Сојузен натпревар 1984

I година

1. Бројот a е добиен така што броевите од 1 до 101 се запишани еден по друг. Докажи дека a е сложен број. Дали a е квадрат на природен број?

Решение. Во броевите од 1 до 99 секоја цифра освен нулата се појавува по 20 пати, па затоа збирот на цифрите на бројот a еднаков на

$$20(1+2+...+9)+1+1+1=903.$$

Според тоа, бројот a е делив со 3, но не е делив со 9. Значи, а е сложен број и не е квадрат на природен број.

2. Нека a,b,c се три меѓусебно различни реални броеви кои го задоволуваат равенството

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0.$$

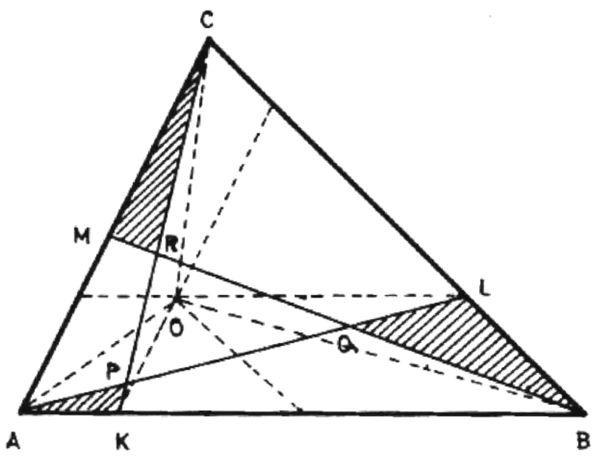
Докажи дека

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}0&=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\\&=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\&=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.\end{aligned}$$

3. Нека O е внатрешна точка на триаголникот ABC. Нека K,L,M се точки во кои правите кои минуваат низ O, а се паралелни со страните CA,AB,BC ги сечат редоследно страните AB,BC,CA. Понатаму, нека P,Q,R се точките во кои редоследно се сечат правите CK и AL, AL и BM, BM и CK. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците AKP, BLQ и CMR е еднаков на плоштината на триаголникот PQR.



Решение. Триаголниците ABL и ABO имаат заедничка основа и еднакви висини, па затоа $P_{ABL}=P_{ABO}$, види цртеж. Слично важи $P_{BCM} = P_{BCO}$ и $P_{CAK} = P_{CAO}$. Затоа

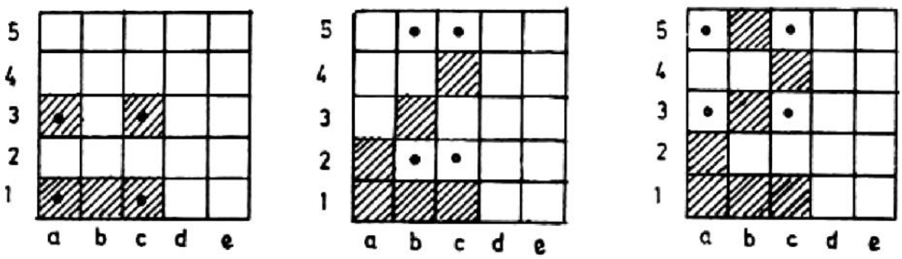
$$P_{ABC} = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CAO} = P_{ABL} + P_{BCM} + P_{CAK}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} P_{PQR} &= P_{ABC} - (P_{ABL} + P_{BCM} + P_{CAK}) + P_{AKP} + P_{BLQ} + P_{CMR} \\ &= P_{AKP} + P_{BLQ} + P_{CMR}. \end{aligned}$$

4. Квадрат со страна 5 е поделен на 25 единечни квадрати и секој од нив е обоен со една од две бои. Докажи дека постојат четири истобојни единечни квадрати чии центри се темиња на правоаголник со страни паралелни на страните на квадратот. Докажи дека тврдењето на важи за квадрат со страна 4.

Решение. Редовите на дадената табела да ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, а колоните со a,b,c,d,e, аналогно како вообичаените ознаки на шаховската табла (цртежи а), б) и в)). Нека боите споменати во задачата се сина (сините полиња се штрафираните) и црвени. Во првата редица најмалку три полиња се истобојни и заради определеност да претпоставиме дека тоа се полињата $a1, b1, c1$ кои се сини. Ако во било која редица од 2 до 5 во првите три колони има две сини полиња (на пример како на цртежот а), полињата $a3$ и $b3$), тогаш бараниот правоаголник е определен.

