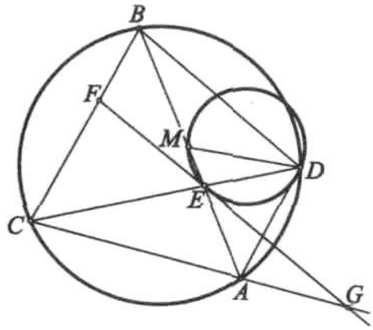
XXXI олимпијада

1. Тетивите AB и CD се сечат во точката E во внатрешноста на дадената кружница. Нека M е внатрешна точка на отсечката BE. Тангентата во точката E на опишаната кружница околу триаголникот DEM ги сече правите BC и AC во точките F и G, соодветно. Пресметај $\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$, ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=t$.

Решение. Бидејќи аголот меѓу тангентата и секантата низ допирната точка е еднаков на аголот над тетивата која припаѓа на секантата добиваме

$$\measuredangle GEA=\measuredangle EDM .$$



Значи, (цртеж десно):

$$\begin{aligned}\measuredangle GEC &= \measuredangle AEC+\measuredangle GEA\\ &=\measuredangle MED+\measuredangle EDM\\ &=180^\circ-\measuredangle DME\\ &=\measuredangle BMD.\end{aligned}$$

Исто така $\measuredangle DBM=\measuredangle ECA$ (како агли над иста тетива AD), па триаголниците BDM и CGE имаат еднакви агли кај темињата B и C, односно, M и E, од каде следува дека тие се слични. Од сличноста на триаголниците BDM и CGE следува:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{EG}} \quad\Rightarrow\quad \overline{BM}\cdot\overline{EG}=\overline{DM}\cdot\overline{CE} . \tag{1}$$

Понатаму, $\measuredangle FCE=\measuredangle MAD$ (како агли над иста тетива) и

$$\measuredangle CEF=180^\circ-(\measuredangle AEC+\measuredangle GEA)=180^\circ-(180^\circ-\measuredangle DME)=\measuredangle DME=\measuredangle DMA ,$$

што значи дека триаголниците CEF и AMD се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{DM}} \quad\Rightarrow\quad \overline{AM}\cdot\overline{EF}=\overline{DM}\cdot\overline{CE} . \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $\overline{AM}\cdot\overline{EF}=\overline{BM}\cdot\overline{EG}$, а оттука

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}-\overline{AM}}=\frac{1}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}-1}=\frac{t}{1-t} .$$

2. На кружница е дадено множество E од $2n-1$ ($n\ge 3$) различни точки, меѓу кои точно k точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки такви што во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат се наоѓаат точно n точки од E. Определи го најмалиот број k за кој секое боење на множеството E е „добро“.

Решение. *Прв начин.* Да ги означиме точките со броеви $1,2,...,2n-1$. Ќе го определиме најголемиот број k таков што постои боење кое не е „добро”. Тогаш $k+1$ е решение на задачата.
Нека на некој лак меѓу точките со броеви p и q постојат точно n точки од E (таквите точки ќе ги наречеме „соседни”). Тогаш:

$$|p-q| \equiv n+1 (\text{mod}\, 2n-1).$$

Да ги разгледаме броевите од облик

$$a_i \equiv p+i(n+1)\ (\text{mod}\, 2n-1) \qquad (*)$$

каде $i, a_i \in \{0,1,2,...,2n-2\}$. Секои два последователни члена од оваа низа се парови соседни точки (бидејќи $a_{i+1}-a_i \equiv n+1 (\text{mod}\, 2n-1)$).
Ако боењето не е добро, соседните точки не смеат истовремено да бидат црни. Доволно е точките да се прикажат со помош на членови од низата (*) и да се констатира дека соседните членови не се црни, па обоени се најмногу половина од членовите на низата.
Според Евклидовиот алгоритам важи

