c важи

$$2a^3b+2b^3c+2c^3a=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Докажи го неравенството

$$2ab(a-b)^2+2bc(b-c)^2+2ca(c-a)^2\ge(ab+bc+ca)^2.$$

Решение. Даденото неравество е еквивалентно со неравенството

$$2(a^3b+b^3c+c^3a)+ab^3+bc^3+ca^3-3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)\ge 0.$$

Ако го искористиме условот на задачата го добиваме неравенството

$$4(a^3b+b^3c+c^3a)+ab^3+bc^3+ca^3-4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)\ge 0$$

и оттука го добиваме очигледното неравенство

$$bc(c+a-2b)^2+ab(b+c-2a)^2+ca(a+b-2c)^2\ge 0.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

25. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$(\frac{1+c}{a}+2)(\frac{1+a}{b}+2)(\frac{1+b}{c}+2)\ge 216.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако даденото неравенство го помножиме со abc, добиваме

дека тоа е еквивалентно со неравенството

$$(1+c+2a)(1+a+2b)(1+b+2c) \le 6^3 abc\,.$$

Понатаму, ако во горното равенство замениме $a+b+c=1$, го добиваме еквивалентното неравенство:

$$(b+2c+3a)(c+2a+3b)(a+2b+3c) \le 6^3 abc\,. \qquad (1)$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$b+2c+3a \ge 6\sqrt[6]{bc^2a^3},$$
$$c+2a+3b \ge 6\sqrt[6]{ca^2b^3},$$
$$a+2b+3c \ge 6\sqrt[6]{ab^2c^3}.$$

Конечно, ако ги помножиме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1), кое е еквивалентно со даденото неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

26. Нека x и y се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy} \le 1 \le \frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\,. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува: $x^2+2yz \le x^2+y^2+z^2$, па затоа

$$\frac{x^2}{x^2+2yz} \ge \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{y^2}{y^2+2zx} \ge \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} \text{ и } \frac{z^2}{z^2+2xy} \ge \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1, \qquad (2)$$

со што е докажано десното неравенство во (1). Понатаму,

$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}+2\left(\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}\right)=3,$$

па затоа од (2) следува неравенството

$$2\left(\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}\right) \le 2\,,$$

кое е еквивалентно солевото неравенство во (1). Јасно, знак за ра-

венство важи ако и само ако $x = y = z$.

27. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1 + a + b .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$ab + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{a}{b}} = 2a,$$

$$ab + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{b}{a}} = 2b,$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

Ако ги собереме горните неравенства, го добиваме неравенството

$$2(ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq 2(1 + a + b) ,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = 1$.

28. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 1$. Докажи дека

$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2 \geq \frac{100}{3} .$$

Решение. Прво од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и условот $a + b + c = 1$, следува:

$$\begin{aligned}(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2 &\geq 3(\frac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}}{3})^2 \\ &= \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(1 + \frac{9}{a+b+c})^2 \\ &= \frac{1}{3}(1+9)^2 = \frac{100}{3}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = \frac{1}{3}$.

29. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$xy + yz + zx - xyz \leq \frac{8}{27} .$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и геоме-

трискатa средина и неравенствата $0 \le \sim = 1 - z \le 1$, последователно добиваме

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - xyz - \tfrac{8}{27} &= xy(1-z) + z(x+y) - \tfrac{8}{27} \\ &\le (1-z)(\tfrac{x+y}{2})^2 + z(x+y) - \tfrac{8}{27} \\ &= \tfrac{(1-z)^3}{4} + z(1-z) - \tfrac{8}{27} \\ &= \tfrac{\sim^3}{4} - \sim^2 + \sim - \tfrac{8}{27} \\ &= (\sim - \tfrac{8}{3})(\tfrac{\sim^2}{4} - \tfrac{\sim}{3} + \tfrac{1}{9}) \\ &= (\sim - \tfrac{8}{3})(\tfrac{\sim}{2} - \tfrac{1}{3})^2 \le 0. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Втор начин. Имаме,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= (x+y+z)((x+y+z)^2 - 3(xy + yz + zx)) \\ &= 1 - 3(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството меѓу средините од трет и прв ред имаме

$$\sqrt[3]{\tfrac{x^3+y^3+z^3}{3}} \ge \tfrac{x+y+z}{3} = \tfrac{1}{3},$$

од каде добиваме

$$x^3 + y^3 + z^3 \ge \tfrac{1}{9}.$$

Според тоа,

$$1 - 3(xy + yz + zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge \tfrac{1}{9} - 3xyz$$

и затоа

$$xy + yz + zx - xyz \le \tfrac{1}{3}(1 - \tfrac{1}{9}) = \tfrac{8}{27}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = \frac{1}{3}$.