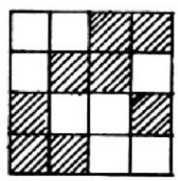


а) б) в)

Затоа да претпоставиме дека во секоја од следниве четири тројки

$$(a2,b2,c2), \quad (a3,b3,c3), \quad (a4,b4,c4), \quad (a5,b5,c5)$$

барем по две полиња се црвени. Ако во една од тие тројки сите полиња се црвени (на цртежот б) тоа е тројката $(a5,b5,c5)$), тогаш еднобоен правоаголник лесно се определува. Ако во секоја од тие четири тројки има точно по две црвени полиња, тогаш имаме три можни распореди на црвените полиња, па од принципот на Дирихле следува барем во две од нив тие полиња се исто распоредени, што повторно го дава бараниот правоаголник. На цртежот в) тоа е правоаголникот $a3, c3, a5, c5$.



Дека тврдењето не важи за квадрат со страна 4 покажува цртежот десно.

II година

1. Нека p_n е $n-$тиот прост број и нека $\pi(n)$ е бројот на простите броеви кои не се поголеми од n. Ако

$$A=\{n+p_n \mid n\in\mathbb{N}\} \text{ и } B=\{n+\pi(n)+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$$

докажи дека $A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Решение. Од дефиницијата на функцијата π следува:

i) $\pi(p_k)=k$ за секој $k\in\mathbb{N}$,

ii) $\pi(n)\le\pi(n+1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$,

iii) $\pi(n)<\pi(n+1)$, ако $n+1$ е прост број.

Нека претпоставиме дека за некои m и n важи

iv) $m+p_m=n+\pi(n)+1$.

Можни се два случаи: $p_m\le n$ и $p_m>n$. Ако $p_m\le n$, тогаш ако се земе предвид дека $m=\pi(p_m)\le\pi(n)$ добиваме

$$m+p_m\le n+\pi(n)<n+\pi(n)+1,$$

што противречи на *iv*). Ако $p_m>n$, тогаш од $m=\pi(p_m)>\pi(n)$ следува $m\ge\pi(n)+1$ и $m+p_m>n+\pi(n)+1$ што противречи на *iv*). Според тоа $A\cap B=\varnothing$.

Ќе докажеме дека $A\cup B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Јасно, $1\notin A,B$ и $2\in B$. Нека $n>2$ е произволен природен број кој не припаѓа на множеството A. Ќе докажеме дека $n\in B$. Бидејќи постои $m\in\mathbb{N}$ т.ш. $m+p_m<n<m+1+p_{m+1}$, т.е. p, добиваме дека $\pi(n-m-1)=m$, па значи

$$n=\pi(n-m-1)+(n-m-1)+1\in B.$$

2. Ако реалните броеви x,y,z ги задоволуваат равенствата

$$x+y+z=2 \text{ и } xy+yz+zx=1,$$

докажи дека тие припаѓаат на интервалот $[0,\frac{4}{3}]$.

Решение. Од $x+y+z=2$ следува $x+y=2-z$, а од $xy+yz+zx=1$ следува

$$xy=1-z(x+y)=1-z(2-z)=(1-z)^2.$$

Затоа реалните броеви x и y се решенија на квадратната равенка по t:

$$t^2+(z-2)t+(1-z)^2=0,$$

што значи дека таа има ненегативна дискриминанта, т.е. $(z-2)^2-4(1-z)^2\ge0$. Отука следува $z(4-3z)\ge0$, што е еквивалентно со $z\in[0,\frac{4}{3}]$. Аналогно се докажува дека броевите x и y припаѓаат на интервалот $[0,\frac{4}{3}]$.

3. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што

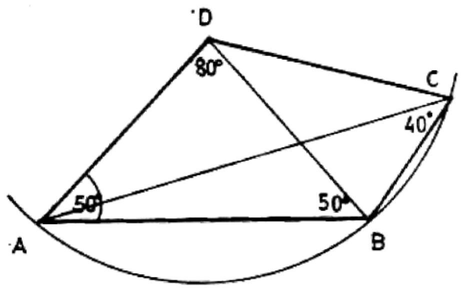
$$\measuredangle ABD=50^\circ,\ \measuredangle ADB=80^\circ,\ \measuredangle ACB=40^\circ,\ \measuredangle DBC=\measuredangle BDC+30^\circ.$$

Пресметај го $\measuredangle DBC$.