$$\text{NZD}(2n-1,n+1) = \text{NZD}(n+1,n-2) = \text{NZD}(n-2,3) \in \{1,3\}.$$

па затоа разликуваме два случаи:
а) $\text{NZD}(n+1,2n-1)=1$. Нека $a_i \equiv 1+i(1+n)\ (\text{mod}\, 2n-1)$. Броевите a_i формираат полн систем на остатоци по модул $2n-1$. Од тука следува дека може да бидат обоени најмногу

$$[\tfrac{2n-1}{2}] = [n-\tfrac{1}{2}] = n-1$$

членови на низата. Сега бараниот број е еднаков на n.
б) $\text{NZD}(n+1,2n-1)=3$. Нека

$$a_i \equiv 1+i(n+1)\ (\text{mod}\, 2n-1),\ \ b_i \equiv 2+i(n+1)\ (\text{mod}\, 2n-1),$$
$$c_i \equiv 3+i(n+1)\ (\text{mod}\, 2n-1), \quad i=0,1,...,\tfrac{2n-1}{3}-1.$$

Низите a_i, b_i, c_i имаат различни членови. Слично како во предходниот случај можеме да обоиме најмногу

$$[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2n-1}{3}] = [\tfrac{n-2}{3}+\tfrac{1}{2}] = \tfrac{n-2}{3}$$

членови на низата. Значи можеме да обоиме најмногу $3\cdot\frac{n-2}{3}=n-2$ точки, а притоа боењето да не биде добро. Решението во овој случај е $n-1$.
Втор начин. Со M да го означиме множеството на тетиви на дадената кружница со крајни точки во множеството E, при што еден од кружните лаци што го определува таа тетива содржи точно n точки од E не сметајќи ги крајните точки на лаците. На кружницата избираме насока, на пример насоката на движење на стрелките на часовникот. Од произволна точка се движиме по избраната насока и ја одделуваме $(n+1)-$та точка по ред во E. Тетивата што ги поврзува овие точки припаѓа на M. Затоа секоја од тетиви-

те во M е страна на еден многуаголник впишан во кружницата и со темиња во множеството E. Да го пресметаме бројот на тие многуаголници. Бидејќи

$$\mathrm{NZD}(2n-1,n+1)=\mathrm{NZD}(n+1,n-2)=\mathrm{NZD}(n-2,3)\in\{1,3\},$$

ќе разгледаме два случаја:

а) Ако $2n-1$ не е делив со 3, тогаш $\mathrm{NZD}(2n-1,n+1)=1$ па секој многуаголник ќе минува низ некое теме. Значи, во овој случај бројот на многуаголниците е 1. Во овој случај најмалата вредност за бројот k со бараното својство е

$$[\tfrac{2n-1}{2}]+1=[n-\tfrac{1}{2}]+1=n.$$

Навистина, ако обоиме само $n-1$ точка, може да обоиме $n-1$ последователни точки и тогаш бараниот услов не е исполнет. Ако обоиме барем n точки од E, тогаш ќе постои тетива во множеството M за која крјните точки се обоени.

б) Ако $2n-1$ е делив со 3, тогаш $\mathrm{NZD}(2n-1,n+1)=3$. Во овој случај бројот на впишаните многуаголници е 3, а секој од нив има $\frac{2n-1}{3}$ темиња. Затоа во овој случај минималната вредност за бројот k е

$$3\cdot[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2n-1}{3}]+1=3\cdot[\tfrac{n-2}{3}+\tfrac{1}{2}]+1=3\cdot\tfrac{n-2}{3}+1=n-1,$$

бидејќи меѓу k обоени точки мора да има повеќе од половина темиња на еден од тие многуаголници.

3. Определи ги сите природни броеви n, $n>1$, такви што $\frac{2^n+1}{n^2}\in\mathbb{N}$.