30. а) Определи ја најмалата вредност m_a на дропката $\frac{x^2+1}{x}$, за $x > 0$.

б) Определи ја најмалата вредност m_b на дропката $\frac{x^3+3x+9}{x^2}$, за $x > 0$.

в) Определи ја најмалата вредност m_c на дропката $\frac{(x+1)(y+2)(xy+2)}{xy}$, за $x > 0$ и $y > 0$.

г) Определи ја најмалата вредност m_d на дропката $\frac{(x+4)(y+1)(xy+864)}{xy}$, за $x>0$ и $y>0$.

Решение. а) Од неравенството меѓу аритемтичката и геометриската средина следува

$$\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2.$$

Знак за равенство важи за $x=1$, па затоа $m_a=2$.

б) Од неравенството меѓу аритемтичката и геометрсиката средина следува

$$\frac{x^3+3x+9}{x^2}=\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}+3x+9}{x^2}\geq\frac{5}{x^2}\cdot 5\sqrt[5]{\frac{x^3}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\cdot 3x\cdot 9}=5.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{x^3}{3}=3x=9$, т.е. ако и само ако $x=3$. Затоа $m_b=5$.

в) Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува

$$\frac{(x+1)(y+2)(xy+2)}{xy}\geq\frac{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{2y}\cdot 2\sqrt{2xy}}{xy}=16.$$

Знак за ра-венство важи ако и само ако $x=1,\ y=2$. Затоа $m_c=16$.

г) Прво ќе докажеме дека за секои $x,y,z>0$ важи

$$(x^3+1)(y^3+1)(z^3+1)\geq(xyz+1)^3. \qquad (1)$$

Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3+y^3+z^3\geq 3x^2y^2z^2+3xyz,$$

кое е точно бидејќи од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3\cdot y^3z^3\cdot z^3x^3}=3\sqrt[3]{x^6y^6z^6}=3x^2y^2z^2 \text{ и}$$

$$x^3+y^3+z^3\geq 3\sqrt[3]{x^3\cdot y^3\cdot z^3}=3xyz.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

Сега, користејќи го неравенството (1), добиваме

$$\frac{(x+4)(y+1)(xy+864)}{xy}=4(\tfrac{x}{4}+1)(y+1)(\tfrac{864}{xy}+1)\geq 4(\sqrt[3]{\tfrac{x}{4}\cdot y\cdot\tfrac{864}{xy}}+1)^3=1372.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{x}{4}=y=\frac{864}{xy}$, т.е. ако и само ако $x=24$ и $y=6$. Затоа $m_d=1372$.

31. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geq\frac{a+b+c}{3}\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}\ . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Нека $x=\frac{a}{a+b+c}$, $y=\frac{b}{a+b+c}$, $z=\frac{c}{a+b+c}$. Тогаш $x+y+z=1$ и $x,y,z>0$. Заменуваме во (1) и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\geq\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{(xyz)^2}\ . \qquad (2)$$

Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}&=\frac{1-z}{2}\cdot\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1-y}{2}\\&=\frac{1}{8}(1-(x+y+x)+(xy+yz+zx)-xyz)\\&=\frac{1}{8}(xy+yz+zx-xyz)\\&=\frac{xyz}{8}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1),\end{aligned}$$

па затоа неравенството (2) е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt[3]{xyz}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1)\geq\frac{8}{3}\,. \qquad (3)$$

Сега, од неравенствата меѓу хармониската, геометриската и аритметичката средина имаме

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}\,,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{xyz}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1)&=\sqrt[3]{xyz}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-\sqrt[3]{xyz}\\&\geq 3-\sqrt[3]{xyz}\geq 3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, т.е. $a=b=c$.