Решение. Бидејќи во триаголникот ABD важи $\measuredangle ABD=50^\circ$ и $\measuredangle ADB=80^\circ$, добиваме $\measuredangle DAB=50^\circ$. Затоа $DA=DB$ (цртеж десно). Сега, бидејќи

$$\measuredangle ADB=80^\circ=2\measuredangle BCA$$

и точките C и D се од иста страна на правата AB, заклучуваме дека точката C припаѓа на кружницата со центар D и радиус $DA=DB$. Затоа триаголникот BCD е рамнокрак, па од



$$\measuredangle BDC+2\measuredangle DBC=180^\circ \text{ и } \measuredangle DBC=\measuredangle BDC+30^\circ$$

следува дека $\measuredangle DBC=70^\circ$.

4. Во некоја држава меѓу секои два града постои еднонасочна авионска линија. Докажи дека постои град од кој во секој друг град може да се стигне со најмногу едно преседнување.

Решение. Тврдењето на задачата ќе го докажеме со математичка индукција. Не е тешко да се провери дека тврдењето важи за држава со најмногу три града. Ќе претпоставиме дека тврдењето важи за држава со n градови и ќе докажеме дека тоа важи за произволна држава со $n+1$ град.

Градовите да ги означиме со $A_1,A_2,...,A_{n+1}$. Според индуктивната претпоставка во делот од државата кој ги содржќи само градовите $A_1,A_2,...,A_n$ постои град (нека тоа е, на пример, градод A_n) од кој во секој друг град $A_i, i=1,2,...,n-1$ може да се стигне со најмногу едно преседнување. Во натамошните разгледувања $A_i\to A_j$ ќе значи дека авионска линија води од градот A_i во градот A_j.

Ако важи $A_n\to A_{n+1}$, тогаш A_n е градот со саканото својство. Нека претпоставикме дека важи $A_{n+1}\to A_n$. Јасно, од градот A_n тргнува барем една авионска линија. Градовите $A_1,A_2,...,A_{n-1}$ ги нумерираме така што да важи $A_n\to A_i$ за $i=1,2,...,k$ и $A_i\to A_n$ за $i=k+1,...,n-1$, каде $k\in\{1,2,...,n-1\}$. Ако за некој $i\in\{1,2,...,k\}$ важи $A_i\to A_{n+1}$, тогаш повторно A_n е град со саканото својство. Ако $A_{n+1}\to A_i$ за секој $i\in\{1,2,...,k\}$, тогаш градот A_{n+1} е таков што од него до секој друг град може да се стигне со најмногу едно преседнување. Навистина, за да од него стигнеме во некој од градовите A_j, $j=k+1,...,n-1$, можеме наместо маршрутата $A_n \to A_i \to A_j$, која според индуктивната претпоставка постои за некој $i \in \{1,2,...,k\}$, да ја користиме маршрутата $A_{n+1} \to A_i \to A_j$.

III и IV година

1. Определи низа (a_n) која го задоволува условот

$$1+\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}}a_d = 0,\ n=1,2,3,... .$$

Решение. Лесно се проверува дека важи

$$a_1=1, a_2=2, a_3=0, a_4=4, a_5=0, a_6=0, a_7=0, a_8=8, a_9=0.$$

Ќе докажеме дека

$$a_n=\begin{cases} n, & n=2^k,\ \text{за некој } k\in\mathbb{N}_0,\\ 0, & n\neq 2^k,\ \text{за секој } k\in\mathbb{N}_0.\end{cases}$$

За $n=1$ тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите природни броеви помали или еднакви на некој $n\in\mathbb{N}$. Нека $n+1=2^r s$, каде s е непарен број. Можни се два случаи.

а) $s=1$, т.е. $n+1=2^r$. Тогаш условот на задачата, со користење на индуктивната претпоставка, се сведува на

$$1+(1+2+4+...+2^{r-1})-a_{n+1}=0,$$

од каде што следува $a_{n+1}=2^r=n+1$.

б) $s>1$. Сега од условот на задачата следува

$$1+(1+2+4+...+2^{r-1})-2^r-a_{n+1}=0,$$

од каде што следува $a_{n+1}=2^r-2^r=0$.

Со тоа наведеното тврдење е индуктивно докажано.

2. Докажи дека за секој природен број n равенката

$$(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^n x+(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} y=1$$

има точно едно целобројно решение.

Решение. Да означиме $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Имаме $t^2+t+1=0$. Лесно се докажува дека за ниту еден природен број n дадената равенка не може да има повеќе од едно целобројно решение. Навистина, ако за два пара (x,y) и (x',y') цели броеви важи

$$t^n x+t^{n+1}y=1 \text{ и } t^n x'+t^{n+1}y'=1,$$

тогаш важи $t^n(x-x')+t^{n+1}(y-y')=0$, од каде добиваме $x-x'+t(y-y')=0$, од што бидејќи t е ирационален број ќе следува $x=x'$ и $y=y'$.