Решение. Јасно бројот 3 е решение на задачата. Ќе докажеме дека тој е единствено решение. Нека $n=3^k d$, каде $k\geq 0$, $\mathrm{NZD}(d,3)=1$ е решение, т.е. $(3^k d)^2 \mid (2^{3^k d}+1)$, при што d е непарен број. Ќе го користиме идентитетот

$$x^{3^k}+1=(x+1)\prod_{i=0}^{k-1}(x^{2\cdot 3^i}-x^{3^i}+1),$$

кој се докажува со едноставна математичка индукција. За $x=2^d$ имаме:

$$2^{3^k d}+1=(2^d+1)\prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \tag{1}$$

Ако t е непарен број, тогаш

$$2^{2t}-2^t+1\equiv 3 \pmod 9, \tag{2}$$

што лесно се докажува со индукција по t. Заменуваме $t=3^m d$ и добиваме дека:

$$3^k \mid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \quad \text{и} \quad 3^{k+1} \nmid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1).$$

Но, 3^{2k} треба да се содржи во десната страна на (1), а тоа е еквивалентно со $3^k \mid (2^d+1)$. Бидејќи d е непарен број, $3 \mid (2^d+1)$, но $9 \nmid (2^d+1)$, (имено, $9 \mid (2^d+1)$ ако и само ако $d=3+6r$ што не е можно, бидејќи $\mathrm{NZD}(d,3)=1$). Затоа

$$3^{k+1} \mid (2^{3^k d}+1), \quad \text{но} \quad 3^{k+2} \nmid (2^{3^k d}+1).$$

Бидејќи $(3^k)^2$ е делител на $2^{3^k d}+1$, следува дека $k+1 \ge 2k$, т.е. $k=0$ или $k=1$. Ќе докажеме дека $d=1$, од што непосредно ќе следува дека $k=1$ и $n=3$.

Нека $d>1$ и p е најмалиот прост делител на d. Бројот d е непарен и $\mathrm{NZD}(d,3)=1$, па затоа $p \ge 5$, $p \mid (2^n+1)$, т.е. $2^n \equiv -1 \pmod p$, односно $2^{2n} \equiv 1 \pmod p$. Од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Понатаму, со помош на Евклидовиот алгоритам може да се докаже дека ако $j=\mathrm{NZD}(2n, p-1)$, тогаш $2^j \equiv 1 \pmod p$. Бројот j е делив со 2 бидејќи $2n$ и p се парни броеви, но не е делив со 4 бидејќи n е непарен број. Исто така j може да е делив со 3, но не и со 9, бидејќи $2n$ не е делив со 9. Освен тоа ако се има предвид дека $\frac{j}{2} \mid d$ и $\frac{j}{2} \mid p-1$, а p е најмалиот прост делител на d, добиваме дека j може да биде 2 или 6. Бидејќи $p \mid (2^j-1)$, следува дека p е делител на еден од броевите 3 или 63. Бидејќи $p \ge 5$, добиваме $p=7$. Но бројот 7 не е делител на бројот 2^m+1, за ниту еден цел број m, што противречи на претпоставката $p \mid (2^n+1)$.

Според тоа, единствената можност за $n=3^k d$ е $k=1$ и $d=1$, т.е. $n=3$.

4. Определи барем една функција $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, таква што

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}, \tag{1}$$

за секои $x,y \in \mathbb{Q}^+$.

Решение. Ако $f(y_1)=f(y_2)$ за $y_1,y_2 \in \mathbb{Q}^+$, тогаш од дадената функционална равенка за произволен $x \in \mathbb{Q}^+$ добиваме

$$\frac{f(x)}{y_1}=f(xf(y_1))=f(xf(y_2))=\frac{f(x)}{y_2}, \tag{2}$$

т.е. $y_1=y_2$, што значи дека f е инјекција. Ако земеме $y=1$ и искористиме дека f е инјекција од (1) добиваме $f(1)=1$.

