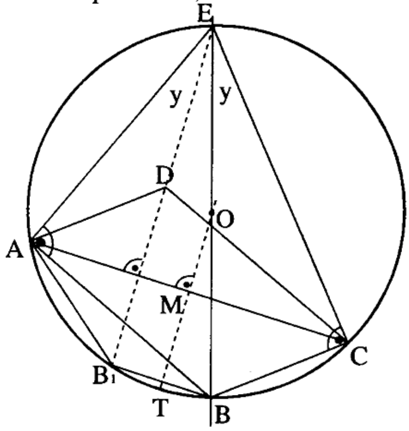
ММО 1996

1. Нека $ABCD$ е паралелограм кој не е правоаголник и E е точка во неговата рамнина, таква што $AE \perp AB$ и $EC \perp BC$. Докажете дека $\angle DEA = \angle CEB$.



Решение. Бидејќи

$$\angle BAE = \angle BCE = 90^0$$

заклучуваме дека четириаголникот $ABCE$ е тетивен. Нека $K(O,r)$ е кружницата опишана околу овој четириаголник. Тогаш, O е средината на отсечката BE и ако M е средината на отсечката AC наоѓаме

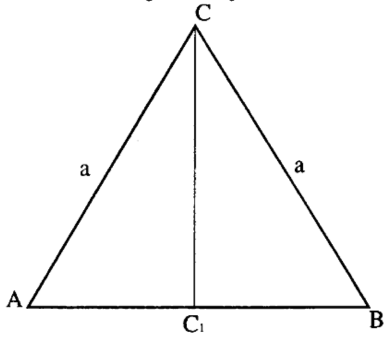
$$OM \cap K(O,r) = T.$$

Нека точката B_1 е симетрична на B во однос на OT. Бидејќи A е симетрична на C во однос на OT добиваме

$$\overline{AB_1} = \overline{CB}, \quad \angle MAB_1 = \angle MCB = \angle MAD,$$

што значи ΔB_1AD е рамнокрак и $B_1D \perp AC$. Од досега изнесеното имаме $B_1B \| AC$ и како $B_1D \perp AC$ добиваме $B_1D \perp BB_1$. Од друга страна $\angle BB_1E = 90^0$, па затоа точките B_1, D, E се колинеарни. Од $\overline{AB_1} = \overline{CB}$ заклучуваме дека $\angle B_1EA = \angle CEB$ (како периферски агли над исти тетиви) и како B_1, D, E се колинеарни заклучуваме дека $\angle DEA = \angle CEB$.

2. Нека P е множеството од сите многуаголници во рамнината и нека $M: P \to R$ е пресликување за кое:



а) $M(P) \geq 0$, за секој многуаголник P;

б) $M(P) = x^2$, ако P е рамностран триаголник со страна x;

в) ако P е многуаголник разделен со искршена линија на два многуаголници S и T, тогаш

$$M(P)=M(S)+M(T);$$

г) ако P и T се складни многуаголници, тогаш $M(P)=M(T)$.

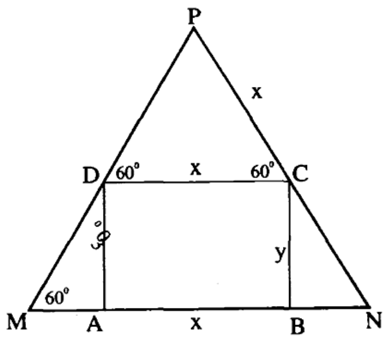
Да се најде $M(P)$ ако P е правоаголник со страни x и y.

Решение. Нека ABC е рамностран триаголник со страна a и CC_1 е висината спуштена од темето C. Тогаш

$$a^2 = M(\Delta ABC) = M(\Delta AC_1C) + M(\Delta BC_1C) = 2M(\Delta AC_1C)$$

т.е.

(1) $$M(\Delta AC_1C) = \frac{a^2}{2}.$$



Цртеж 1

Да го разгледаме правоаголникот $ABCD$ со страни x и y (цртеж 1). Околу правоаголникот опишуваме рамностран ΔMNP, така што страните AB и MN лежат на иста права. Тогаш,

$$\overline{MA} = \overline{BN} = \frac{\sqrt{3}}{3}y,$$

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN} = x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y,$$

$$\overline{DC} = x, \quad \overline{CN} = 2\overline{BN} = \frac{2\sqrt{3}}{3}y,$$

па затоа од (1) добиваме

$$M(\Delta MNP) = M(ABCD) + M(\Delta MAD) + M(\Delta BNC) + M(\Delta DCP),$$

т.е. $\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y\right)^2 = M(ABCD) + x^2 + 2\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2}$, што значи $M(ABCD) = \frac{4\sqrt{3}}{3}xy.$

3. Ако α,β,γ се агли во ΔABC, тогаш $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\geq\frac{8}{3+2\cos\gamma}$. Докажете!

