XXVII олимпијада

1. Нека d е природен број различен од 2, 5, 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така што $ab-1$ не е точен квадрат на цел број.

Решение. Доволно е да докажеме дека за било кој природен број d барем еден од броевите $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ не е точен квадрат. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат цели броеви x, y, z такви што

$$2d = x^2+1,\ \ 5d = y^2+1,\ \ 13d = z^2+1.$$

Според тоа x е непарен, т.е. $x = 2x'+1$, па $2d = 4x'^2+4x'+2$, што значи дека d е непарен; но тогаш y и z се парни. Нека u и v се цели броеви такви што $y = 2u$, $z = 2v$. Од $8d = z^2 - y^2$ добиваме $2d = (u-v)(u+v)$. За десната страна да е делива со 2 мора u и v да се со иста парност, но тогаш таа е делива и со 4, а левата не е делива со 4, што е противречност.

2. Во рамнина е даден $\triangle A_1A_2A_3$ и точка P_0. Ставаме $A_s = A_{s-3}$ за секој цел број $s \geq 4$. Конструираме низа точки $P_0, P_1, P_2, \ldots$ таква што секоја точка P_{k+1} се добива со ротација на точката P_k околу точката A_{k+1} за агол од 120° во насока на насоката на движењето на стрелките на часовникот.
Докажи дека, ако $P_{1986} = P_0$, тогаш $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.

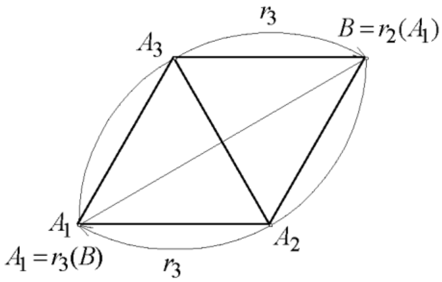
Решение. *Прв начин.* Нека r_i е ротација околу A_i за 120° во насока на движењето на стрелките на часовникот. Композицијата $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ е транслација за некој вектор $\vec{v}$, бидејќи збирот на аглите на ротација на r_1, r_2, r_3 е 360°. Според тоа, $r_{1986} \circ r_{1985} \circ \ldots \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1$ е транслација за $662\vec{v}$, па затоа

$$(r_{1986} \circ r_{1985} \circ \ldots \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1)(P_0) = P_{1986} = P_0$$

е можно ако и само ако $\vec{v} = \vec{o}$, т.е. $r_3 \circ r_2 \circ r_1 = e$ е идентичното пресликување, кое ќе го примениме на A_1. При тоа важи:

$$r_1(A_1) = A_1;\quad r_2 r_1(A_1) = r_2(A_1)$$

и нека последната точка ја означиме со B, т.е. $r_2(A_1) = B$. Тогаш,



$$A_1 = r_3 r_2 r_1(A_1) = r_3(B).$$

Значи,

$$A_1 = r_3(B)\,, \quad r_2(A_1) = B\,.$$

Рамнокраките триаголници A_1A_2B и BA_3A_1 имаат исти агли ($\measuredangle A_2 = \measuredangle A_3 = 120^\circ$) и заедничка страна A_1B , па според тоа се складни. Значи, $A_1A_2BA_3$ е ромб со агли 60° и 120° , па според тоа триаголникот $A_1A_2A_3$ е рамностран.

Втор начин. Дадената рамнина ја разгледуваме како комплексна и притоа претпоставуваме дека координатниот почеток е во P_0 . Нека на точките $A_1, A_2, A_3,...$ соодветствуваат комплексните броеви $z_1, z_2, z_3,...$ и притоа важи

$$z_1 = z_4 = z_7 = \dots,\ z_2 = z_5 = z_8 = \dots,\ z_3 = z_6 = z_9 = \dots \qquad (1)$$

и нека на точките $P_0, P_1, P_2,...$ соодветствуваат комплексните броеви $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$. Фактот дека точката P_{k+1} се добива со ротација на точката P_k околу точката A_{k+1} за агол од 120° во насока на насоката на движењето на стрелките на часовникот се запишува како

$$\omega_{k+1} = z_{k+1} + (\omega_1 - z_{k+1})\varepsilon,\ \ k = 0,1,2,3,\dots,$$