За $x=1$ имаме

$$f(f(y))=\frac{1}{y}, \tag{3}$$

за секој $y\in\mathbb{Q}^+$. Ако f ја примениме на равенството (3), добиваме $f(\frac{1}{y})=\frac{1}{f(y)}$, за секој $y\in\mathbb{Q}^+$. Конечно, ако во (1) ставиме $y=f(\frac{1}{t})$, тогаш од (3) добиваме

$$f(xt)=f(x)f(t), \tag{4}$$

за секои $x,t\in\mathbb{Q}^+$.

Обратно, нека функцијата f ги задоволува условите (3) и (4) за секои $x,y,t\in\mathbb{Q}^+$. Тогаш за $x,y\in\mathbb{Q}^+$ добиваме

$$f(xf(y))=f(x)f(f(y))=f(x)\frac{1}{y}=\frac{f(x)}{y},$$

што значи дека f е решение на (1).

Останува да се конструира функција $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ за која важат (3) и (4).

Нека p_i е $i-$тиот прост број. Дефинираме $f(1)=1$ и

$$f(p_k)=\begin{cases} p_{k+1}, & \text{ако } k \text{ е непарен број,}\\ \frac{1}{p_{k-1}}, & \text{ако } k \text{ е парен број .}\end{cases} \tag{5}$$

Ако $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$, каде што $n_i\geq 0, i=1,2,...,k$ дефинираме

$$f(p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k})=(f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\dots(f(p_k))^{n_k},$$

и на крајот ако $\frac{m}{n}$, каде што $m,n\in\mathbb{N}$, е рационален број дефинираме $f(\frac{m}{n})=\frac{f(m)}{f(n)}$. Може да се провери дека оваа функција е добро дефинирана, т.е. ако $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, тогаш $\frac{f(m)}{f(n)}=\frac{f(p)}{f(q)}$. Сега непосредно следува дека условот (4) е исполнет. Од дефиницијата на $f(p_k)$ следува дека $f(f(p_k))=\frac{1}{p_k}$.

Со индукција по s се докажува дека

$$f(n_1n_2...n_s)=f(n_1)f(n_2)...f(n_s) \tag{6}$$

ако $n_1,n_2,...,n_s\in\mathbb{N}$. Затоа за секој природен број $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$ добиваме

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f((f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\dots(f(p_k))^{n_k})\\ &=[f(f(p_1))]^{n_1}[f(f(p_2))]^{n_2}\dots[f(f(p_k))]^{n_k}\\ &=(\tfrac{1}{p_1})^{n_1}(\tfrac{1}{p_2})^{n_2}...(\tfrac{1}{p_k})^{n_k}=\tfrac{1}{n}.\end{aligned}$$

Сега, за секој $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^+$ добиваме

$$f(f(\tfrac{m}{n})) = f(\tfrac{f(m)}{f(n)}) = \frac{f(f(m))}{f(f(n))} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = (\tfrac{m}{n})^{-1}.$$

Со тоа докажавме дека вака конструираната функција ги исполнува условите (3) и (4).

5. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$. Играчите A и B наизменично избираат цели броеви $n_1, n_2, n_3, \ldots$ според следниве правила:

- играчот A го знае бројот n_{2k} и избира природен број n_{2k+1} таков што

$$n_{2k} \le n_{2k+1} \le n_{2k}^2,$$

- играчот B го знае бројот n_{2k+1} и може да избере природен број n_{2k+2} таков што $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ е позитивен степен на прост број или на бројот 1.

Играчот A победува ако го избере бројот 1990, а играчот B победува ако го избере бројот 1. За кое n_0

а) играчот A може да победи,

б) играчот B може да победи, и

в) ниту еден од играчите нема победничка стратегија?

Решение. Со W да го означиме множеството од сите природни броеви n_0 такви да играчот A може да победи започнувајќи ја играта со n_0. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m и s се природни броеви за кои важи:

1) $m \le 1990$, $s \le 1990$,

2) $\{m, m+1, \ldots, 1990\} \subseteq W$,

3) За секој прост делител p на s важи $\frac{s}{p^r} \ge m$, каде што r е природен број таков што $p^r \mid s$ и $p^{r+1} \nmid s$.