Втор начин. Прво ќе го докажеме дека неравенството

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \qquad (4)$$

важи за секои позитивни реални броеви. Навистина, неравенството (4) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2abc+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\geq\frac{8(3abc+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)}{9}$$

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2-6abc\geq 0.$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

следува

$$\frac{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}{6} \geq \sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot a^2c\cdot ac^2\cdot b^2c\cdot bc^2} = abc,$$

што значи дека е точно неравенството (4).

Конечно, со примена на неравенството (4), добиваме

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)\\ &= \frac{8}{3}(a+b+c)\frac{ab+bc+ca}{3}\\ &\geq \frac{8}{3}(a+b+c)\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\\ &= \frac{8}{3}(a+b+c)\sqrt[3]{(abc)^2},\end{aligned}$$

со што е докажано неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

32. Нека се a,b,c реални броеви кои припаѓаат на интервалот $[0,1]$ и го задоволуваат условот $ab+bc+ca=1$. Определи ги најмалата и најголемата можна вредност на изразот $a^3+b^3+c^3$.

Решение. Од неравенството $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ и неравенството меѓу кубната и квадратната средина, имаме

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

односно

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Бидејќи во горните неравенства знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, добиваме дека при дадените услови најмалата можна вредност на дадениот израз е $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Од друга страна од условот на задачата следува $(a-1)(b-1)\geq 0$, од каде добиваме $a+b\leq ab+1$. Аналогно се докажува дека $b+c\leq bc+1$ и $c+a\leq ca+1$. Сега ако искористиме дека за секој $x\in[0,1]$ важи $x^3\leq x$, добиваме

$$a^3+b^3+c^3 \leq a+b+c \leq \frac{1}{2}(ab+bc+ca+3) = 2.$$

Во сите три од дадените неравенства истовремено важи знак за равенство ако и само ако два од дадените броеви се еднакви на 1, а третиот е еднаков на 0, т.е. $(a,b,c)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Според

тоа, најголемата можна вредност на изразот $a^3+b^3+c^3$ е 2.

33. Нека x, y, z се ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 3. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A=\frac{1}{(x+3)(y+3)}+\frac{1}{(y+3)(z+3)}+\frac{1}{(z+3)(x+3)}.$$

Решение. Да ставиме $u=x+3\geq 3, v=y+3\geq 3, w=z+3\geq 3$. Бидејќи изразот е симетричен, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $u\leq v\leq w$. Имаме $u+v+w=12$ и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$uvw\leq(\frac{u+v+w}{3})^3=4^3=64,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $u=v=w=4$. Според тоа, најмалата вредност на $A=\frac{u+v+w}{uvw}$ е $\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$.

Ќе докажеме дека $uvw\geq 54$. Нека претпоставиме дека $u>3$ и наместо u да ставиме 3, а наместо w да ставиме $w+u-3$, при што повторно збирот $u+v+w$ е 12. Од $(u-3)(w-3)>0$ следува $uw>3(w+u-3)$, што значи дека при оваа смена производот uvw се намалува. Нека сметаме дека $u=3$ и да претпоставиме дека $v>3$ и наместо v да ставиме 3, а наместо w да ставиме $w+v-3$, при што збирот $u+v+w$ повторно е 12. Од $(v-3)(w-3)>0$ следува $vw>3(w+v-3)$, што значи дека при оваа замена производот uvw се намалува. Според тоа, производот е минимален, ако $u=v=3$ и $w=6$, при што важи $uvw=3\cdot 3\cdot 6=54$. Оттука следува дека најголемата вредност на $A=\frac{u+v+w}{uvw}$ е $\frac{12}{54}=\frac{2}{9}$. .