каде што $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$. Значи,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (1-\varepsilon)z_1,\\
\omega_2 &= (1-\varepsilon)z_2 + \varepsilon\omega_1,\\
\omega_3 &= (1-\varepsilon)z_3 + \varepsilon\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\omega_{1986} &= (1-\varepsilon)z_{1986} + \varepsilon\omega_{1985},
\end{aligned}$$

па оттука

$$0 = \omega_{1986} = (1-\varepsilon)(z_{1986} + \varepsilon z_{1985} + \varepsilon^2 z_{1984} + \dots + \varepsilon^{1985} z_1)\,.$$

Бидејќи $\varepsilon \neq 1$, а имајќи ја предвид (1) се добива

$$z_3 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_1 = 0\,.$$

Во последната равенка заменуваме $\varepsilon = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и добиваме

$$z_3 - z_1 = (\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})(z_2 - z_1)\,,$$

што значи дека векторот $\overrightarrow{A_1A_3}$ се добива од векторот $\overrightarrow{A_1A_2}$ со ротација околу A_1 за агол $\frac{\pi}{3}$ во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Последното значи дека $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.

3. На темињата на правилен петаголник им се придружени цели броеви, чиј збир е природен број. Ако на три последователни темиња им соодветствуваат броевите x, y, z и $y < 0$, тогаш се врши следнава операција:

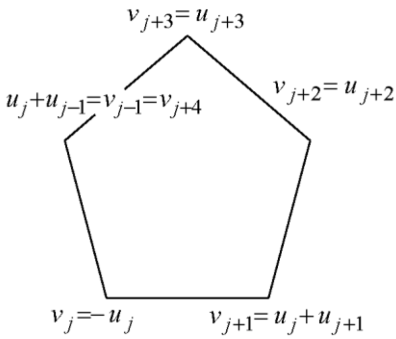
броевите x, y, z се заменуваат со $x+y, -y, z+y$, соодветно.

Оваа операција се изведува се додека барем еден од петте броеви е негативен. Дали постапката ќе заврши по конечно многу чекори?

Решение. Нека $u_1, ..., u_5$ се цели броеви и барем еден од нив е негативен. Еден од овие броеви да го означиме со u_j.

Нека $v_1, ..., v_5$ се цели броеви добиени од $u_1, ..., u_5$ со примена на операцијата од задачата, така што $x = u_{j-1}$, $y = u_j$, $z = u_{j+1}$ (применето е циклично индексирање $u_i = u_{i+5}$), т.е. $v_{j-1} = u_{j-1} + u_j$, $v_j = -u_j$, $v_{j+1} = u_{j+1} + u_j$. Значи, работиме со подредени петорки

$$U = (u_1, ..., u_5), V = (v_1, ..., v_5).$$



Ја разгледуваме функцијата F која на секоја петорка $X = (x_1, ..., x_5)$ и придружува број $\sum_{i=1}^{5} (x_i - x_{i-1})^2$ (секаде се применува циклично индексирање).

$$\begin{aligned}
F(V) &= \sum_{i=j}^{j+4} (v_{i+1} - v_{i-1})^2 \\
&= (u_j + u_{j+1} - u_j - u_{j-1})^2 + (u_{j+2} + u_j)^2 + \\
&\quad + (u_{j+3} - u_j - u_{j+1})^2 + (u_j + u_{j-1} - u_{j+2})^2 + (-u_j - u_{j+3})^2 \\
&= (u_{j+1} - u_{j-1})^2 + (u_{j+2} + u_j)^2 + (u_{j+3} - u_{j+1} - u_j)^2 + \\
&\quad + (u_{j-1} - u_{j+2} + u_j)^2 + (u_j + u_{j+3})^2 \\
&= F(U) + [(u_{j+2} + u_j)^2 - (u_{j+2} - u_j)^2] + \\
&\qquad + [(u_{j+3} - u_{j+1} - u_j)^2 - (u_{j+3} - u_{j+1})^2] + \\
&\qquad + [(u_{j-1} - u_{j+2} + u_j)^2 - (u_{j-1} - u_{j+2})^2] + \\
&\qquad + [(u_j + u_{j+3})^2 - (u_j - u_{j+3})^2] \\
&= F(U) + u_j(4\,u_{j+2} - 2\,u_{j+3} + 2\,u_{j+1} + u_j + 2\,u_{j-1} - 2\,u_{j+2} + u_j + 4\,u_{j+3}) \\
&= F(U) + u_j(2\,u_{j+2} + 2\,u_{j+1} + 2\,u_j + 2\,u_{j+3} + 2\,u_{j-1}) \\
&= F(U) + 2\,u_j S,
\end{aligned}$$