Тогаш сите природни броеви n_0, за кои што важи $\sqrt{s} \le n_0 < m$, се содржани во W.

Доказ. Ако $n_0 = 1990$, тогаш A го избира тој број и со тоа победува. Нека сега $\sqrt{s} \le n_0 < m$. Играчот A може да избере $n_1 = s$. Тогаш, според условот на задачата, играчот B мора да, избере број $n_2 \in W$, таков што

$$m \le \frac{s}{p^r} \le n_2 < s \le 1990.$$

Бидејќи $n_2 \in \{m, m+1, \ldots, 1990\} \subseteq W$ играчот A може сигурно да победи. Со тоа лемата е докажана. ■

Бидејќи $45^2 = 2025 > 1990$, сите n_0 такви што $45 \le n_0 \le 1990$ се наоѓаат во W. Понатаму, броевите $m = 45$ и $s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ги задоволуваат условите 1), 2) и 3) од лемата и $\sqrt{420} < 21 \le 45,$ од каде се добива дека $\{21, 22, ..., 44\} \subset W.$ Користејќи ја лемата за $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7,$ се добива дека $\{13, 14, ..., 20\} \subset W.$ За $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7,$ од лемата се добива дека $\{11, 12\} \subset W.$ Земајќи $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$ од лемата следува дека $\{8, 9, 10\} \subset W.$ Со тоа докажавме дека

$$\{8, 9, ..., 1990\} \subset W.$$

За $n_0 > 1990$ играчот *A* може да најде природен број $r > 7$ таков што

$$2^r \cdot 3^2 < n_0 \le 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

и тогаш избира

$$n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2.$$

Сега независно од изборот на играчот B мора $n_2 = 2^{r+1} \ge 8$ или $n_2 = 3^2 \ge 8$, т.е. $8 \le n_2 < n_0$. По конечен број на чекори ќе биде $8 \le n_{2k} \le 1990,$ а тогаш играчот *A* победува во играта.

Да го разгледаме сега случајот $n_0 \le 5.$ Бидејќи најмалиот производ на три различни прости броеви е еднаков на $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2,$ играчот *A* мора да избере број од облик $n_1 = p^r q^s$, каде p е прост број, q е прост број или 1, $p^r > q^s$ и $r, s \ge 1$. Тогаш играчот B може да избере $n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \le n_0.$

По конечен број на чекори, играчот B ќе добие $n_{2k} = 1$ и победува.

За $n_0 = 6$ или $n_0 = 7,$ играчот *A* мора да избере $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ или $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$ па играчот B мора да избере $n_2 = 6$. Понатаму *A* и *B* мораат да бираат 30, 6, 30, 6, ... наизменично, за да избегнат пораз и никој нема да победи.

6. Да се докаже дека постои конвексен 1990-аголник со следните својства:
а) сите агли на многуаголникот се еднакви, и
б) должините на страните на многуаголникот се еднакви на $1^2, 2^2, ..., 1989^2,$ 1990^2 во некој редослед.

Решение. Да претпоставиме дека 1990-аголникот $A_0 A_1 ... A_{1989}$ ги има својствата а) и б). Да го поставиме многуаголникот во комплексна рамнина, со координатен почеток во точката $A_0,$ а полуправата $A_0 A_1$ да биде позитивен дел од реалната оска. Сега секој вектор $\overrightarrow{A_r A_{r+1}}$ можеме да претставиме со комплексен број

$$n_r e^{ir\alpha}, \quad \text{каде} \quad \alpha = \frac{2\pi}{1990}, \quad r \in \{0, 1, 2, ..., 1989\},$$