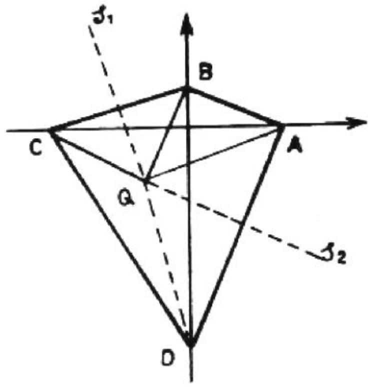
Сега, со индукција ќе докажеме дека за секој природен број n дадената равенка има целобројно решение. За $n=1$ тоа решение е $x=1, y=1$. Нека претпоставиме дека $t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1}=1$ за целите броеви x_{n-1} и y_{n-1}. Тогаш за $x_n = x_{n-1}+y_{n-1}$ и $y_n = x_{n-1}$ важи

$$\begin{aligned} t^n x_n + t^{n+1} y_n &= t\cdot t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1}+t^2 t^{n-1}x_{n-1} \\ &= (t+t^2)t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1} \\ &= t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1}=1, \end{aligned}$$

па затоа парот (x_n, y_n) цели броеви е решение на равенката $t^n x + t^{n+1} y = 1$, со што доказот е завршен.

Забелешка. Од решението на задачата следува дека $(x_n, y_n)=(f_{n+1}, f_n)$, каде $f_i, i=1,2,3,,...$ е низата Фибоначиеви броеви.

3. Даден е четириаголник $ABCD$. Докажи го тврдењето: Ако постои точка P таква што триаголниците ABP и CDP се еднакво ориентирани рамнокраки правоаголни триаголници со прави агли во темето P, тогаш постои точка Q таква што триаголниците BCQ и DAQ се рамнокраки правоаголни триаголници со прави агли во темето Q.



Решение. Од условот на задачата следува дека ротацијата околу точката P за 90° ја пресликува точката A во точката B, а точката C во точката D, што значи отсечката AC се пресликува во во отсечката BD, па затоа $AC=BD$ и $AC\perp BD$. Воведуваме координатен систем чиј почеток е пресекот O на правите AC и BD, така што точката A припаѓа на позитивниот дел на $x-$оската, а точката B на позитивниот дел на $y-$оската (цртеж десно). Без ограничување на општоста можеме да земеме $AC=BD=1$. Нека точките A и B имаат соодветно координати $(a,0)$ и $(0,b)$. Тогаш точките C и D имаат координати соодветно $(a-1,0)$ и $(0,b-1)$. Правата BC има коефициент на правец $\frac{b}{1-a}$, па симетралата s_1 на отсечката BC која ја содржи средината $(\frac{a-1}{2},\frac{b}{2})$ на оваа отсечка има равенка

$$y-\tfrac{b}{2}=\tfrac{a-1}{b}(x-\tfrac{a-1}{2}).$$

Слично се добива дека симетралата s_2 на отсечката DA има равенка

$$y-\tfrac{b-1}{2}=\tfrac{a}{b-1}(x-\tfrac{a}{2}).$$

Правите s_1 и s_2 се сечат во точката $Q(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b-1}{2})$. Со непосредна проверка се докажува дека $BQ \perp CQ$ и $DQ \perp AQ$, т.е. точката Q ги задоволува условите на здачата.

4. Нека S е множество од n елементи. Определи го најголемиот број m за кој постои фамилија $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ од различни непразни подмножества на множеството S таква што пресекот на секои три множества од оваа фамилија е празното множество.

Решение. Нека $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ е фамилија различни непразни подмножества на множеството $S = \{1, 2, ..., n\}$ таква што пресекот на било кои три нејзини елементи е празно множество. Тоа значи дека секој елемент на множеството S ќе биде елемент најмногу на две од множествата $S_1, S_2, ..., S_m$. Ако со $|S_i|$ го означиме бројот на елементите на множеството S_i, добиваме дека $\sum_{i=1}^{m} |S_i| \leq 2n$.

Од друга страна, ако со k го означиме бројот на едноелементните подмножества S_i кои се членови на дадената фамилија, тогаш $\sum_{i=1}^{m} |S_i| \geq k + 2(m-k)$. Од последните две неравенства добиваме $2m \leq 2n + k$. Но, $k \leq n$, па затоа $2m \leq 3n$, односно $m \leq [\frac{3n}{2}]$.

Следниов пример

$$\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, ..., \{2[\tfrac{n}{2}]-1, 2[\tfrac{n}{2}]\}$$

покажува дека бараната максимална вредност за m е $[\frac{3n}{2}]$.