при што $S = u_1 + ... + u_5 = v_1 + ... + v_5$ (т.е. во секој чекор се појавува исто S). Бидејќи $S > 0$, $F(V) < F(U)$, па според тоа вредностите на F образуваат строго опаѓачка низа ненегативни цели броеви. Секоја таква низа е конечна.

4. Нека A и B се соседни темиња на правилен $n-$аголник со центар во O, $n \geq 5$. Триаголникот XYZ, кој е складен со триаголникот OAB, на почеток е поставен така што точките X, Y, Z се совпаѓаат со точките O, A, B, соодветно. Потоа $\triangle XYZ$ се движи во рамнината на $n-$аголникот, така што темињата Y и Z остануваат на страните на $n-$аголникот. Каква фигура ќе опише точката X кога точката Y еднаш ќе го помине целиот $n-$аголник?

Решение. Нека A, B, C се три последователни темиња на $n-$аголникот. Разгледуваме што се случува со X кога Y се движи од A до B, а Z од B до C. Кога Y се совпаѓа со A или B јасно е дека X се совпаѓа со O. Затоа ќе го разгледаме случајот кога Y е внатрешна точка на отсечката AB, а Z е внатрешна точка на отсечката BC.

Бидејќи

$$\measuredangle ZXY + \measuredangle YBZ = \measuredangle BOA + \measuredangle ABO + \measuredangle OAB = 180^\circ,$$

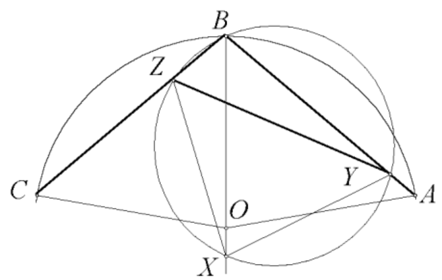
кружницата опишана околу триаголникот XYZ минува низ B. Радиусот на таа кружница го пресметуваме од триаголникот OAB, бидејќи

$$\measuredangle A = \measuredangle B = \frac{(n-2)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Воведуваме ознака $R = \overline{OA}$ и добиваме

$$2r = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})} = \frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

каде r е радиус на опишаната кружница околу триаголникот OAB.



Со α го означуваме аголот со големина $\frac{\pi}{n}$. Аглите XYZ и XBZ се еднакви како агли над ист лак. Затоа

$$\measuredangle OBZ = \measuredangle OBC = \measuredangle XYZ = \measuredangle XBZ$$

што значи дека точките X, O, B се колинеарни. BX е тетива на кружницата и како B се наоѓа меѓу Y и Z, добиваме дека таа е подолга од BO, а најдолга е кога се спвпаѓа со дијаметарот на таа кружница. Максимална должина OX достигнува кога Y и Z се симетрични во однос на BO и изнесува

$$d = 2r - R = R(\frac{1}{\cos\alpha} - 1).$$

Бараното множество е правилна ѕвезда која се состои од n сегменти со должина d, при што секој почнува од O и е насочен кон теме од $n-$аголникот.

5. Определи ги сите функции f дефинирани на множеството ненегативни реални броеви, со ненегативни реални вредности, за кои важи

(i) $f[xf(y)]f(y) = f(x+y)$, за секои $x, y \geq 0$;

(ii) $f(2) = 0$;

(iii) $f(x) \neq 0$, за секој $0 \leq x < 2$.