а со A_{1990} е означено A_0. Тогаш $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ е пермутација на броевите ($1^2, 2^2, ..., 1990^2$). Проблемот сега може да се преформулира на следниот начин: да се одреди пермутација $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ на броевите ($1^2, 2^2, ..., 1989^2$), така што важи

$$\sum_{r=0}^{1989} n_r e^{ir\alpha} = 0 .$$

Прво, дадените 1990 броеви да ги поделиме на 995 пара

$$(1^2, 2^2), (3^2, 4^2), ..., (1989^2, 1990^2),$$

и да го поставиме секој пар на крајните точки на некој $\overline{A_k A_{k+995}}$, при што на k -тиот пар $((2k-1)^2, (2k)^2)$ му соодветствуваат броевите $(2k-1)^2 e^{ik\alpha}$ и $(2k)^2 e^{i(k\alpha+\pi)}$. На збирот на овие два комплексни броеви соодветствува бројот

$$(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1 .$$

Сега е доволно тие 995 броеви да се поставаат во темињата на правилен 995-аголник, така што збирот биде еднаков на 0. Бидејќи $995 = 5 \cdot 199$ овие броеви ќе ги поделиме на 199 групи од по 5 броеви на следниот начин:

(3, 7, 11, 15, 19), (23, 27, 31, 35, 39), ... , (3963, 3967, 3971, 3975, 3979). (*)

Нека $\beta = \frac{2\pi}{199}, \gamma = \frac{2\pi}{5}$. Со F_1 да го означиме петаголникот со темиња: $1, e^{i\gamma}, e^{2i\gamma}, e^{3i\gamma}, e^{4i\gamma}$, а со F_{k+1} петаголникот $e^{ki\beta} F_1$. Ставајќи пет броеви од $(k+1)-$та група од броевите (*) во темињата на петаголникот F_{k+1}, добиваме $(k+1)-$ва група на комплексни броеви

$$(20k+3)e^{ki\beta}, \quad (20k+7)e^{i(k\beta+\gamma)}, \quad (20k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)},$$
$$(20k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)}, \quad (20k+19)e^{i(k\beta+4\gamma)},$$

каде k =0, 1, 2, ... ,198. Збирот на овие броеви е

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^{4} (20k+4l+3)\, e^{i(k\beta+l\gamma)} &= \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^{4} [(10k+2l+2)^2 - (10k+2l+1)^2] e^{i(k\beta+l\gamma)} \\ &= \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^{4} \sum_{m=1}^{2} (10k+2l+m)\, e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)} = 0.\end{aligned}$$

Бидејќи k прима вредности од $\{0,1,2,...,198\}$, l од $\{0,1,2,3,4\}$, и m од $\{1,2\}$, изразот $10k+2l+m$ прима вредности од 1, 2, ... , 1990, при што секоја вредност ја зема точно еднаш, добиваме дека $e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)} = e^{i\frac{10k+398l+995m}{1990}\pi}$ ги прима вредностите 1, $e^{i\alpha}, ..., e^{1989i\alpha}$, и тоа секоја по еднаш.

Останува уште да се докаже дека вака конструираниот $1990-$аголник е конвексен. Ќе докажеме дека за секоја страна на многуаголникот сите останати негови темиња се наоѓаат од една страна на правецот на кој што е избрана страната на многуаголникот. Избираме произволна страна на многуаголникот и ја означуваме со A_0A_1, а $1990-$аголникот со $A_0A_1...A_{1989}$. Бидејќи

$$\mathrm{Im}(A_k)=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{k-1} n_m \,\mathrm{Im}(e^{mi\alpha}) \geq n_1 \sin\frac{2\pi}{1990} > 0, & 2 \leq k \leq 995;\\ -\sum\limits_{m=k}^{1989} n_m \,\mathrm{Im}(e^{im\alpha}) \geq n_{1989} \sin\frac{2\pi}{1990} > 0, & 996 \leq k \leq 1989,\end{cases}$$

добиваме дека сите A_k, $(k=2,3,...,1989)$ се од иста страна на правата A_0A_1.