Решение. Од неравенството $(\sin\alpha+\sin\beta-1)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2\geq 0$ добиваме

$$3-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\geq 2(\sin\alpha+\sin\beta)$$

$$3-2\cos(\alpha+\beta)\geq 2(\sin\alpha+\sin\beta)$$

и како $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$ следува

(1) $$\frac{3}{2}+\cos\gamma\geq\sin\alpha+\sin\beta.$$

Од $\sin\alpha+\sin\beta\geq 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$ и од (1) добиваме

(2) $$\frac{3}{2}+\cos\gamma\geq 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Од друга страна имаме $2\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}}\leq\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}$ т.е.

$$\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}},$$

што заедно со (2) дава $\frac{3}{2}+\cos\gamma\geq\frac{4}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}}$ односно

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\geq\frac{8}{3+2\cos\gamma}.$$

4. Еден многуаголник се нарекува "добар" ако ги исполнува следните услови

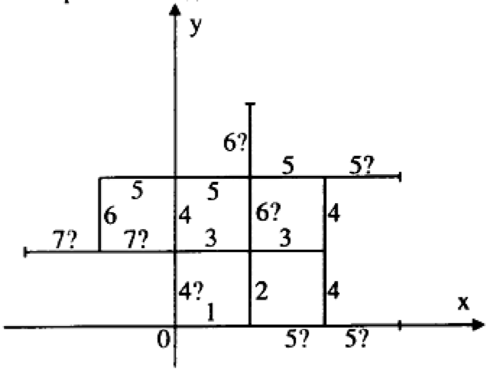
а) сите агли му се од унијата интервали $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$;

б) страните што не се соседни немаат заеднички точки; и

в) од кои било три страни барем две се паралелни и еднакви.

За кои природни броеви n постои "добар" n -аголник?

Решение. Произволно теме на многуаголникот да го земеме за почетно. Страните на многуаголникот ги нумерираме на следниот начин: една од страните кои излегуваат од ова теме ја земаме за прва, а останатите ги нумерираме последователно како што се надоврзуваат, при што втората страна која излегува од првото теме е означена со бројот n. Јасно, заради б) ваквото нумерирање кај "добар" многуаголник е еднозначно. На страните на многуаголникот положуваме вектори така што векторот паралелен со k-та страна е насочен кон заедничкото теме со $(k+1)$-та страна, а векторот кој е паралелен со n-та страна е насочен кон заедничкото теме со првата страна. Јасно, кај вака ориентираниот многуаголник збирот на векторите положени на страните е еднаков на $\vec{0}$.



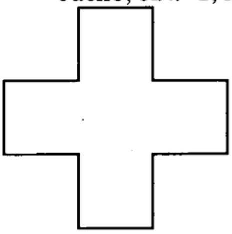
Цртеж 1

Под вид на страни *(x)* ќе го подразбираме множеството на страни кои се паралелни и еднакви со страната *x*. Од условот в) заклучуваме дека нашиот "добар" многуаголник има најмногу два вида страни. Но, "добар" многуаголник не може да биде изграден само од еден вид страни, бидејќи во тој случај ќе постојат две страни од ист вид кои се соседни и аголот меѓу нив ќе биде еднаков на 0 или π, што противречи на условот а). Аналогно се заклучува дека две соседни страни не можат да бидат од ист вид. Значи, нашиот "добар" многуаголник има точно два вида страни *(x)* и *(y)*, кои наизменично се надоврзуваат, па затоа бројот на страните на секој "добар" многуаголник е $n=2n_1$, каде n_1 е бројот на страните од видот *(x)*, односно од видот *(y)*. Исто така, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должините на страните кај "добриот" многуаголник се еднакви на 1 и дека страните кои припаѓаат на различните видови се заемно нормални.

Сега почетното теме на претходно воведената ориентација на "добар" многуаголник да го поставиме во координатниот почеток, а страните на многуаголникот да бидат паралелни со координатните оски. Јасно, при ваквото поставување темињата на многуаголникот ќе имаат целобројни координати и при надоврзување на страните од типот *(x)* првата координата се менува за ±1, а исто така при надоврзувањето на страните од типот *(y)* втората координата се менува за ±1. Бидејќи тргнуваме и се враќаме во координатниот почеток бројот на промените по координати за +1 мора да биде еднаков на бројот на промените по координати за -1, т.е.

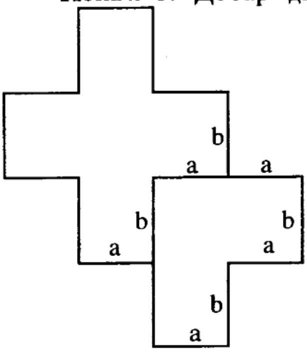
$$n_1 = 2k,\ \ k \in N,\ \ \text{т.е. } n=4k,\ k\in N.$$

Ќе определиме за кои природни броеви k постои "добар" многуаголник. Јасно, за k=1, квадратот со страна 1 е "добар" многуаголник.