Решение. Да претпоставиме дека f ги задоволува условите на задачата. Тогаш за $z \geq 2$ добиваме

$$f(z) = f[(z-2)+2] = f[(z-2)f(2)]f(2) = 0 .$$

Заради тоа (земајќи го во предвид (iii))

$$f(z) = 0 \text{ ако и само ако } z \geq 2 .$$

Ако $f(u) = 0$, тогаш $u \geq 2$. Ќе го направиме тоа за различни погодно избрани u. Нека $0 \leq y < 2$. За $x = 2 - y$ добиваме

$$f[(2-y)f(y)]f(y) = f(2) = 0$$

и бидејќи $f(y) \neq 0$, добиваме

$$f[(2-y)f(y)] = 0 \;\Rightarrow\; (2-y)f(y) \geq 2 \;\Rightarrow\; f(y) \geq \tfrac{2}{2-y} .$$

Ако ставиме $x = \frac{2}{f(y)}$, добиваме

$$0 = f(2)f(y) = f(\tfrac{2}{f(y)} + y) \text{ и } \tfrac{2}{f(y)} + y \geq 2 \text{ односно } f(y) \leq \tfrac{2}{2-y} .$$

Значи, бараната функција мора да е од облик

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & 0 \leq y < 2 \\ 0, & y \geq 2 . \end{cases}$$

Лесно се проверува дека таа навистина ги задоволува условите на задачата. Ако $xf(y) \geq 2$, тогаш $y < 2$ и $f(y) = \frac{2}{2-y}$, па според тоа $\frac{2x}{2-y} \geq 2$ што значи $x + y \geq 2$, па според тоа $f(x+y) = 0$, а исто како и $f[xf(y)]f(y) = 0$ бидејќи $f[xf(y)] = 0$.

Ако $xf(y) < 2$ и $y \geq 2$, тогаш $f(y) = 0$, па според тоа $f[xf(y)]f(y) = 0$, а иста како и $f(x+y) = 0$, (бидејќи $x + y \geq 2$).

Ако $xf(y) < 2$ и $y < 2$ тогаш $f(y) = \frac{2}{2-y}$, па затоа $\frac{2x}{2-y} < 2$ што значи $x + y < 2$, па според тоа

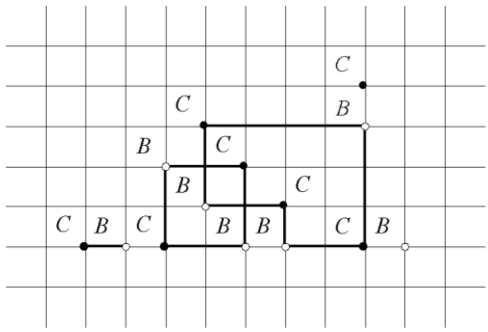
$$f[xf(y)]f(y) = f(\tfrac{2x}{2-y})f(y) = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}} \cdot \frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y) .$$

6. Дадено е конечно множество точки во рамнината, такво што секоја точка има целобројни координати. Дали е можно некои точки од тоа множество да се обојат со црвена боја, а преостанатите со бела боја, така што за секоја права L која е паралелна со било која од координатните оски, разликата меѓу бројот на белите и бројот на црвените точки на L да биде -1,0 или 1?

Решение. Одговорот е позитивен, т.е. секогаш е можно на бараниот начин да се обојат точките.

Нека L е произволна права паралелна со една од координатните оски која го пресекува множеството A. Нека $P_1, P_2, ...$ се точки од $A \cap L$ подредени така што слободните координати им растат (т.е. ако L е паралелна со $x-$оска, сите точки имаат иста $y-$координата и точките $P_1, P_2, ...$ ги подредуваме така што $x-$координатите им растат; аналогно и во случајот кога L е паралелна со $y-$оската).

Ги поврзуваме P_1 со P_2, P_3 со P_4 итн. со отсечки, при што евентуално ќе остане една слободна точка. Тоа го правиме со секоја таква права L. Бидејќи A е конечно множество имаме конечно многу такви прави. На тој начин добивме фамилија од отсечки, со тоа што секоја точка од A припаѓа најмногу на две од тие отсечки. Унијата на овие отсечки се распаѓа на полигонални криви (затворени или незатворени) без заеднички темиња и определн број изолирани точки).



Затворените полигонални линии содржат парен број отсечки бидејќи две последователни отсечки се нормални меѓу себе. Ги боиме точките на секоја полигонална линија редоследно: црвено, бело, црвено, бело итн. (што е можно согласно со парноста во случај на затворени криви), а преостанатите изолирани точки по желба. Таквиот начин на боење е саканиот: на секоја права L точките се во парови, во кои се обоени различно, и постои најмногу една точка без свој пар.