JMMO 2002

1. Во четирицифрен број цифрите на иљадарките и десетките се 7 и 2, соодветно. Кои цифри треба да стојат на местото на стотките и единиците, за да бројот е делив со 2 и 3, но не и со нивните повисоки степени?

   Решение. Ако цифрата на стотките е a, а цифрата на единиците е b, тогаш бројот е од видот $\overline{7a2b}$, $a,b \in \{0,1,2,...,9\}$. За да бројот $\overline{7a2b}$ е делив со 2 треба $b \in \{0,2,4,6,8\}$, но како бројот не треба да е делив со повисоките степени на бројот 2 заклучуваме дека неговиот двоцифрен завршеток не смее да е делив со 4 па затоа $b \in \{2,6\}$.

   а) Ако $b=2$, тогаш бројот е од видот $\overline{7a22}$ и како тој треба да биде делив со 3 добиваме дека збирот на цифрите $7+a+2+2=11+a$ треба да биде делив со 3, па затоа $a \in \{1,4,7\}$. Меѓутоа, за $a=7$ го добиваме бројот 7722 кој е делив со $9=3^2$, а тоа противречи на условот на задачата. Според тоа, во овој случај броевите 7122 и 7422 се решение на задачата.

   б) Ако $b=6$, тогаш бројот е од видот $\overline{7a26}$ и како тој треба да биде делив со 3 добиваме дека збирот на цифрите $7+a+2+6=15+a$ треба да биде делив со 3, па затоа $a \in \{0,3,6,9\}$. Меѓутоа, за $a=3$ го добиваме бројот 7326 кој е делив со $9=3^2$, а тоа противречи на условот на задачата. Според тоа, во овој случај броевите 7026, 7626 и 7926 се решение на задачата.

   Конечно, решение на задачата се броевите 7026, 7122, 7422, 7626 и 7926.

2. Природните броеви a,b и c се такви, што броевите $a+c$ и $b+c$ се квадрати на два последователни природни броја. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ исто така се квадрати на два последователни природни броја.

   Решение. Нека $a+c=k^2$ и $b+c=(k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогаш $a=k^2-c$ и $b=(k+1)^2-c$, па затоа

$$\begin{aligned} ab+c &= (k^2-c)[(k+1)^2-c]+c \\ &= c^2-[k^2+(k+1)^2-1]c+[k(k+1)]^2 \\ &= c^2-2k(k+1)c+[k(k+1)]^2 \\ &= [k(k+1)-c]^2=(k^2+k-c)^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} ab+a+b+c &= (k^2-c)[(k+1)^2-c]+k^2-c+(k+1)^2-c+c \\ &= c^2-[k^2+(k+1)^2+1]c+[k(k+1)]^2+k^2+(k+1)^2 \\ &= c^2-2(k^2+k+1)c+[k(k+1)]^2+2k(k+1)+1 \\ &= c^2-2(k^2+k+1)c+[k(k+1)+1]^2 \\ &= c^2-2(k^2+k+1)c+(k^2+k+1)^2 \\ &= (k^2+k+1-c)^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

3. Нека ABC е разностран правоаголен триаголник ($\measuredangle A = 90^\circ$). Произволна кружница $K(O,R)$ со тетива BC ги сече страните AB и AC во точки D и E соодветно. Нека $AS, S \in BC$ е висина на триаголникот ABC и $AS \cap DE = \{K\}$. Ако M е средина на BC, докажи дека четириаголникот $AKOM$ е паралелограм.

   Решение. Нека $\overline{OA} > R$. Случајот $\overline{OA} \le R$ се разгледува аналогно. Од $AK \perp BC$ и $OM \perp BC$ следува $AK \parallel OM$ (направи цртеж). Понатаму

$$\measuredangle KAD = 90^\circ - \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle ADK,$$

   па затоа $\overline{AK} = \overline{DK}$. Аналогно се докажува дека $\overline{AK} = \overline{EK}$, што значи дека K е средина на DE, која е тетива на $K(O,R)$. Според тоа,

$$OK \perp DE. \tag{1}$$

   Но, $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC}$, па затоа

$$\measuredangle MAC = \measuredangle C = 90^\circ - \measuredangle AED$$

   (четириаголникот $BDEC$ е впишан во кружницата $K(O,R)$). Значи, $\measuredangle MAC + \measuredangle AED = 90^\circ$ што значи

$$AM \perp DE. \tag{2}$$

   Конечно, од (1) и (2) следува $OK \parallel AM$ и како $AK \parallel OM$ добиваме дека четириаголникот $AKOM$ е паралелограм.

4. На еден шаховски турнир, на кој секои два учесника одиграле точно по една партија, секој шахист освоил цел број поени. На турнирот сите шахисти, освен победникот, освоиле еднаков број поени. Докажи дека бројот на учесниците на турнирот е парен.

   Забелешка. Во шахот за победа се добива 1 поен, за нерешено половина поен, за пораз 0 поени.

Решение. Нека на турнирот учествувале n шахисти и со a да го означиме бројот на поените кои ги освоил победникот на турнирот, а со b бројот на поените кои ги освоил секој од преостанатите учесници на турнирот. Бидејќи секои два учесника одиграле точно една партија, добиваме дека на турнирот се одиграни вкупно $\frac{n(n-1)}{2}$ партии (зошто?), т.е. се освоени $\frac{n(n-1)}{2}$ поени. Од друга страна бројот на освоените поени е еднаков на $a+(n-1)b$, па затоа $\frac{n(n-1)}{2}=a+(n-1)b$, т.е.

$$n(n-1)=2a+2b(n-1). \qquad (1)$$

Бидејќи $n,a,b\in\mathbb{N}$ од (1) следува дека $(n-1)\,|\,2a$. Меѓутоа победникот може да освои најмногу $n-1$ поен, па затоа $a\le n-1$, т.е. $2a\le 2(n-1)$ и како $(n-1)\,|\,2a$ добиваме или $2a=n-1$ или $2a=2(n-1)$.

Ако $2a=n-1$, тогаш со замена (1) по средувањето добиваме $n-1=2b$, па затоа $2a=2b$ т.е. $a=b$ што противречи на условот на задачата т.е. на $a>b$.

Значи $2a=2(n-1)$ и ако замениме во (1) по средувањето добиваме $n=2+2b$ т.е. $n=2(1+b)$ што и требаше да се докаже.