Цртеж 2

Нека k=2 и нека претпоставиме дека постои "добар" многуаголник со 8 страни. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека првото, второто и третото теме имаат координата (0,0); (1,0) и (1,1) соодветно. Ако имаме предвид дека, при овие почетни услуви целиот многуаголник се наоѓа во квадратот чии темиња се: (-1,2);(2,2);(2,-1) и (-1,-1) испитувајќи ги сите можности заклучуваме дека не постои "добар" осумаголник (цртеж 1).

Нека k=3. "Добар" дванаесетаголник е прикажан на цртеж 2.



Цртеж 3

Сега ќе дадеме индуктивен доказ дека постои "добар" многуаголник за k>3. Забележуваме дека кај дванаесетаголникот имаме еден дел од облик *(x)-(y)-(x)-(y)*. Овој дел го заменуваме со дел од облик *(x)-(y)-(x)-(y)-(x)-(y)-(x)-(y)* како на цртеж 2. При оваа замена бројот на страните се зголемува за 4, а добиениот шеснаесетаголник кој исто така е "добар" има дел од облик *(x)-(y)-(x)-(y)*. Нека сега претпоставиме дека за некој k>3 постои "добар" многуаголник кој содржи дел од облик *(x)-(y)-(x)-(y)*. Ако овој дел го замениме со дел од облик *(x)-(y)-(x)-(y)-(x)-(y)-(x)-(y)* добиваме "добар" многуаголник за k+1 и овој многуаголник содржи дел од облик *(x)-(y)-(x)-(y)*.

Според тоа, за секој k>3 постои "добар" многуаголник.

Конечно, "добар" многуаголник постои за секој n=4k, k=1,3,4,5,... .

5. Да се најде најголемиот природен број n за кој постојат n прави во просторот кои минуваат низ иста точка и аглите меѓу било кои две од нив се еднакви. (Агол меѓу две прави кои се сечат се дефинира да биде помалиот од двата агли што ги зафаќаат тие прави).

Решение. Ако правите се паралелни на векторите

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},-\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},-\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right),\ (1,0,0)$$

тогаш тие ги задоволуваат условите на задачата.

Ќе докажеме дека не постојат седум прави кои ги задоволуваат условите на задачата. Нека претпоставиме дека постојат прави $l_i,\ i=1,2,3,4,5,6,7$, кои го задоволуваат условот на задачата и нека $\vec{r}_i,\ i=1,2,3,4,5,6,7$ се единечни вектори паралелни на дадените прави. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека

$$\vec{r}_1=(1,0,0);\ \vec{r}_2=(k,0,c),c\neq 0;\ \vec{r}_i=(a_i,b_i,c_i),\ i=3,4,5,6,7.$$

Бидејќи векторите $\vec{r}_i,\ i=1,2,3,4,5,6,7$ се единечни, од условот на задачата следува дека попарните скаларни производи се еднакви. Значи,

$$\vec{r}_1\vec{r}_2=(1,0,0)(k,0,c)=k;\ \vec{r}_1\vec{r}_i=(1,0,0)(a_i,b_i,c_i)=a_i,\ i=3,4,5,6,7,$$

па затоа $a_i=\pm k,\ i=3,4,5,6,7$, т.е. барем кај три од векторите $\vec{r}_i,\ i=3,4,5,6,7$ првата координата е еднаква на k. Нека се тоа векторите $\vec{r}_i,\ i=3,4,5$, т.е.

$$\vec{r}_i=(k,b_i,c_i),\ i=3,4,5.$$

Сега, $\vec{r}_2\vec{r}_i=(k,0,c)(k,b_i,c_i)=k^2+cc_i,\ i=3,4,5$ и како $\vec{r}_2\vec{r}_3=\vec{r}_2\vec{r}_4=\vec{r}_2\vec{r}_5$ добиваме

$$k^2+cc_3=k^2+cc_4=k^2+cc_5$$

односно

$$c(c_3-c_4)=0$$
$$c(c_3-c_5)=0$$

и како $c\neq 0$ добиваме $c_3=c_4=c_5$. Но, векторите $\vec{r}_i,\ i=3,4,5$, се единечни, па затоа $k^2+b_3^2+c_3^2=k^2+b_4^2+c_3^2=k^2+b_5^2+c_3^2=1$ односно $b_3^2=b_4^2=b_5^2$ што значи $b_3,b_4,b_5\in\{b_3,-b_3\}$. Според тоа, $b_3=b_4$ или $b_3=b_5$ или $b_4=b_5$, а тоа значи $\vec{r}_3=\vec{r}_4$ или $\vec{r}_3=\vec{r}_5$ или $\vec{r}_5=\vec{r}_4$, што претставува противречност.