34. Нека a и b се реални броеви такви што $a^2+b^2=2011$. Докажи дека

$$(\frac{a}{\sqrt{2011}}+\frac{b}{\sqrt{2012}})(\frac{a}{\sqrt{2012}}+\frac{b}{\sqrt{2011}})<\frac{4023}{2012}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\frac{a}{\sqrt{2011}}+\frac{b}{\sqrt{2012}})^2\leq(a^2+b^2)(\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012})=\frac{4023}{2012},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a^2=\frac{2011}{2012}b^2$. Аналогно

$$(\frac{a}{\sqrt{2012}}+\frac{b}{\sqrt{2011}})^2\leq(a^2+b^2)(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011})=\frac{4023}{2012},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a^2=\frac{2012}{2011}b^2$. Ако лева-

та страна на саканото неравенство е негативна, тогаш неравенството е тривијално. Ако не е, останува почлено да ги помножиме двете неравенства и да коренуваме. Неравенството е строго, бидејќи не е можно истовремено да важи

$$a^2 = \frac{2011}{2012}b^2 \text{ и } a^2 = \frac{2012}{2011}b^2 .$$

35. Определи ја најголемата можна вредност на збирот $a+b+c$, ако броевите a,b,c се позитивни и $a^2+b^2+c^2 = a^3+b^3+c^3$. Како се менува одговорот ако се испушти условот броевите a,b,c да се позитивни.

Решение. Ако a,b,c се позитивни броеви, тогаш од неравенсвтото на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$ и $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$,

па затоа

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2 ,$$

и ако се искористи условот $a^2+b^2+c^2 = a^3+b^3+c^3$, добиваме дека $3 \geq a+b+c$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Ако x е произволен број, ставаме $c = 2x^2+1$, $a = xc$, $b = -xc$, тогаш

$$a^3+b^3+c^3 = (xc)^3+(-xc)^3+c^3 = c^3 = (xc)^2+(-xc)^2+c^2$$

и $a+b+c = c$ може да е произволно голем број.

36. (Неравенство на Шур). Докажи дека

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0 , \qquad (1)$$

каде a,b и c се позитивни броеви и $r \geq 0$.

Решение. Заради симетрија во однос на a,b и c можеме да земеме дека $c \leq b \leq a$. Неравенството (1) го запишуваме во видот

$$(a-b)(a^r(a-c)-b^r(b-c))+c^r(a-c)(b-c) \geq 0 . \qquad (2)$$

Од $a^r \geq b^r > 0$, $a-c \geq b-c \geq 0$ следува $a^r(a-c) \geq b^r(b-c)$, па како и $a-b \geq 0$ и $c^r > 0$ заклучувамедека сите множители во (2) се ненегативни, што значи дека неравенството (2) е точно. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

37. Ако a,b и c се должини на страни на триаголник, докажи дека

$a^2+b^2>\frac{1}{2}c^2$.

Решение. Ако искористиме дека $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$, добиваме $a^2+b^2\geq 2ab$. Според тоа,

$$2a^2+2b^2=a^2+b^2+a^2+b^2\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2>c^2,$$

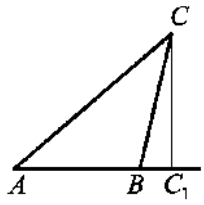
при што последното неравенство следува од неравенството на триаголник.

38. Нека ABC е произволен триаголник. Докажи дека

$$P_{ABC}\leq\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$$

и знак за равенство важи ако и само ако $\measuredangle BAC=90^\circ$

Решение. Нека CC_1 е висината повлечена кон страната AB на $\triangle ABC$. Тогаш $P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CC_1}}{2}$. Освен тоа, CC_1 е нормалата од C спуштена кон правата AB, AC зафаќа некој агол со таа права. Затоа $\overline{CC_1}\leq\overline{AC}$ и знак за равенство важи ако и само ако $C_1\equiv A$, т.е. ако и само ако $\measuredangle BAC=90^\circ$. Според тоа,



$$P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CC_1}}{2}\leq\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$$

и знак за равенство важи ако и само ако $\measuredangle BAC=90^\circ$

39. На страните AB и CD на квадратот $ABCD$ со страна $6\,cm$ земени се соодветно точки M и N. Отсечките AN и DM се сечат во точка P, а отсечките BN и CM се сечат во точка Q. Определи ја најголемата можна плоштина на четириаголникот $MPNQ$

Решение. Од $AB\|CD$ следува

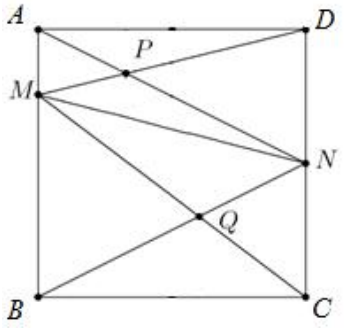
$$P_{MPN}=P_{APD}\ \text{ и }\ P_{MNQ}=P_{BCQ}.$$

Но, $\frac{P_{AMP}}{P_{MNP}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{PD}}=\frac{P_{MNP}}{P_{PND}}$ и затоа важи

$$P_{AMP}+P_{PDN}\geq 2\sqrt{P_{AMP}P_{PDN}}=2P_{PMN}.$$

Аналогно,

$$P_{BQM}+P_{QCN}\geq 2\sqrt{P_{BQM}P_{QCN}}=2P_{QMN}.$$



Според тоа,

$$P_{AMP} + P_{PDN} + P_{BQM} + P_{QCN} \geq 2P_{PMN} + 2P_{QMN} = 2P_{MPNQ}.$$

Од друга страна

$$P_{AMP} + P_{BQM} = \frac{1}{2}P_{ABCD} - P_{MPNQ},\ P_{PDN} + P_{QCN} = \frac{1}{2}P_{ABCD} - P_{MPNQ},$$

па ако замениме во горното неравенство добиваме

$$\frac{1}{2}P_{ABCD} - P_{MPNQ} + \frac{1}{2}P_{ABCD} - P_{MPNQ} \geq 2P_{MPNQ}\ ,$$

т.е.

$$P_{MPNQ} \leq \frac{1}{4}P_{ABCD} = 9\,cm^2.$$

40. Нека A_1, B_1, C_1 се допирните точки на впишаната кружница во триаголникот ABC со неговите страни $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$, соодветно, и нека $\overline{AC_1} = p, \overline{BA_1} = q, \overline{CB_1} = r$. Докажи дека

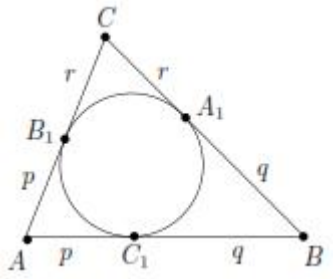
$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} \geq \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Имаме

$$p = \frac{b+c-a}{2}, q = \frac{c+a-b}{2}, r = \frac{a+b-c}{2},$$

(цртеж десно), па неравенството (1) можеме да го запишеме во видот:

$$\frac{b+c-a}{2a} + \frac{c+a-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} \geq \frac{3}{2}. \qquad (2)$$



Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{b+c-a}{2a} + \frac{c+a-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2}$$
$$\geq \frac{2}{2}\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} + \frac{2}{2}\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}} + \frac{2}{2}\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} - \frac{3}{2}$$
$$= 1+1+1-\frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

што значи дека е точно неравенството (2), па затоа е точно и неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \frac{b}{c} = \frac{c}{b}, \frac{a}{c} = \frac{c}{a},$$

т.е. ако и само ако триаголникот ABC е рамностран.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Popović: Sustavi jednadžbi, 12/45, Zagreb
2. P. Mladinić: Aritmogon, Matka 30/118, Zagreb
3. Д. Раковска: Най – най – най, Математика+, София
4. И. Шаркова: Да поговорим за $n!$, Математика+, София
5. Л. Любенов: Една задача за пресмятане на сбор ... и още няколко такива, Математика 6/2012, София
6. Н. Сафаеи: Факторизация и елементарни тъждества за решаване на олимпийски задачи, Математика+, София
7. П. Рангелова: Различни подходи за доказване на квадратни неравенства с две неизвестни, Математика, София
8. Р. Малчески, А. Малчески, А., К. Аневска: Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје, 2020
9. Р. Малчески: За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово, 1998
10. Р. Малчески: Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје, 2012
11. Р. Малчески: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
12. С. Дойчев: Да се възстанови ..., Математика+, София
13. Х. Алексиев: Разлагане на множители на полинома $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, Математика+, София